

# Problème 1 : Les Marées

1. On part de la définition du barycentre :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$



COURS

D'où :

$$M_T \overrightarrow{CT} + M_L \overrightarrow{CL} = (M_T + M_L) \overrightarrow{CT} + M_L \overrightarrow{TL} = \vec{0}$$



Relation de Chasles

Soit :

$$\overrightarrow{CT} = -\frac{M_L}{M_T + M_L} \overrightarrow{TL}$$

AN :

$$CT = 4.67 \times 10^3 \text{ km}$$

Commentaire : le centre de gravité se trouve à l'intérieur de la terre.

2. Les deux forces concernées sont :

$$\vec{F}_{L \rightarrow T} = \frac{GM_L M_T}{(LT)^3} \overrightarrow{TL}$$

$$\vec{F}_{S \rightarrow T} = \frac{GM_S M_T}{ST^3} \overrightarrow{TS}$$

D'où :

$$\frac{\|\vec{F}_{L \rightarrow T}\|}{\|\vec{F}_{S \rightarrow T}\|} = \frac{M_L}{M_S} \left( \frac{ST}{LT} \right)^2$$

AN :

$$\frac{\|\vec{F}_{L \rightarrow T}\|}{\|\vec{F}_{S \rightarrow T}\|} = 5.6 \times 10^{-3}$$

Commentaire : l'action gravitationnelle exercée par la lune sur la terre est bien évidemment très inférieure à celle exercée par le soleil sur la terre : le mouvement de la terre est principalement dû à l'attraction solaire (la Terre tourne autour du soleil).

3.



On fait obligatoirement un schéma de la situation :

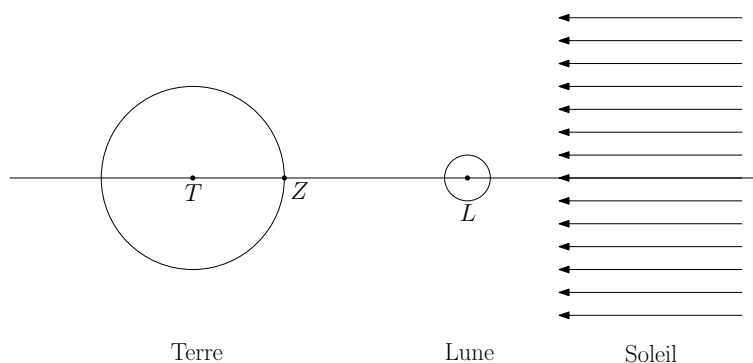


FIGURE 1 – Calcul de  $\gamma$  en Z

On exprime les deux termes différentiels au zénith :

$$\gamma_L = GM_L \left( \frac{1}{(ZL)^2} - \frac{1}{(TL)^2} \right)$$

$$\gamma_S = GM_S \left( \frac{1}{(ZS)^2} - \frac{1}{(TS)^2} \right)$$

D'où :

$$\frac{\gamma_L}{\gamma_S} = 2.23$$



Éviter d'utiliser le terme prépondérant

Commentaire : Bien que  $M_L \ll M_S$ , la proximité de la Lune rend son terme différentiel deux fois plus important que celui du Soleil.

4. Les autres astres sont soit trop loin soit trop légers. On aura par exemple pour Jupiter :

$$\frac{\gamma_L}{\gamma_{Jupiter}} \approx 10^5 \gg 1$$

5. Le terme de marées au Zénith s'exprime ainsi :

$$\vec{\gamma}_Z = \gamma_Z \vec{e}_x$$

Avec :

$$\gamma_Z = GM_L \left( \frac{1}{(D - R_T)^2} - \frac{1}{D^2} \right) = \frac{GM_L}{D^2} \left( -1 + \left( 1 - \frac{R_T}{D} \right)^{-2} \right)$$

Soit, sachant que  $D \gg R_T$  :

$$\gamma_Z = \frac{GM_L}{D^2} \left( -1 + 1 + \frac{2R_T}{D} \right)$$

D'où :

$$\gamma_Z = \frac{2GR_T M_L}{D^3}$$

Le terme de marées au nadir, s'exprime lui comme suit :

$$\vec{\gamma}_N = \gamma_N \vec{e}_x$$

Avec :

$$\gamma_N = GM_L \left( \frac{1}{(D + R_T)^2} - \frac{1}{D^2} \right) = \frac{GM_L}{D^2} \left( -1 + \left( 1 + \frac{R_T}{D} \right)^{-2} \right)$$

Soit, sachant que  $D \gg R_T$  :

$$\gamma_N = \frac{GM_L}{D^2} \left( -1 + 1 - \frac{2R_T}{D} \right)$$

D'où :

$$\gamma_N = -\frac{2GR_T M_L}{D^3}$$

Commentaire : Ces deux termes sont bien égaux en norme et opposés, d'où la symétrie du bourrelet océanique observé.

6. (a) Le temps prévenu entre deux pleines mers est de 12h.

(b) On calcule les temps  $\Delta t$  entre deux pleines mers successives en utilisant le tableau et on en déduit la valeur moyenne et l'écart type. En prenant les dix premiers intervalles, on trouve :

$$\Delta t_{moyen} = 12 \text{ h } 20 \text{ mn}$$

$$\sigma = 7 \text{ mn}$$

Cette durée présente un écart significatif avec les 12 heures prévues par le modèle : il faut adapter le modèle.

(c) Soit  $\Delta t$  le temps mis par le point  $B$  pour passer du nadir (Pleine mer en  $N$  à  $t = 0$ ) à la pleine mer suivante.

