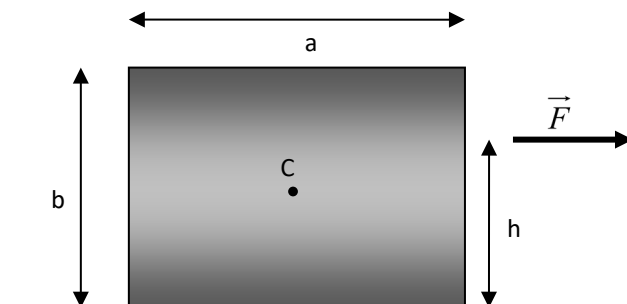


EXERCICE 1 : Basculement ou glissement d'un bloc

Un solide homogène parallélépipédique de masse m repose sur le sol. On appelle C son barycentre. A l'aide d'une corde une personne exerce une force $\vec{F}$ horizontale dont le point d'application est situé à la hauteur h . A cause des frottements caractérisés par le coefficient f , le solide reste immobile.

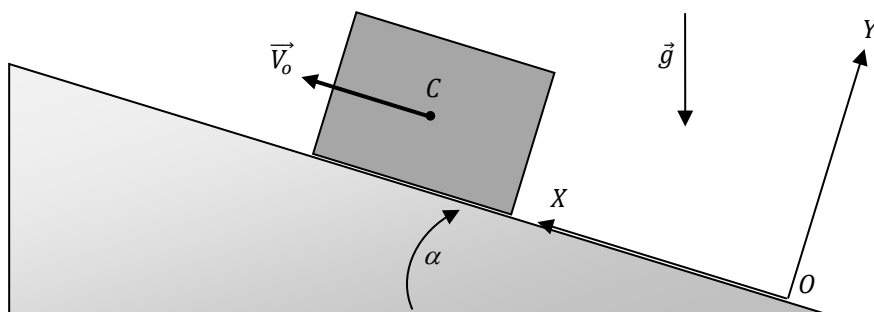


1. Déterminer la relation entre F , f , m et g tant que le bloc ne bouge pas.
2. Montrer que les actions mécaniques de contact entre le sol et le solide se réduisent en une unique résultante $\vec{R}$ s'appliquant en un point I situé sur la surface de contact du sol et du solide (on se placera à l'équilibre du bloc)
3. A quelle condition du F le bloc bascule-t-il ? glisse-t-il ?

EXERCICE 2 : Pavé sur un plan incliné

On étudie un solide homogène ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de masse m et de centre d'inertie C . Il est lancé le long d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On utilise un système d'axes (O, X, Y, Z) défini à partir du plan afin de simplifier les projections. On confond les coefficients de frottements statique et dynamique et on les note f .

Le solide est soumis au champ de pesanteur et le référentiel du plan incliné est galiléen.

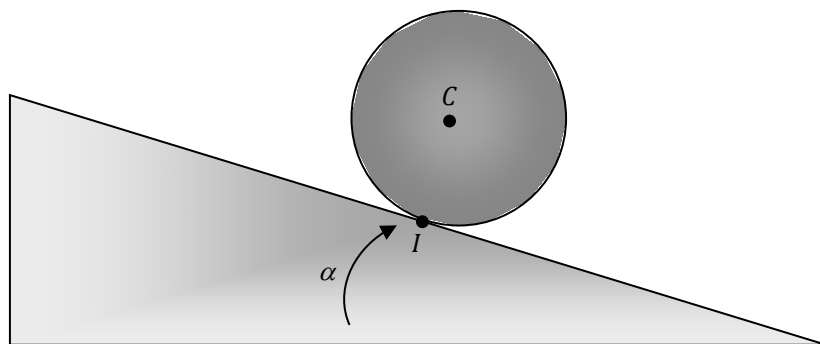


1. Le solide est lancé à l'instant $t = 0$ à partir de l'abscisse $X = L_0$ avec une vitesse initiale $V_0 \vec{u}_X$ orientée vers le haut comme indiqué sur le schéma (représentant le système à l'instant initial). Exprimer la distance parcourue avant que sa vitesse s'annule.
2. A quelle condition sur f et α le solide s'arrête-t-il définitivement ?
3. Cette condition n'étant pas respectée, on observe la phase de retour du solide vers sa position initiale. A quelle vitesse va-t-il repasser par celle-ci ? Comparer cette vitesse avec celle qu'aurait eu le solide en l'absence de frottement.

