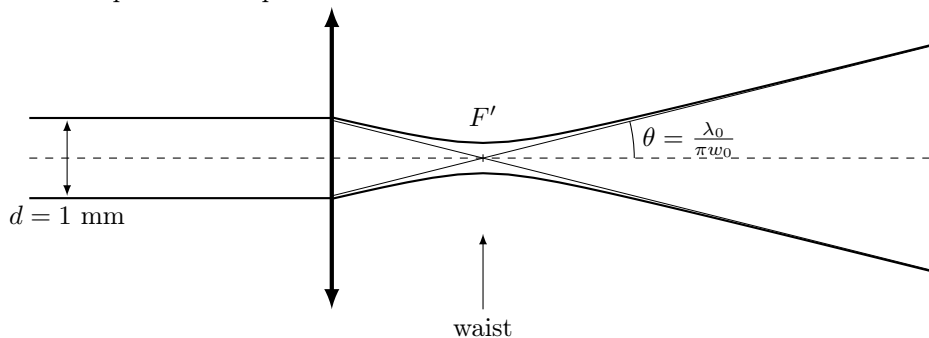


I - Étude de la source laser.

1. Énergie des photons émis par le laser : $E = 1,45 - 0,2 = 1,25$ eV. D'où une longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{hc}{E} = 1.10^{-6}$ m. On est dans l'infrarouge (proche). **Un laser Nd:YAG, c'est en fait 1064 nm.**
2. On a $(E_1(t) + E_2(t))^2 = E_1^2 \sin^2(\omega_1 t) + E_2^2 \sin^2(\omega_2 t) + 2E_1 E_2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)$. Après linéarisation, ce signal contient les pulsations 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ et $|\omega_1 - \omega_2|$.
 - Si les deux ondes incidentes arrivant sur le cristal sont toutes deux issues du laser (dont on note ω_0 la pulsation), on obtiendra donc les pulsations 0 et $2\omega_0$.
 - Si les deux ondes sont déjà issues du cristal (et contiennent donc les pulsations 0 et $2\omega_0$), on obtiendra les pulsations 0, $2\omega_0$, et $4\omega_0$.
 - Si une onde provient du laser et l'autre est issue du cristal, on obtiendra les pulsations 0, ω_0 , $2\omega_0$, $3\omega_0$ et $4\omega_0$.
 Au final, il semble donc que l'on puisse obtenir les pulsations 0, ω_0 , $2\omega_0$, $3\omega_0$ et $4\omega_0$, c'est-à-dire les longueurs d'onde $\lambda_0 = 1000$ nm, $\frac{\lambda_0}{2} = 500$ nm, $\frac{\lambda_0}{3} = 333$ nm et $\frac{\lambda_0}{4} = 250$ nm. **Cette question est totalement déconnectée du reste du problème puisque (voir la suite) on utilisera la longueur d'onde $\lambda_0 = 1$ μ m.**
3. **Il est dommage que l'on ne puisse pas lire l'échelle (logarithmique) des abscisses.** Si on se fixe (arbitrairement) un critère de "transparence" en dessous d'une absorbance de 10 cm^{-1} , alors on peut évaluer que la fenêtre de transparence biologique va environ de 700 nm à 1500 nm. Seule la longueur d'onde $\lambda_0 = 1$ μ m directement issue du laser va alors pouvoir être utilisée pour faire de l'imagerie en profondeur.
4. Première partie de la question : déterminer la surface de la tache focale.



La formule "exacte" $\theta = \frac{\lambda_0}{\pi w_0}$ ne nous semble pas à connaître.

Le waist du faisceau émergent est situé au niveau du foyer image de l'objectif; la tache focale a un rayon égal à w_0 et donc une surface S égale à πw_0^2 .

Or on a $\tan \theta = \frac{d}{2f'} = 5.10^{-2} \ll 1$. On peut donc considérer que $\theta = \frac{\lambda_0}{\pi w_0} \approx \frac{d}{2f'}$.

On aboutit alors à $S = \frac{4\lambda_0^2 f'^2}{\pi d^2} = \frac{4}{\pi} . 10^{-10} \approx 1.10^{-10} \text{ m}^2$.