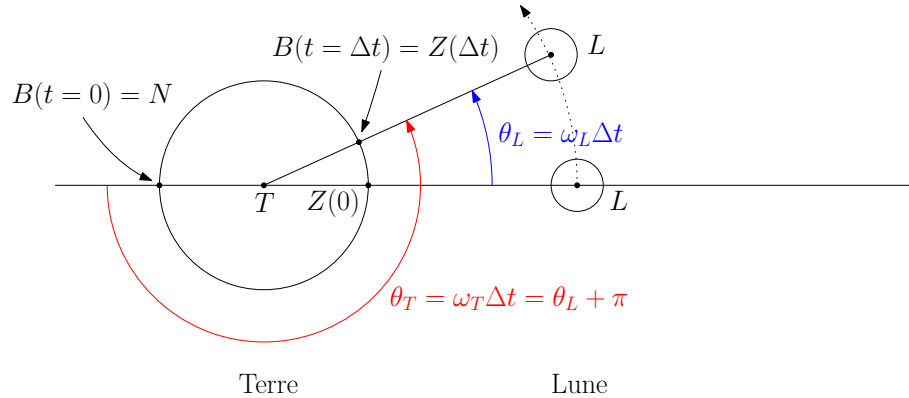


FIGURE 2 – Décalage du Zenith

Les angles de rotations correspondant sont représentés figure 2 et vérifient les relations suivantes :

$$\Delta t = \frac{\theta_T}{\omega_T} = \frac{\theta_L}{\omega_L}$$

Avec :

$$\theta_T = \theta_L + \pi$$

On a donc :

$$\frac{\pi + \theta_L}{\omega_T} = \frac{\theta_L}{\omega_L} \Rightarrow \theta_L = \pi \left( \frac{T_T}{T_L - T_T} \right)$$

D'où :

$$\Delta t = \frac{T_L T_T}{2(T_T - T_L)}$$

Le décalage cherché vaut donc :

$$\tau = \Delta t - \frac{T_T}{2} = \frac{T_T^2}{2(T_L - T_T)}$$

AN :  $\tau = 13$  mn

Ce résultat est cohérent mais est en deçà des 20 mn trouvées avec le tableau des marées : c'est la limite du modèle statique des marées. Le modèle sera ensuite amélioré en prenant en compte la forme des côtes et la dynamique des marées.

7.



Démonstration de COURS !

On utilise la troisième loi de Kepler pour décrire le mouvement du satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

Ici  $a = R_T + h$  où  $h$  est l'altitude du satellite et  $T = T_T = 24$  h,

D'où :

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} - R_T$$

AN :  $h = 36 \times 10^3$  km

Remarque : la démonstration complète, non demandée ici, exige de montrer que la trajectoire d'un satellite géostationnaire est obligatoirement circulaire dans le plan de l'équateur.

8. ✘ Considérons le système isolé Planète-Satellite. On note  $m_S$  la masse du satellite et  $m_P$  la masse de la planète.

✘ Si la  $m_S \ll m_P$  alors le référentiel barycentrique du système est confondu avec le référentiel barycentrique de la planète ( $\mathcal{R}_P^*$ ) et est donc galiléen.

- ✘ Le TRC appliqué au satellite dans  $\mathcal{R}_p^*$  donne :

$$m_S \omega_{orb}^2 r = \frac{Gm_S m_P}{r^2}$$

D'où :

$$\omega_{orb} = \sqrt{\frac{Gm_P}{r^3}}$$

- ✘ Pour  $r = r_{syn}$ , on a :

$$\omega_{orb} = \omega_P = \sqrt{\frac{Gm_P}{r_{syn}^3}}$$

L'orbite est dite synchrone ou stationnaire.



$r_{syn}$  est la distance d'un satellite géostationnaire : pour la terre, elle est de  $42 \times 10^3$  km

- ✘ Si  $r > r_{syn}$  alors  $\omega_{orb} < \omega_P$  : la planète tourne plus vite sur elle-même que le satellite autour de la planète. Le bourrelet, entraîné par la rotation de la planète, est en avance par rapport au satellite. Celui-ci va donc, par son attraction, retenir le bourrelet et provoquer par frottements le ralentissement de la rotation de la planète sur elle-même. Cette situation correspond au système Terre-Lune.
- ✘ Si  $r < r_{syn}$  alors  $\omega_{orb} > \omega_P$  : la planète tourne moins vite sur elle-même que le satellite autour de la planète. Le bourrelet, entraîné par la rotation de la planète, est en retard par rapport au satellite. Celui-ci va donc, par son attraction, entraîner le bourrelet et provoquer par frottements l'accélération de la rotation de la planète sur elle-même. Cette situation correspond au système Mars-Phobos.
9. ✘ On applique le TMC au système Planète-Satellite dans  $\mathcal{R}_p^*$ , TMC projeté sur  $(\Delta_P)$  noté par la suite  $(\Delta)$ . Le système étant isolé, on a :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \frac{dL_\Delta^P}{dt} + \frac{dL_\Delta^S}{dt} = \sum M_\Delta^{ext} = 0$$

Avec :

$$L_\Delta^P = J_{\Delta_P} \omega_P$$

$$L_\Delta^S = L^* + m_S \omega_{orb} r^2 = J_{\Delta_S} \omega_S + m_S \omega_{orb} r^2$$

$\omega_S$  étant la vitesse angulaire orbitale du satellite, la synchronisation du satellite impose :

$$\omega_S = \omega_{orb}$$

Les moments d'inerties sont les moments d'inertie sur les axes propres des astres, ils sont des ordres de grandeurs suivants :

$$J_{\Delta_P} \approx m_P R_P^2$$

$$J_{\Delta_S} \approx m_S R_S^2$$

Avec :

$$J_{\Delta_P} \gg J_{\Delta_S}$$

- ✘ on a donc :

$$J_{\Delta_P} \omega_P + J_{\Delta_S} \omega_S + m_S \omega_{orb} r^2 = Cste$$

En négligeant le moment cinétique du satellite, on obtient :

$$J_{\Delta_P} \omega_P + m_S \omega_{orb} r^2 = Cste$$

Soit :

$$J_{\Delta_P} \omega_P + m_S \sqrt{Gm_P r^2} = Cste \quad (1)$$

- ✘ Qualitativement, on voit que :

— Si  $r > r_{syn}$  et donc si  $\omega_P > \omega_{orb}$ , alors d'après la question précédente, on sait que  $\omega_P$  diminue et, d'après l'équation (1), on peut en déduire que  $r$  augmente : le satellite s'éloigne de la planète. Cela correspond au système Terre-Lune.