EXERCICE 3 : Cylindre sur un plan incliné

Un cylindre homogène de masse m et de rayon R est abandonné sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.

Les frottements de glissement entre le plan incliné et le cylindre sont caractérisés par le coefficient de frottement f .



1. Déterminer l'accélération du centre d'inertie du cylindre en fonction de g et α dans le cas d'un glissement et d'un non glissement.
2. Quelle est la valeur minimum de α permettant au cylindre de glisser ?

Rappels :

L'énergie cinétique du cylindre est égale à :

$$E_c = \frac{1}{2} m V(C)^2 + E_c^*$$

Où E_c^* est l'énergie cinétique (de rotation) du cylindre dans le référentiel barycentrique du cylindre.

- Tant que le cylindre ne glisse pas, on peut appliquer le théorème du moment cinétique au cylindre sur l'axe $(\Delta)_I$ considéré comme un axe de direction fixe.
- Quelle que soit la situation on peut appliquer le théorème du moment cinétique sur l'axe $(\Delta)_C$ sans ajouter les forces d'inertie.
- Le moment d'inertie d'un cylindre de masse m et de rayon R autour de son axe de rotation : $J = \frac{1}{2} m R^2$

EXERCICE 4 : Mesure d'un coefficient de frottement

Une règle de longueur $l = 30$ cm repose sur une longueur $l_0 = 10$ cm sur une table. Elle est lâchée sans vitesse initiale. Elle tourne d'un angle de 30° avant de commencer à glisser.

Déterminer le coefficient de frottement entre la table et la règle.

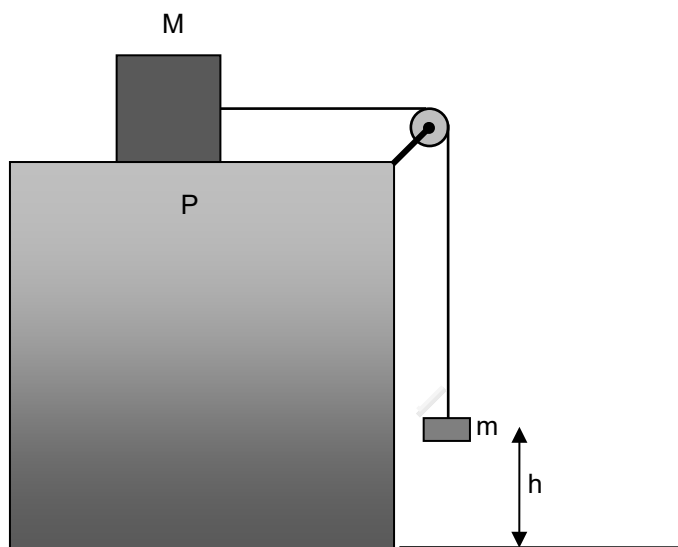
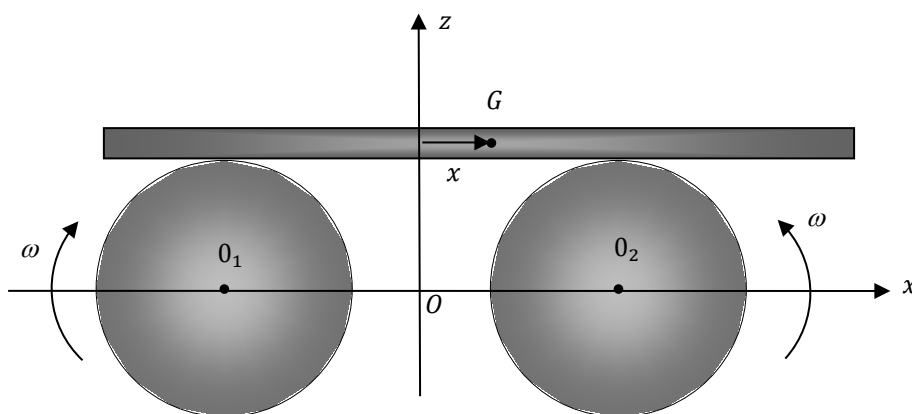
EXERCICE 5 : Détermination d'un coefficient de frottement