Pour le calcul de la puissance crête maximale du laser, on va faire l'approximation grossière que l'intensité lumineuse est uniforme sur la surface S , et l'hypothèse que celle-ci est située à la surface de la peau (l'énoncé ne le dit pas).

Par ailleurs la puissance moyenne (temporelle) vaut $P_{\text{crête}} \frac{\tau_p}{\frac{1}{f_{\text{rep}}}} = P_{\text{crête}} \tau_p f_{\text{rep}}$. On veut donc

que $\frac{P_{\text{crête}} \tau_p f_{\text{rep}}}{S} \leq \Phi$, soit $P_{\text{crête}} \leq \frac{\Phi S}{\tau_p f_{\text{rep}}} = \frac{80}{\pi} \approx 3.10^1 \text{ W}$.

II - Génération photo-acoustique.

5. L'énergie optique va être tout d'abord convertie en énergie interne, puis en "chaleur" (le mot figure dans l'énoncé).

Les phénomènes d'interaction lumière-matière sont : l'absorption, l'émission spontanée (qui intervient par exemple dans les lampes à vapeur atomiques), l'émission stimulée (qui intervient dans les lasers).

6. Si on considère la figure 2, on voit que, à une longueur d'onde λ_0 de 1 μm , qui est celle utilisée, l'absorbance de l'eau est de l'ordre de $0,5 \text{ cm}^{-1}$. Certes l'onde concernée ne va pas pouvoir pénétrer très profondément dans le corps mais, si on se situe à des distances de l'ordre de $a = 100 \text{ nm}$, ce qui est apparemment le cas par la suite, on pourra effectivement considérer que l'absorption par l'eau est négligeable.

L'établissement de l'équation de la diffusion thermique est une question de cours (bilan local d'énergie interne), qui mène à $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \nabla^2 T$.

On se place par la suite en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) ; le problème est invariant par rotation autour de O (le centre de la nanoparticule d'or) et on aboutit donc à l'équation suivante pour $T(r, t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) \quad \text{pour } r > a \quad (1)$$

7. Ce n'est plus tout à fait une question de cours, puisque le programme se limite au cas "en l'absence de sources internes". On arrive maintenant à

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa_g}{\rho_g c_{p_g}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{P_V(r, t)}{\rho_g c_{p_g}} \quad \text{pour } r \leq a \quad (2)$$

8. Les diffusivités thermiques $\frac{\kappa}{\rho c_p}$ et $\frac{\kappa_g}{\rho_g c_{p_g}}$ ont pour dimension $\text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}$. À partir de là on voit que le temps caractéristique d'évolution de la température au sein de la nanoparticule d'or sera $\tau_g = \frac{a^2}{\frac{\kappa_g}{\rho_g c_{p_g}}} = \frac{a^2 \rho_g c_{p_g}}{\kappa_g}$ et, de manière similaire pour l'eau on aura $\tau_e = \frac{a^2 \rho_c c_p}{\kappa}$ (on se

place dans l'eau à une distance a de la nanoparticule).

On arrive ainsi à $\tau_g \approx 8.10^{-11} \text{ s}$, $\tau_e \approx 8.10^{-8} \text{ s}$. On rappelle que la durée d'une impulsion laser est $\tau_p = 5.10^{-9} \text{ s}$ (et que les impulsions sont séparées de $\frac{1}{f_{\text{rep}}} = 1.10^{-3} \text{ s}$).

On a donc $\tau_g \ll \tau_p \ll \tau_e \ll \frac{1}{f_{\text{rep}}}$.

On peut alors proposer le scénario suivant : on va pouvoir considérer à tout instant que la température de la nanoparticule sera quasi uniforme, de notation $T_g(t)$ suggérée par l'énoncé (ceci car τ_g , temps caractéristique de la diffusion thermique au sein de la nanoparticule, est très inférieur à toutes les autres durées). Lors de l'impulsion, de durée τ_p , la nanoparticule va donc s'échauffer, de manière uniforme, sans que la température de l'eau ait le temps d'évoluer de manière notable (puisque $\tau_e \gg \tau_p$). Puis, après l'impulsion, la nanoparticule va transférer l'énergie accumulée à l'eau environnante, par diffusion. Ce transfert aura une durée typique de τ_e et sera donc largement terminé lors de l'impulsion suivante.