— Si  $r < r_{syn}$  et donc si  $\omega_P < \omega_{orb}$ , alors d'après la question précédente, on sait que  $\omega_P$  augmente et, d'après l'équation (1), on peut en déduire que  $r$  diminue : le satellite se rapproche de la planète. Cela correspond au système Mars-Phobos.

✘ Pour retrouver ce résultat par le calcul, on utilise le TEM : l'énergie mécanique du système diminue en raison des frottements internes. L'énergie mécanique de ce système dans  $\mathcal{R}_P^*$  s'écrit :

$$E = E_c(P) + E_c(S) + E_p$$

Avec :

—  $E_c(P)$  = énergie cinétique de la planète dans  $\mathcal{R}_P^* = \frac{1}{2} J_{\Delta_P} \omega_P^2$

—  $E_c(S)$  = énergie cinétique du satellite dans  $\mathcal{R}_P^* = \frac{1}{2} J_{\Delta_S} \omega_S^2 + \frac{1}{2} m_S (r \omega_{orb})^2$

—  $E_p$  = énergie potentielle d'interaction gravitationnelle du système =  $-\frac{G m_P m_S}{r}$

En négligeant l'énergie cinétique propre du satellite, on obtient :

$$E = \frac{1}{2} J_{\Delta_P} \omega_P^2 + \frac{1}{2} m_S (r \omega_{orb})^2 - \frac{G m_P m_S}{r}$$

Soit, en utilisant l'expression de  $\omega_{orb}$  :

$$E = \frac{1}{2} J_{\Delta_P} \omega_P^2 - \frac{G m_P m_S}{2r}$$

Le TEM appliqué au système donne :

$$\frac{dE}{dt} = J_{\Delta_P} \omega_P \frac{d\omega_P}{dt} + \frac{G m_S m_P}{r^2} \frac{dr}{dt} = \mathcal{P}^{NC} < 0 \quad (2)$$

En combinant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\frac{m_S \sqrt{G m_P}}{2 \sqrt{r}} \frac{dr}{dt} (\omega_S - \omega_P) < 0$$

Ainsi :

— Si  $\omega_P > \omega_S$  alors  $\frac{dr}{dt} > 0$  : la satellite s'éloigne de la planète

— Si  $\omega_P < \omega_S$  alors  $\frac{dr}{dt} < 0$  : la satellite se rapproche de la planète

✘ De même que la Lune a des effets de marées sur la Terre, la Terre a eu des effets de marées sur la Lune, ce qui a provoqué le synchronisme observé aujourd'hui :

$$\omega_{orb} = \omega_S = \omega_L$$

✘ De manière plus générale, les facteurs favorisant la synchronisation du satellite sont :

— L'effet de marées est proportionnel à la masse de l'astre responsable de cet effet. Sachant que  $m_S \ll m_P$ , on comprend que la synchronisation apparaisse plus vite pour le satellite que pour la planète.

— Les satellites, au moment de leur formation sont de nature plus fluide et donc leur synchronisation est favorisée

✘ Concernant le futur du système Terre-Lune :

— On pourrait envisager qu'un jour, la terre tourne à la même vitesse que la Lune tourne autour de la Terre :

$$\omega_T = \omega_{orb} = \omega_L$$

A ce moment là, seuls les habitants de la moitié de la terre verront une lune fixe dans le ciel.

— En termes d'ordre de grandeur, sachant que la période de rotation de la terre sur elle-même a diminué de  $t_{2h} = 2h$  en  $t_{2h,T} = 3.5 \times 10^6$  ans, on en déduit, par un simple produit en croix que la synchronisation se fera au bout d'un temps  $t_{syn}$  vérifiant :

$$t_{syn} = \frac{(T_L - T_T) t_{2h,T}}{t_{2h}}$$

AN :

$$t_{syn} \approx 40 \times 10^{13} \text{ ans}$$

- Sachant que la lune s'éloigne d'environ  $d = 3.75$  cm par an, on en déduit, à l'aide d'un simple produit en croix, la distance à laquelle sera la lune à ce moment là :

$$d_{syn} = r + \frac{dt_{syn}}{1 \text{ an}} = 384.4 \times 10^6 \text{ m} + 1.5 \times 10^{13} \text{ m} \approx 1.5 \times 10^{13} \text{ m}$$

Cette distance n'a absolument aucun sens puisqu'elle est largement supérieure à la distance Terre-Soleil : la Lune aura depuis longtemps échappé à l'attraction de la Terre seule.

- Il faut rajouter, que le temps  $t_{syn}$  est très supérieur à la durée de vie restante du soleil : celui-ci aura depuis longtemps englouti (ou grillé) la Terre en se transformant en géante rouge.

10. (a) Une éclipse totale de soleil se produit en un point  $M$  sur Terre, lorsque la Lune, située entre la Terre et le Soleil, occulte l'ensemble des rayons lumineux issus du soleil et arrivant en ce point, comme indiqué figure 3.