Un bloc M de masse M repose sur le plan P avec un coefficient de frottement de glissement f .

Le fil liant M à un bloc m de masse m est inextensible et ne frotte pas sur la gorge de la poulie, elle-même supposée de masse négligeable.

Le système est abandonné sans vitesse initiale, m étant à une hauteur h du sol.

1. Montrer que le mouvement de M peut se décomposer en deux phases distinctes. Comment évolue sa vitesse au cours du mouvement ? Calculer la vitesse maximale atteinte par M.
2. Montrer que ce dispositif permet de mesurer le coefficient de frottement f .
3. Reprendre la question en supposant à présent la poulie de rayon r , et de moment d'inertie J par rapport à son axe.

**EXERCICE 6 : Machine de Timochenko**

On fait tourner deux cylindres de rayon b en sens inverse à la vitesse angulaire ω constante très élevée. A l'instant $t = 0$, on pose une planche homogène de masse m et d'épaisseur négligeable sur les cylindres, son centre d'inertie étant dans le plan médiateur de O_1 et O_2 . On donne les coefficients de frottement de glissement f_1 et f_2 sur les deux cylindres avec $f_1 > f_2$.

On constate alors que la planche oscille de manière sinusoïdale sans décoller.

On repère alors la position de G par son abscisse $x(t)$.

1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ est celle d'un oscillateur harmonique dont on déterminera la pulsation propre ω_0 et la position d'équilibre x_0 .
2. A quelle condition la planche oscille-t-elle sans décoller ? Peut-on changer le sens de rotation des cylindres ?

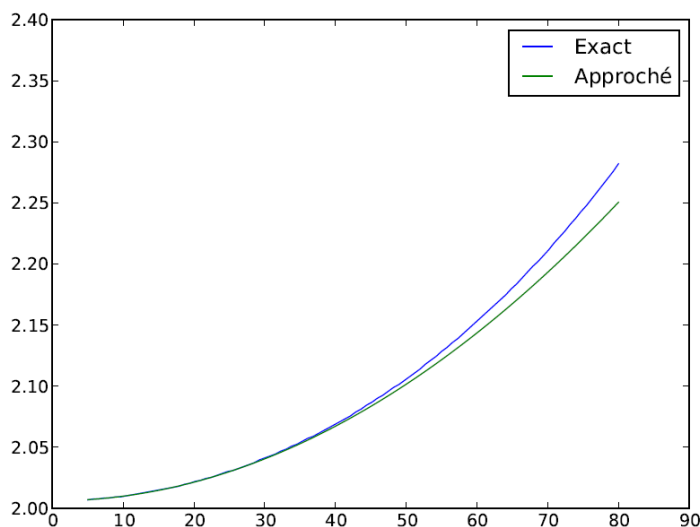
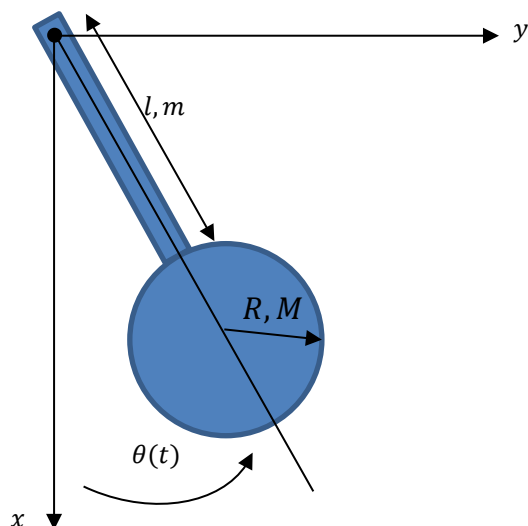
EXERCICE 8