9. On se limite ici à la nanoparticule ($r \leq a$). On suppose de plus conformément à l'énoncé que P_V ne dépend que de t et pas de r . On intègre alors l'équation 2 sur le volume de la nanoparticule :

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial T}{\partial t} dV &= \frac{\kappa_g}{\rho_g c_{p_g}} \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) dV + \frac{P_V(t)}{\rho_g c_{p_g}} V \\ \frac{d}{dt} \iiint T(r, t) dV &= \frac{\kappa_g}{\rho_g c_{p_g}} \iiint \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) dV + \frac{P_V(t)}{\rho_g c_{p_g}} V \\ V \frac{dT_g}{dt} &= \frac{\kappa_g}{\rho_g c_{p_g}} \int_0^a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) 4\pi r^2 dr + \frac{P_V(t)}{\rho_g c_{p_g}} V \end{aligned}$$

On divise par $V = \frac{4}{3}\pi a^3$:

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{3\kappa_g}{\rho_g c_{p_g} a^3} \int_0^a \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr + \frac{P_V(t)}{\rho_g c_{p_g}}$$

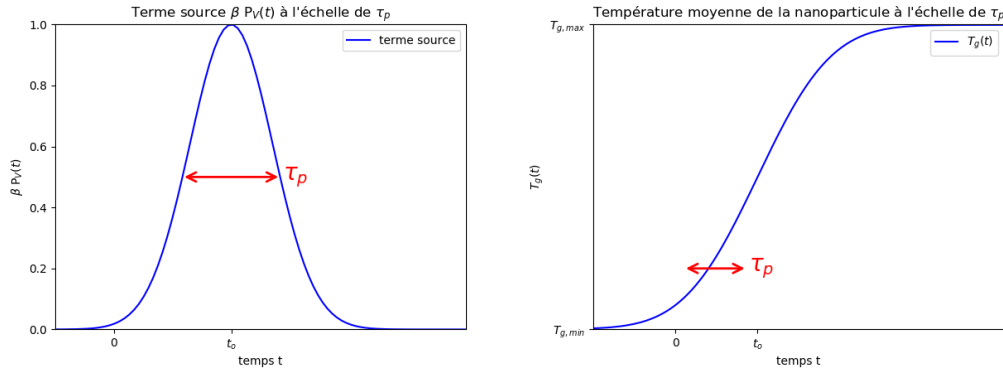
D'où au final

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{3\kappa_g}{\rho_g c_{p_g} a} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a^-} + \frac{P_V(t)}{\rho_g c_{p_g}} \quad (3)$$

10. Les équations 1 et 3 sont bien conformes à celles données par l'énoncé, avec $D = \frac{\kappa}{\rho c_p}$

(diffusivité thermique de l'eau), $\alpha_g = \frac{3\kappa_g}{\rho_g c_{p_g} a}$ et $\beta_g = \frac{1}{\rho_g c_{p_g}}$.

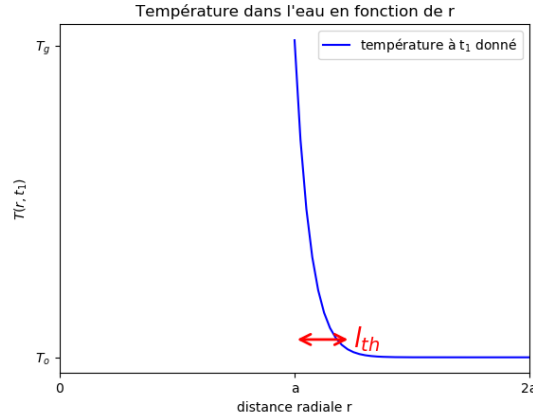
11. On néglige, dans la deuxième équation de la question 10, le premier terme du membre de droite. On a donc $\frac{dT_g}{dt} \approx \beta_g P_V(t)$. D'après l'énoncé, $P_V(t)$ est une gaussienne de durée caractéristique τ_p . On a donc les allures suivantes :



L'échelle de temps caractéristique d'augmentation de la température $T_g(t)$ de la nanoparticule est τ_p (et en effet, sur cette durée, comme cela a été vu précédemment, on peut sans doute négliger les transferts thermiques vers l'eau).