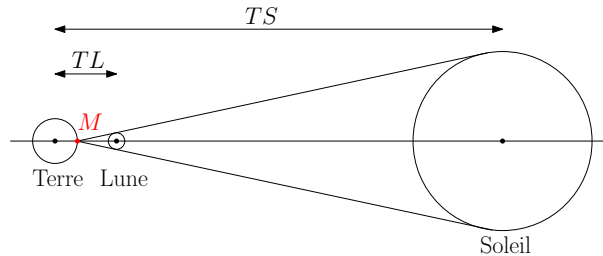


FIGURE 3 – Principe d'une éclipse totale de soleil

- (b) ✘ Sachant que la Lune s'éloigne au cours du temps, La dernière configuration pour laquelle on observera une éclipse totale de soleil sera lorsque :

- La Lune sera à son périégée (la plus proche possible de la terre) et sur la droite ( $ST$ )
- La terre sera à son apogée (le plus loin possible du soleil)

On doit donc chercher la configuration telle que :

$$TL = TL_{min}$$

$$TS = TS_{max}$$

- ✘ En utilisant les données de l'annexe 1 pour le système Terre-Soleil on trouve :

$$TS_{min} = \frac{p}{1 - e}$$

$$TS_{max} = \frac{p}{1 + e}$$

D'où, sachant que  $TS_{min} + TS_{max} = 2a$  :

$$p = a(1 - e^2)$$

$$TS_{max} = a(1 + e)$$

- ✘ La distance  $TL_{min}$  étant la distance permettant une éclipse, on a :

$$\frac{D_L}{D_S} = \frac{TL_{min} - R_T}{TS_{max} - R_T} \approx \frac{TL_{min} - R_T}{TS_{max}}$$

Soit :

$$TL_{min} = TS_{max} \left( \frac{D_L}{D_S} \right) + R_T$$

AN :  $TL_{min} = 368 \times 10^3$  km

- ✘ La valeur actuelle de  $TL_{min}$  est :

$$TL_{min}(0) = a(1 + e) = 363 \times 10^3 \text{ km}$$

- ✘ Sachant que la Lune s'éloigne de  $v = 3.78$  cm·an<sup>-1</sup>, le dernière possibilité d'éclipse sera autour de la date  $t_e$  telle que :

$$t_e = \frac{TL_{min} - TL_{min}^0}{v} = 5.9 \times 10^8 \text{ an}$$

11. Code :

```

1 # coding: utf-8
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from scipy.stats import linregress
5 from math import *
6 import numpy.random as rd
7
8 G=6.67*10**(-11)
9
10 a0=np.array([0.387,0.723,1,1.52,5.20,9.54,19.2,30.1])
11 a=np.array([1.5*10**(11)*x for x in a0])
12 lna=np.log(a)
13 T0=np.array([0.241,0.615,1,1.88,11.9,29.5,84.1,165])
14 T=np.array([365.25*24*3600*x for x in T0])
15 lnT=np.log(T)
16
17 A,B, r, p_vall, std_err = linregress(lnT, lna)
18 print("\nRésultat de la régression linéaire avec linregress : ")
19 print("A ={:8.3f}\n B ={:8.3f}\n r^2 ={:8.5f}".format(A, B, r**2))
20
21 plt.figure("lna en fonction de lnT")
22 plt.plot(lnT,lna,'ro-',label='Data')
23 plt.plot(lnT,A*lnT+B,'bs-', label='Model')
24 plt.legend()
25
26 plt.figure("Résidus")
27 residu=lna-A*lnT+B
28 plt.plot(lnT,residu, 'ro-', label='résidus')
29
30 Ms1=4*np.pi**2/(G)*np.exp(3*B)
31 print('valeur de la masse du soleil')
32 print('Ms=',Ms1)

```

FIGURE 4 – Code Python pour vérifier la troisième loi de Kepler

Résultats :

```

Résultat de la régression linéaire avec linregress :
A = 0.667
B = 14.219
r^2 = 1.00000
valeur de la masse du soleil
Ms= 1.98846713035e+30

```

FIGURE 5 – Résultat de la compilation

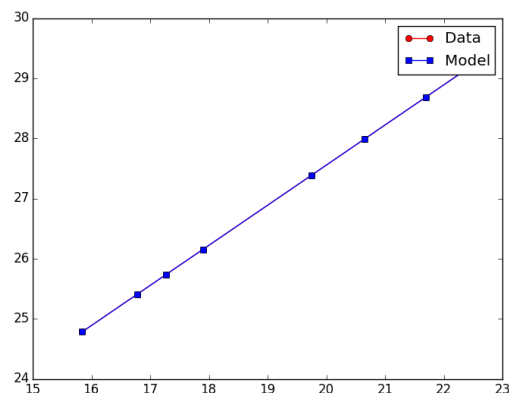


FIGURE 6 –  $\ln(a)$  en fonction de  $\ln(T)$

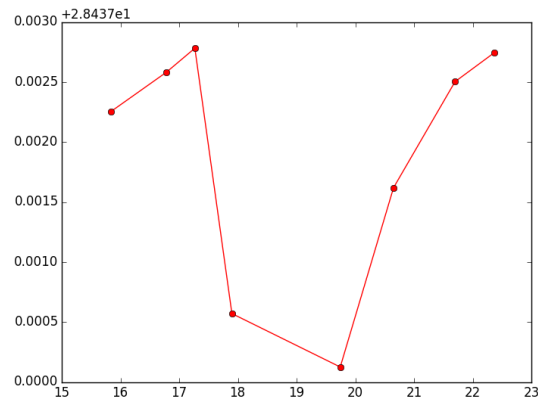


FIGURE 7 – Résidus



# Problème 2 : Étude du phénomène de reptation thermique

## 1 Conditions d'équilibre d'un solide sur un plan incliné

1. Le contact ne se produit qu'au niveau des points  $A$  et  $B$ . À l'équilibre, on écrit que le centre d'inertie ne possède pas d'accélération et, par conséquent, que la somme des forces est nulle :

$$m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{T}_A + \vec{N}_B + \vec{T}_B = \vec{0}$$

On projette sur les deux axes  $Ox$  et  $Oz$  et on obtient :

$$N_A + N_B = mg \cos \theta$$

et :

$$T_A + T_B = mg \sin \theta$$

Il faut aussi écrire qu'il n'y a pas de rotation autour du centre d'inertie. La somme des moments des forces calculée en  $G$  donne :

$$-(T_A + T_B)a - N_B b + N_A b = 0$$

, en tenant compte du sens positif de rotation défini par l'orientation de l'angle  $\theta$ .