On considère le pendule pesant représenté ci-dessous :

1. Dans un premier temps, on étudie les mouvements de pendule dans le cas de petits angles ($\theta \ll 1$).
 - a. Par une approche énergétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ .

- b. Résoudre cette équation différentielle dans le cas où, initialement, le pendule est écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 et est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la période T_0 d'oscillation du pendule. Commenter.
2. On utilise les mêmes conditions initiales précédentes, mais on considère cette fois le θ_0 n'est plus petit devant 1.
- Déterminer l'équation différentielle reliant $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$.
 - Tracer le portrait de phase du pendule pour différentes valeurs de θ_0 .
 - Moyennant des approximations que l'on justifiera, montrer que la période des oscillations s'écrit :

$$T(\theta_0) = T_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$



La figure ci-dessous représente l'évolution de $T(\theta_0)$ obtenue sans approximation et obtenue à l'aide du développement précédent. Commenter.

3. Le pendule étant initialement au repos, on le frappe de façon à lui communiquer instantanément une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.
- Déterminer la nouvelle équation différentielle reliant $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$.
 - Tracer le portrait de phase du pendule pour différentes valeurs de θ_0 . On envisagera le cas de trajectoires fermées et ouvertes.
 - Par une approche qualitative, prévoir comment évoluerait ce portrait de phase si l'on tenait compte des frottements (fluides) ?

Exercice 9 : Le destin de Phobos

Phobos est l'un des deux satellites naturels de Mars. On travaille dans le référentiel « marsocentrique », supposé galiléen, et on néglige l'influence de tout autre astre. Mars tourne sur elle-même autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire Ω_M (moment d'inertie J_M) ; Phobos décrit une orbite quasi circulaire de rayon r et d'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω_p et tourne sur lui-même à $\Omega_p \approx \omega_p$ (moment d'inertie J_p). On observe que le rayon de l'orbite de Phobos diminue d'environ 1,8 cm par an.

A. Mouvement orbital de Phobos

- 1) Énoncer les trois lois de Kepler pour un satellite de Mars. Établir la deuxième loi, puis la troisième dans le cas d'une orbite circulaire. L'hypothèse d'une orbite circulaire est-elle justifiée ici ?

- 2) En déduire la masse M de Mars et commenter sa valeur. Calculer la masse volumique moyenne μ_M de Mars.

B. Évolution de l'orbite

Rappel : théorèmes de Kœnig

Pour un système de masse totale M_s , de centre d'inertie G , étudié dans un référentiel (R) de point fixe O ; on note (R^*) le référentiel barycentrique, en translation par rapport à (R) (vecteurs en gras) :

$$E_c = \frac{1}{2} M_s v_G^2 + E_c^* \quad \text{et} \quad L_O = \mathbf{OG} \wedge M_s \mathbf{v}_G + L^*$$

où E_c^* et L^* sont l'énergie cinétique et le moment cinétique du système dans (R^*) . Pour un solide en rotation dans (R^*) à la vitesse angulaire Ω autour d'un axe Δ passant par G (moment d'inertie J_Δ) : $E_c^* = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$ et $L_\Delta^* = J_\Delta \Omega$.