12. Toujours par analyse dimensionnelle, on obtient $l_{th} = \sqrt{D\tau_p} = 25 \text{ nm} = \frac{a}{4}$.

Si on se place à une date t fixée (de l'ordre de τ_p), alors la dépendance mathématique en r de la température est de la forme $\frac{A}{rt^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)$ mais cette expression est *totalemt hors-programme*.



III - Génération acoustique et formation d'image.

13. L'équation de conservation de la masse s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ (question de cours). En reportant dans cette équation les expressions de $\rho(\vec{r}, t)$ et de $\vec{v}(\vec{r}, t)$ données par l'énoncé, et en linéarisant (approximation acoustique), il vient

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{v}_a) = 0 \quad (4)$$

14. L'équation d'Euler (son établissement est une question de cours) s'écrit, en négligeant les forces de gravité : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } P$. Dans le cadre de l'approximation acoustique, elle se linéarise en :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\text{grad } p_a \quad (5)$$

15. On combine les équations 4, 5 et celle fournie ici par l'énoncé :
On élimine déjà ρ_a :

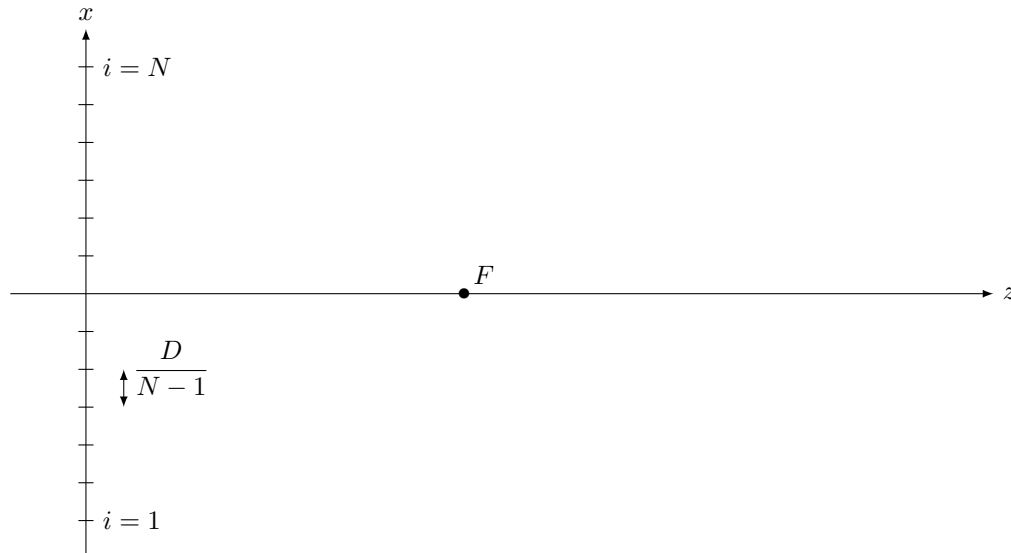
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p_a}{\partial t} - \rho_0 \beta \frac{\partial T_a}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v}_a = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\text{grad } p_a \end{array} \right.$$

On dérive par rapport à t la première équation, on prend la divergence de la seconde et on élimine le terme commun $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{v}_a)$:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \nabla^2 p_a = \rho_0 \beta \frac{\partial^2 T_a}{\partial t^2} \quad (6)$$

16. Si les variations de température (le terme de droite) correspondent à une source ponctuelle, alors ce terme de droite est nul partout (sauf à l'origine) et on reconnaît alors une équation de d'Alembert 3D. On s'attend donc à avoir pour la pression acoustique p_a une onde sphérique progressive se propageant radialement vers $+\vec{e}_r$. Soit une pression acoustique de la forme $p_a(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c_0}\right)$.