Risque 0 : TMC en G



Beaucoup d'erreurs sur les bras de levier et les signes

Cette dernière équation permet d'écrire que :

$$N_A - N_B = q(T_A + T_B)$$

En sommant les deux équations concernant les composantes normales de contact, on arrive à  $2N_A = mg(\cos \theta + q \sin \theta)$ . On en déduit les expressions attendues :

$$N_A = \frac{mg}{2}(\cos \theta + q \sin \theta)$$

puis,

$$N_B = \frac{mg}{2}(\cos \theta - q \sin \theta)$$

Nous constatons comme l'énoncé l'indique qu'il y a 4 inconnues dynamiques correspondant aux 4 composantes des forces de contact et seulement trois équations.

2. Il n'y a pas de glissement si :

$$T_A < fN_A$$

et,

$$T_B < fN_B$$

En sommant, on obtient :

$$T_A + T_B < f(N_A + N_B)$$

d'où la relation :

$$mg \sin \theta < fmg \cos \theta$$

On a donc :

$$\tan \theta < f$$



On ne peut pas écrire de loi de Coulomb pour les deux contacts à la fois

Le contact en  $A$  existe quelle que soit la valeur de l'angle :

$$\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

, par contre  $N_B$  peut s'annuler traduisant la perte du contact. Pour éviter, il faut que :

$$\cos \theta > q \sin \theta$$

On obtient bien alors la condition :

$$\tan \theta < \frac{1}{q}$$

Si on suppose que  $f < \frac{1}{q}$  alors on obtient :

$$\tan \theta < f < \frac{1}{q}$$

ce qui donne automatiquement  $\tan \theta < \frac{1}{q}$ . L'équilibre est donc tout à fait possible dans le cadre de ces conditions.

3. On pose  $T_A = N_A Z_A$  et  $T_B = N_B Z_B$ . On remplace dans l'expression donnant la somme des composantes tangentielles et on obtient, après simplification par  $mg$ , la relation :

$$Z_A(\cos \theta + q \sin \theta) + Z_B(\cos \theta - q \sin \theta) = 2 \sin \theta$$

On divise par  $\cos \theta$  et on obtient :

$$Z_A(1 + q \tan \theta) + Z_B(1 - q \tan \theta) = 2 \tan \theta$$

Cela permet d'identifier avec les coefficients de l'énoncé :

$$A = 1 + q \tan \theta$$

, et :

$$B = 1 - q \tan \theta$$

$A > 0$  est évident puisque  $\tan \theta > 0$  et comme  $q \tan \theta < 1$ , on en déduit aussi que  $B > 0$ .

4. Si  $\tan \theta = \frac{1}{2}$  et  $q = \frac{1}{4}$ , on est dans les conditions d'obtention d'un équilibre que nous avons évoquées avant. L'équation devient :

$$Z_A \frac{9}{8} + Z_B \frac{7}{8} = 1$$

On obtient l'équation de la droite dans le plan proposé :

$$Z_B = \frac{8}{7} - \frac{9}{7} Z_A$$

La droite est représentée à la figure 1. On note que  $Z_A \geq 0$  et  $Z_B \geq 0$ . Sur le graphique proposé, on ne présente que le premier quadrant.

5. Les états d'adhérence sont limités par la valeur du coefficient de frottement  $f$  puisqu'au moment du glissement, on a  $T_A = f N_A$ , c'est-à-dire  $Z_A = f$ . Il en va bien sûr de même pour  $Z_B$ . Les états d'adhérence sont donc nécessairement contenus dans un carré de côté  $f$ . Sur le graphique de la figure (8), on peut donc voir les limites du carré avec  $f = 1$ . Le domaine des états d'adhérence est celui pour lequel les adhérences sont positives et contenues dans le carré de côté  $f$ . Les limites de ce domaine sont marquées par des flèches sur le graphique, cela représente un segment noté  $\mathcal{D}$  par l'énoncé.

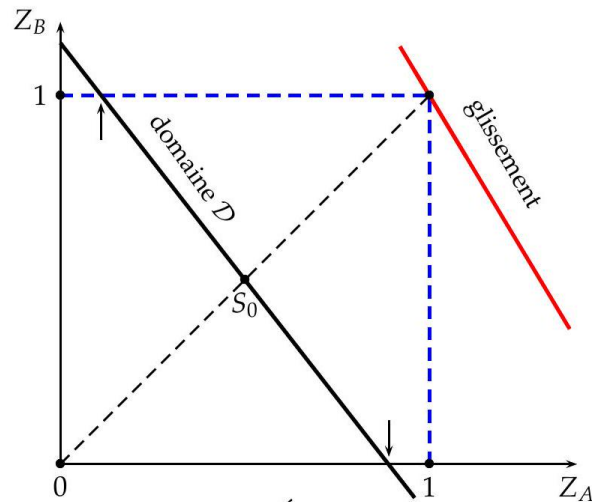


FIGURE 8 – États d'adhérence

6. L'indétermination sur  $T_A$  et  $T_B$  qui se traduit par une indétermination sur  $Z_A$  et  $Z_B$  est perceptible par l'existence d'un domaine étendu pour les adhérences. Si les composantes tangentielles étaient fixées, on aurait un point pour représenter leurs valeurs et non pas un segment.
7. L'équation générale de la droite est :

$$Z_B = \frac{2 \tan \theta}{1 - q \tan \theta} - \frac{1 + q \tan \theta}{1 - q \tan \theta} Z_A$$

S'il y a glissement, on a alors :

$$\tan \theta = f$$

L'équation devient alors :

$$Z_B = \frac{2f}{1 - qf} - \frac{1 + qf}{1 - qf} Z_A$$

Avec les valeurs numériques proposées, on a :

$$Z_B = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} Z_A$$

Cette droite passe par le point  $Z_A = 1$  et  $Z_B = 1$  comme on peut le voir sur le graphique de la figure 1 .