- 3) Écrire l'énergie mécanique E du système {Mars, Phobos} comme une somme de quatre termes. Montrer, par un ordre de grandeur, que l'un d'eux est négligeable, puis exprimer E en fonction de J_M , Ω_M , M , m et r .
- 4) Écrire de même la projection L sur (Oz) du moment cinétique total du système comme une somme de trois termes, justifier qu'un terme est négligeable et exprimer L en fonction de J_M , Ω_M , M , m et r .
- 5) On admet que L est conservé et que E diminue au cours du temps. Relier dE/dt à $d\Omega_M/dt$ et en déduire l'évolution de la rotation propre de Mars, puis celle du rayon r . Quelle est l'origine physique de la diminution de E ?

C. Stabilité de Phobos

Phobos est assimilé à une boule homogène de rayon R_{ph} en rotation synchrone : le centre de Mars, le centre de Phobos et un point matériel P de masse $m' \ll m$ posé à sa surface, du côté de Mars, restent constamment alignés.

- 6) Définir un référentiel adapté à l'étude de l'équilibre de P et faire le bilan des forces qui s'y exercent. Déterminer, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en R_{ph}/r , la force de contact exercée par Phobos sur P .
- 7) Montrer que cet équilibre est rompu lorsque r devient inférieur à une distance critique r_c , à exprimer en fonction de μ_{ph} , μ_M et R_M . Calculer r_c , estimer le temps restant avant que Phobos ne l'atteigne et commenter.

Données

<u>Phobos</u>		<u>Mars</u>	
Masse	$m = 1,07 \cdot 10^{16} \text{ kg}$	Rayon moyen	$R_M = 3\,390 \text{ km}$
Masse volumique moyenne	$\mu_{ph} = 1\,850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	Période de rotation propre	$T_M = 24 \text{ h } 37 \text{ min}$
Dimensions	$\approx 27 \times 22 \times 18 \text{ km}$		
Rayon de l'orbite	$r = 9\,377 \text{ km}$		
Période de révolution	$T_p = 7 \text{ h } 39 \text{ min}$		
Excentricité de l'orbite	0,0151		
Variation du rayon orbital	$-1,8 \text{ cm/an}$		

Exercice 10 :

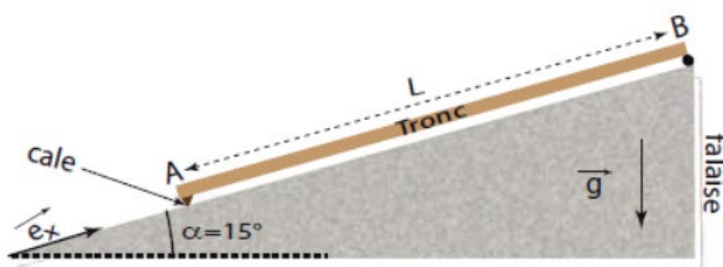
(Oral)

1. (a) Enoncer le théorème du moment cinétique scalaire appliqué à un solide en projection sur un axe immobile dans un référentiel galiléen.
- (b) Rappeler la loi de Coulomb pour le frottement solide. On confondra les coefficients de frottements statique et dynamique. Une force de frottement s'oppose-t-elle toujours au mouvement ? Si oui, expliquer pourquoi, sinon, citer un exemple.

Un tronc d'arbre de longueur $L=20$ m et de masse $m=2000$ kg, modélisé par une tige homogène, est couché en haut d'une pente située au bord d'une falaise, du haut de laquelle on souhaite le faire basculer (cf. schéma).

Dans un premier temps, on prépare le tronc en intercalant :

- sous son extrémité A, une cale quasi-ponctuelle, solidaire du tronc, pouvant glisser sur le sol avec un coefficient de frottement f .
- sous son extrémité B, un point de contact sans frottement significatif.



On veut que le tronc ainsi préparé soit à l'équilibre. Il est ensuite mis en mouvement par l'explosion d'une charge de poudre placée en A, ce qui a pour effet de lui communiquer «quasi-instantanément» une vitesse $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$.

2. Pour quelle distance parcourue le tronc basculera-t-il ?
3. Comment choisir f pour que le tronc reste à l'équilibre jusqu'à son lancement ?
4. Chaque 1kg de poudre brûlée libère 4000 kJ. Quelle quantité de poudre faut-il au minimum employer pour que le tronc bascule de la falaise ?