17. L'onde émise ne sera absolument pas harmonique. On ne peut calculer ici que la fréquence (et la longueur d'onde) *centrales* du spectre de l'onde émise. On voit que τ_p correspond apparemment à une demi-période de l'onde. On peut donc proposer pour l'onde émise une fréquence $f_a = \frac{1}{2\tau_p} = 1 \times 10^8 \text{ Hz}$ (valeur confirmée à la question 25), et une longueur d'onde $\lambda_a = \frac{c_0}{f_a} = 15 \text{ }\mu\text{m}$. La nanoparticule, de rayon $a = 100 \text{ nm}$, peut effectivement être considérée comme ponctuelle à cette échelle.
18. L'onde mesurée par le capteur aura la même forme que celle de la figure 3, mais translatée dans le temps de $20 \text{ }\mu\text{s}$ (le temps mis par l'onde pour parcourir $l = 3 \text{ cm}$ à la célérité c_0), et avec une amplitude multipliée par $\frac{a}{l} \approx 3.10^{-6}$: la pression maximale sera donc de 10^{-2} Pa (et la pression minimale de -10^{-2} Pa).
19. Il faut probablement considérer que l'onde acoustique doit mettre moins de $\frac{1}{f_{rep}} = 1 \text{ ms}$ pour faire le trajet de la nanoparticule jusqu'au capteur (qui est vraisemblablement à la surface de la peau). Ce qui donne une profondeur maximale de $1,50 \text{ m}$ (sinon il y aurait risque de confusion, pour le signal reçu, entre deux nanoparticules distantes de $1,50 \text{ m}$ l'une de l'autre). Cette valeur n'est en rien une limitation, puisque, très vraisemblablement, l'onde émise par le laser ne parviendra pas à cette profondeur. **Et par ailleurs il est douteux que l'on dispose d'un échantillon biologique de plus de $1,50 \text{ m}$ d'épaisseur !**
20. Je suppose que la question porte sur une situation 1D, où le capteur et les deux nanoparticules sont alignés : il s'agirait donc d'une résolution spatiale "longitudinale". Les deux signaux provenant des deux nanoparticules doivent être séparés au moins de $\tau_p = 5 \text{ ns}$, pour être bien distingués. Ce qui correspond à une distance de $7,5 \text{ }\mu\text{m}$.
21. Le corps étudié est en fait une structure tridimensionnelle. Lorsque le capteur ponctuel reçoit un signal acoustique, il est impossible de savoir de quelle direction ce signal provient.
22. **Il s'agirait ici plutôt d'une résolution spatiale latérale.** On peut proposer $2 \times 1,22 \frac{\lambda_a}{D} F \approx 1.10^{-4} \text{ m}$.



23. L'abscisse du capteur i est $x_i = -\frac{D}{2} + \frac{i-1}{N-1}D$. La distance entre le capteur i et la nanoparticule est $\sqrt{F^2 + x_i^2}$ (on ne va pas faire d'approximation car D n'est pas petit devant

F), et donc le temps de propagation correspondant $\frac{\sqrt{F^2 + x_i^2}}{c_0}$. Le retard à appliquer au signal reçu par le capteur i est donc égal à $-\frac{\sqrt{F^2 + x_i^2}}{c_0}$ (à une constante additive près).

La différence entre le plus long délai et le plus faible est donc $\Delta t_{max} - \Delta t_{min} = \frac{1}{c_0} \left(\sqrt{F^2 + \frac{D^2}{4}} - F \right) \approx 3.10^{-7} \text{ s} = 0,3 \text{ } \mu\text{s}$. (en toute rigueur ce n'est exact que si N est impair).

IV - Mesure de la vitesse du sang.

24. $\Delta f = -f \frac{||\vec{v}|| \cos \alpha}{c_0}$. Question hors-programme : seul l'effet Doppler longitudinal semble au programme.

25. $||\vec{v}_{aorte}|| \approx 5.10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$
 $||\vec{v}_{cap}|| \approx 3.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$

26. On prendra $Re = \frac{\rho ||\vec{v}|| 2R}{\eta}$. On a alors $Re_{aorte} \approx 4.10^3$ et $Re_{cap} \approx 2.10^{-3}$.