## 2 Reptation thermique

8. On a  $Z_A = Z_B$ , l'équation reliant les deux adhérences devient :

$$Z_A(1 - q \tan \theta) = 2 \tan \theta - (1 + q \tan \theta)Z_A$$

Cette relation permet de voir rapidement que l'on obtient :

$$Z_A = Z_B = \tan \theta$$

Sur le graphique de la figure 1 , cela correspond au point  $S_0$  de coordonnées  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  puisque l'on a  $\tan \theta = \frac{1}{2}$ . Le point correspondant à la situation initiale est situé sur la première diagonale.

9. L'énoncé indique qu'il ne faut pas prendre en compte l'effet de  $T$  sur  $q$ . L'équation de la droite :

$$Z_B = \frac{2 \tan \theta}{1 - q \tan \theta} - \frac{1 + q \tan \theta}{1 - q \tan \theta} Z_A$$

est donc inchangée.

Il faut donc en déduire que si déplacement de  $S$  il y a, il doit forcément se produire en restant sur le segment du domaine  $\mathcal{D}$ . Pour deviner comment s'effectue ce déplacement, on peut comprendre à la lecture de l'énoncé (à la question suivante...) qu'il faut envisager un glissement en  $A$  se produisant avec  $B$  fixé et un glissement en  $B$  à  $A$  fixé à son tour. Ceci s'effectue sous l'effet du phénomène de dilatation. Il est très difficile de prévoir l'évolution du coefficient de frottement  $f$  avec la température car pour deux mêmes matériaux

en contact, on peut tout avoir à savoir une diminution de  $f$  mais aussi une augmentation. Il faut quand même reconnaître que la situation la plus courante sera une diminution de  $f$  lorsque la température augmente. Ici, apparemment, il faut raisonner en considérant  $f$  stable sous l'effet de  $T$ . Par contre, on peut prévoir une dilatation de l'objet posé sur le plan. Avec l'orientation du plan incliné et l'effet du poids, il n'est guère envisageable d'avoir une reptation vers le haut. De plus, l'énoncé nous dit que cela descend. Il n'est pas possible d'envisager une dilatation qui fait monter  $B$  parce que l'effet serait de remonter le plan incliné. Il faut que la dilatation provoque le déplacement de  $A$  (sans faire bouger  $B$ ... Théoriquement pour obtenir le glissement, il faut que l'adhérence arrive à  $f \cdot Z_A$  doit donc augmenter pour atteindre  $f$ . Or, si l'on regarde le graphique de la figure (8), le point le plus élevé de  $Z_A$  dans le domaine  $\mathcal{D}$  n'atteint pas la valeur  $f$ . Il faut donc supposer que  $f$  diminue un peu pour que le glissement en  $A$  se produise et qu'on atteigne le glissement avant que  $Z_B = 0$ . Pour le refroidissement et la contraction du solide, on doit faire remonter le point  $S$  sur le domaine  $\mathcal{D}$ . Quand le point  $S$  atteint le plus haut point de  $\mathcal{D}$ , il y a glissement en  $B$  vers le bas par l'effet de contraction. Il y a donc eu globalement, une descente du centre d'inertie de l'objet dans un mouvement saccadé.

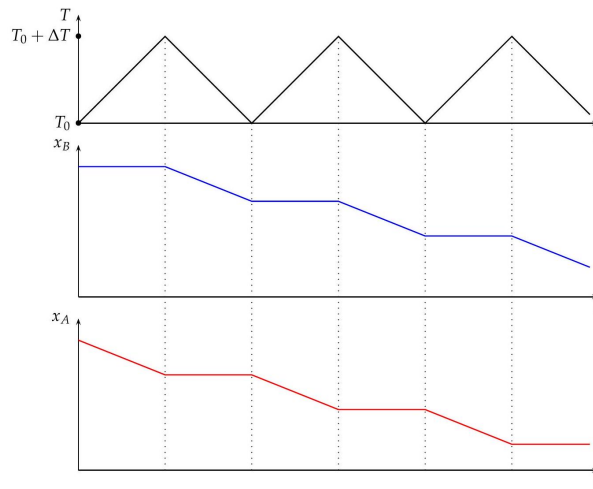


FIGURE 9 – Déplacements des points  $A$  et  $B$  lors de la reptation thermique

10. Nous avons décrit ce qu'il se passait pour les points  $A$  et  $B$  dans la question précédente, on peut en déduire les graphiques demandés, voir la figure (9).
11. On adopte  $q = 0$  comme modèle de la situation d'un objet de très faible épaisseur par rapport à ses deux autres dimensions, l'énoncé cite l'exemple d'une ardoise sur un toit. La relation entre les deux adhérences devient  $Z_A + Z_B = 2 \tan \theta$ . On a aussi égalité des composantes normales  $N_A = N_B = \frac{mg}{2} \cos \theta$ . On écrit la relation de la Dynamique pour le patin  $A$  dont on va négliger l'inertie ( $m_p = 0$ ), on projette donc la somme des forces sur l'axe  $Ox$ . On obtient :

$$T_A - 2ku_A = m_p a_{xp} = 0$$

puisqu'il y a deux ressorts qui exercent la même force sur le patin.