Slip-Stick : Extrait sujet de concours (X 2007)

Dans cette partie, on considère le mouvement d'une masse m posée sur un tapis roulant se déplaçant à une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, $v_0 > 0$, par rapport au référentiel du laboratoire. La masse est soumise à une force de rappel colinéaire au mouvement du tapis roulant et exercée par un ressort de raideur k . Les coefficients de frottement statique et cinétique entre la masse et le tapis sont notés respectivement μ_S et μ_C . On repérera la position de la masse par son abscisse x dans le référentiel du laboratoire, l'origine correspondant à l'absence de déformation du ressort.

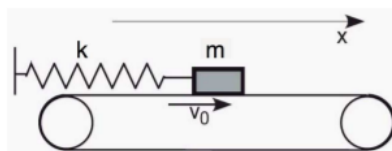


Figure 2

II.1. Montrer qu'il existe une position d'équilibre dont on déterminera l'abscisse x_{eq} en fonction de μ_C , g et $\omega^2 = k/m$.

II.2. On pose $X = x - x_{eq}$. Expliciter l'équation du mouvement de la masse ; on distinguera les situations $\dot{X} < v_0$ et $\dot{X} > v_0$.

Montrer qu'une phase de mouvement avec collage, pour laquelle $\dot{X} = v_0$, peut s'établir si X appartient à l'intervalle $[X_1, X_2]$ dont on déterminera les bornes. À quelle condition peut-elle se maintenir ?

II.3. La masse est posée sur le tapis sans vitesse initiale à l'abscisse X_0 , avec $X_0 > 0$. Déterminer $X(t)$ pour le début du mouvement. Montrer que ce type de mouvement se maintient si X_0 est inférieur à une valeur X_m que l'on déterminera.

II.4. On utilise X_m comme longueur caractéristique. On pose $q_{eq} = x_{eq}/X_m$, $q_1 = X_1/X_m$ et $q_2 = X_2/X_m$. Exprimer q_1 et q_2 en fonction de q_{eq} et du rapport $\gamma = \mu_S/\mu_C$.

II.5. On pose $q(\theta) = X/X_m$ avec $\theta = \omega t$. Exprimer $q' \doteq \frac{dq}{d\theta}$ en fonction de $\dot{X}$ et v_0 . Transcrire pour $q(\theta)$ les équations différentielles du mouvement obtenues en **II.2**. Dans le plan $(q; q')$ tracer le portrait de phase correspondant au mouvement de conditions initiales $(0,5; 0)$. Quel est alors le mouvement ?

II.6. On donne $q_{eq} = 0,5$ et $\gamma = 2$. Préciser dans le plan $(q; q')$ les points représentatifs des états avec collage.

II.7. En procédant par étapes, tracer le portrait de phase correspondant aux conditions initiales $(2; 0)$. Préciser ce qui se passe lorsque le point représentatif de l'état du système franchit la ligne $q' = 1$ pour la première fois, puis la seconde fois.

Montrer que le mouvement devient périodique et préciser le cycle correspondant dans le plan de phase $(q; q')$. Ce cycle dépend-il des conditions initiales ?

II.8. Dans le cas général, calculer la période T_C de ce cycle avec collage en fonction de ω et q_2 .

L'étude précédente peut servir de modèle au fonctionnement d'un patin de frein s'appuyant sur une roue en rotation, système pour lequel on désire savoir si l'alternance éventuelle de collage et de glissement nuit à son efficacité.

II.9. Calculer le travail W des forces de frottement pendant un cycle du mouvement en distinguant les deux types de cycle (avec ou sans phase de collage). En déduire, pour chacun d'eux, la puissance moyenne correspondante et comparer les résultats. Quelle conclusion en tirez-vous ? Pourquoi cherche-t-on à éviter le collage ?