On en déduit que

$$T_A = 2ku_A$$

Or :

$$Z_A = \frac{T_A}{N_A} = \frac{2ku_A}{\frac{mg}{2} \cos \theta}$$

On obtient facilement :

$$Z_A = \frac{4k}{mg \cos \theta} u_A$$

La relation est exactement la même pour  $B$  :

$$Z_B = \frac{4k}{mg \cos \theta} u_B$$

12. Sous l'effet de l'évolution de la température, la longueur de l'objet  $2b$  va changer. C'est elle qui est responsable des évolutions de  $u_A$  et de  $u_B$ . En regardant le schéma, on peut voir que si l'objet se dilate alors le point  $A$  a tendance à se décaler à droite ce qui revient à faire augmenter  $u_A$ . Si  $T > T^*$ , on aura alors  $u_A > u_A^*$ . Pour le point  $B$  c'est le contraire si l'on peut dire. En effet, si l'objet se dilate alors le point  $B$  se décale vers le haut ce qui va réduire  $u_B$ . On aura alors  $u_B < u_B^*$ . La différence  $u_A - u_B$  va donc augmenter, toujours

dans l'hypothèse  $T > T^*$ , on aura  $u_A - u_B > u_A^* - u_B^*$ . Cette augmentation ne peut qu'être une conséquence de la dilatation de la longueur  $2b(T^*)$  par rapport à ce qu'elle va devenir  $2b(T)$ . On a donc :

$$u_A - u_B = (u_A^* - u_B^*) + 2b(T^*) \alpha (T - T^*)$$

On passe facilement à l'évolution de l'écart des adhérences lorsque  $T^* = T_0$  et la distance  $2b(T^*) = 2b(T_0) = 2b_0$  :

$$Z_A(T) - Z_B(T) = \Delta Z^* + \alpha \frac{8kb_0}{mg \cos \theta} (T - T_0)$$

On comprend l'intérêt de la notation  $\beta$  proposée par l'énoncé.

13. N'oublions pas que  $q = 0$  et que l'équation des lieux d'adhérence est :

$$Z_B = 2 \tan \theta - Z_A$$

Sur le graphique de la figure (10), cela correspond à la droite :

$$Z_B = 2 \tan \theta - Z_A = 1 - Z_A$$

avec toujours les mêmes valeurs fournies par l'énoncé.

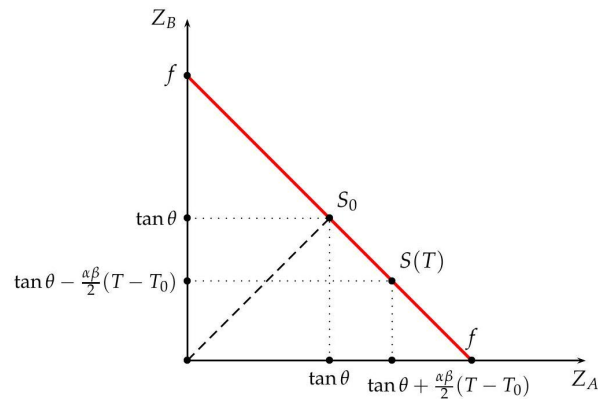


FIGURE 10 – Évolution des états d'adhérence lors de l'évolution de la température de  $T_0$  à  $T > T_0$

On part toujours de l'état initial matérialisé par :

$$S_0 : Z_A^* = Z_B^* = \tan \theta$$

et donc :

$$\Delta Z^* = 0$$

On augmente la température, on va avoir :

$$Z_A - Z_B = \alpha \beta (T - T_0)$$

Les deux équations que l'on possède sont donc :

$$Z_A + Z_B = 2 \tan \theta$$

et :

$$Z_A - Z_B = \alpha \beta (T - T_0)$$

On peut déterminer sans équivoque les adhérences :

$$Z_A = \tan \theta + \frac{\alpha \beta}{2} (T - T_0)$$

et :

$$Z_B = \tan \theta - \frac{\alpha \beta}{2} (T - T_0)$$

Lorsque la température augmente, on part de  $S_0$  pour descendre le domaine  $\mathcal{D}$  des équilibres. On voit bien comment la température est le paramètre de la valeur des adhérences. On voit sur ce modèle que l'augmentation de  $T$  va provoquer d'abord le glissement en A puisque  $Z_A$  augmente et que  $Z_B$  diminue. C'est  $Z_A = f$  qui va fixer la condition pour obtenir du glissement.

14. Comme nous l'avons vu, on a glissement - toujours en élevant la température - si  $Z_A = f$ . Avec l'expression de  $Z_A$ , on trouve que la variation de la température doit vérifier :

$$f = \tan \theta + \frac{\alpha\beta}{2} (T_A - T)$$

Au contraire si l'on diminue la température pour avoir  $T_B < T_0$ , il y aura glissement en  $B$  si on a la relation :

$$f = \tan \theta - \frac{\alpha\beta}{2} (T_B - T_0)$$

En sommant les deux équations, on obtient :

$$2f = 2 \tan \theta + \frac{\alpha\beta}{2} (T_A - T_B)$$

L'amplitude de température minimale qui permet d'obtenir le phénomène de reptation est donc :

$$\Delta T = \frac{4(f - \tan \theta)}{\alpha\beta}$$

15. On peut voir que le phénomène de reptation nécessite un écart de température d'autant plus élevé que le coefficient de frottement est élevé, mais ce qui est décisif est l'écart à la condition de glissement  $f - \tan \theta$ . Plus on est loin du glissement, plus il faudra de dilatation et donc une température plus élevée par rapport à  $T_0$ . On peut aussi voir que plus  $\alpha$  est élevé, moins il faudra monter en température pour obtenir le phénomène.
16. Au cours d'une montée de température de  $\Delta T$  suivie d'une baisse de  $\Delta T$ , on provoque un déplacement global du centre d'inertie du système de  $2b_0\alpha\Delta T$  car au départ lors de la montée de température, c'est le point  $A$  qui descend de  $2b_0\alpha\Delta T$ . Ensuite, c'est  $B$  qui va descendre lors de la baisse de température de  $\Delta T$ . Par conséquent, lorsque le cycle est terminé, les deux points sont descendus de la même quantité. On a donc :

$$\Delta x_{1,cycle} = -2b_0\alpha\Delta T$$

On trouve numériquement que, toujours sur un cycle, l'objet descend de  $10^{-1} \times 5 \times 10^{-5} = 5\mu\text{m}$ . Pour atteindre une valeur de 1 mm de descente, cela représente 200 cycles. Il faut donc  $200 \times 5$  minutes. On trouve 16 heures 40 minutes.

## Exercice de rattrapage

1. ✘ La distribution des molécules dans la centrifugeuse, pour un système thermalisé, est régie par le facteur de Boltzmann, dans lequel l'énergie des molécules est l'énergie potentielle centrifuge des molécules due à la rotation de la centrifugeuse (fonction de  $r$ ) :

$$\frac{n_1(r)}{n_1(0)} = \exp \frac{-E_{p1}(r)}{k_B T}$$

$$\frac{n_2(r)}{n_2(0)} = \exp \frac{-E_{p2}(r)}{k_B T}$$



Ici la pesanteur n'intervient pas : c'est l'énergie potentielle centrifuge qui permet de trier les particules

- ✘ L'énergie potentielle centrifuge d'une molécule de masse  $m$  est liée à la force d'inertie d'entraînement :

$$dE_p = -\vec{F}_{ie} \cdot d\vec{r}$$

Avec :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\Omega^2 r \vec{e}_r$$

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

D'où :

$$dE_p = -m\Omega^2 r dr \Rightarrow E_p = -\frac{1}{2} m \Omega^2 r^2$$

Soit :

$$E_{p1} = -\frac{1}{2} m_1 \Omega^2 r^2$$

$$E_{p2} = -\frac{1}{2} m_2 \Omega^2 r^2$$

où :  $m_1 = 235 \text{ uma}$  et  $m_2 = 238 \text{ uma}$

- ✘ On en déduit :

$$\frac{n_1(r)}{n_1(0)} = \exp \frac{m_1 \Omega^2 r^2}{2k_B T}$$

$$\frac{n_2(r)}{n_2(0)} = \exp \frac{m_2 \Omega^2 r^2}{2k_B T}$$

- ✘ Commentaire : plus la masse d'une molécule est importante, plus elle a statistiquement de chance de se retrouver en périphérie de la centrifugeuse.

2. ✘ il suffit d'intégrer entre 0 et  $r$  :

$$N_1(r) = \int_{r=0}^r n_1(r) 2\pi r H dr = 2\pi H \frac{k_B T}{m_1 \Omega^2} n_1(0) \left( \exp \frac{m_1 \Omega^2 r^2}{2k_B T} - 1 \right)$$

$$N_2(r) = \int_{r=0}^r n_2(r) 2\pi r H dr = 2\pi H \frac{k_B T}{m_2 \Omega^2} n_2(0) \left( \exp \frac{m_2 \Omega^2 r^2}{2k_B T} - 1 \right)$$

3. ✘ On note :

- $N$  le nombre de molécules introduites dans la centrifugeuse,
- $N_{1,0}$  et  $N_{2,0}$  le nombre de molécules  $^{235}\text{UF}_6$  et  $^{238}\text{UF}_6$  introduites dans la centrifugeuse,
- $N(r_0)$  le nombre de molécules dans le cylindre de rayon  $r_0$
- $N_1(r_0)$  et  $N_2(r_0)$  le nombre de molécules  $^{235}\text{UF}_6$  et  $^{238}\text{UF}_6$  dans ce cylindre

✘ Par définition :

$$\alpha = \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}}$$

Avec :

$$x_{1,0} = \frac{N_{1,0}}{N} = \frac{N_1(a)}{N} = 0.72\%$$

et,

$$x_{2,0} = \frac{N_{2,0}}{N} = \frac{N_2(a)}{N} = 99.3\%$$

Et donc :

$$\alpha = \frac{N_1(a)}{N_2(a)} = 7.25 \times 10^{-3}$$

✘ De même :

$$\alpha' = \frac{x_1}{x_2}$$

Avec :

$$x_1 = \frac{N_1(r_0)}{N(r_0)}$$

$$x_2 = \frac{N_2(r_0)}{N(r_0)}$$

D'où :

$$\alpha' = \frac{N_1(r_0)}{N_2(r_0)}$$

✘ On en déduit :

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{N_1(r_0)}{N_2(r_0)} \times \frac{N_2(a)}{N_1(a)} = \frac{\left(\exp \frac{m_1 \Omega^2 r_0^2}{2k_B T} - 1\right) \left(\exp \frac{m_2 \Omega^2 a^2}{2k_B T} - 1\right)}{\left(\exp \frac{m_1 \Omega^2 a^2}{2k_B T} - 1\right) \left(\exp \frac{m_2 \Omega^2 r_0^2}{2k_B T} - 1\right)}$$

✘ En tenant compte des odg, on obtient :

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{N_1(r_0)}{N_2(r_0)} \times \frac{N_2(a)}{N_1(a)} = \frac{\left(\exp \frac{m_1 \Omega^2 r_0^2}{2k_B T}\right) \left(\exp \frac{m_2 \Omega^2 a^2}{2k_B T}\right)}{\left(\exp \frac{m_1 \Omega^2 a^2}{2k_B T}\right) \left(\exp \frac{m_2 \Omega^2 r_0^2}{2k_B T}\right)} = \exp \frac{(m_2 - m_1)(a^2 - r_0^2)\Omega^2}{2k_B T}$$

✘ On pose alors :

$$\varepsilon = \frac{(m_2 - m_1)(a^2 - r_0^2)\Omega^2}{2k_B T} \ll 1$$

et on obtient :

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \varepsilon$$

✘ AN :  $\varepsilon = 1.4 \times 10^{-3}$

✘ En passant du cylindre  $n - 1$  au cylindre  $n$ , on a :

$$\alpha_n = (1 + \varepsilon)\alpha_{n-1} = (1 + \varepsilon)^n \alpha$$

D'où :

$$n = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{\alpha_n}{\alpha} \right)$$

✘ AN :  $n = 1.2 \times 10^3$

✘ Commentaire : Cohérent avec la photo