27. Attention il y a ici une grosse erreur d'énoncé. L'écoulement ne *peut pas* être irrotationnel. Reformulons l'énoncé : on considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible visqueux ; les forces de gravité sont négligées et l'écoulement se fait selon $\vec{u}_z$. L'invariance par rotation fait que la pression et la vitesse ne dépendent pas de θ : $P(r, z)$ et $\vec{v} = v(r, z)\vec{u}_z$. Le fluide étant incompressible, l'écoulement l'est aussi et donc $\text{div } \vec{v} = 0$, d'où l'on déduit que la vitesse ne dépend pas de z . On a donc $\vec{v} = v(r)\vec{u}_z$.

Il est à noter alors que toute particule de fluide a un mouvement rectiligne uniforme, et donc une accélération nulle.

En conséquence, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \vec{u}_z$$

$\overrightarrow{\text{grad}} P$ étant colinéaire à $\vec{u}_z$, ceci prouve bien que la pression est uniforme dans toute section droite du cylindre. On a donc $P(z)$.

L'équation précédente, projetée sur $\vec{u}_z$, s'écrit alors

$$\frac{dP}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \quad \forall r \forall z \quad (7)$$

Le membre de gauche ne dépend que de z , celui de droite que de r , et c'est donc une constante. La pression est donc une fonction affine de la coordonnée z , et on a :

$$P(z) = P_e + \frac{z}{L}(P_s - P_e) \quad (8)$$

28. Des équations 7 et 8 on tire $\frac{P_s - P_e}{L} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$, ce qui mène, après deux intégrations, en tenant compte du fait que la vitesse doit rester finie en tout point et doit s'annuler en $r = R$ (car le fluide est visqueux) au champ de vitesses suivant :

$$\vec{v} = \frac{P_s - P_e}{4\eta L} (r^2 - R^2) \vec{u}_z \quad (9)$$

(il s'agit d'un écoulement de Poiseuille)

On peut alors calculer le débit volumique dans le capillaire :

$$\begin{aligned} D_V &= \int_0^R v(r) 2\pi r dr \\ &= \frac{\pi(P_s - P_e)}{4\eta L} \int_0^R (r^2 - R^2) 2r dr \\ &= \frac{\pi(P_s - P_e)}{4\eta L} \int_{-R^2}^0 u du \\ &= \frac{\pi(P_e - P_s)R^4}{8\eta L} \end{aligned}$$

On en déduit alors la vitesse moyenne du fluide dans le vaisseau sanguin : $\bar{v} = \frac{D_V}{\pi R^2} = \frac{(P_e - P_s)R^2}{8\eta L}$.

29. Nouvelle erreur d'énoncé ici : le facteur de friction de Darcy-Weisbach est défini par $\xi = \frac{2D}{\rho \bar{v}^2 L} (P_e - P_s)$ (certes cette expression correcte figure en petit sur la figure 4..., dans laquelle les notations ne correspondent pas totalement à celles de l'énoncé : d au lieu de D).

L'écoulement laminaire dont il est question est celui qui vient d'être étudié, dont le champ de vitesses est donné par l'équation 9.

Pour cet écoulement on a donc

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{4R}{\rho \frac{(P_e - P_s)^2 R^4}{64\eta^2 L^2} L} (P_e - P_s) \\ &= 64 \frac{4\eta^2 L}{\rho (P_e - P_s) R^3} \end{aligned}$$

Or le nombre de Reynolds (dont l'énoncé aurait pu indiquer qu'il convient de le calculer avec la vitesse moyenne $\bar{v}$) a pour expression $Re = \frac{\rho \bar{v} (2R)}{\eta} = \frac{\rho (P_e - P_s) R^3}{4\eta^2 L}$ et donc on a

bien, en effet, $\xi = \frac{64}{Re}$.

Pour l'écoulement du sang dans le capillaire (dont on a montré qu'il a un nombre de Reynolds de l'ordre de 2.10^{-3} ce qui, au passage, correspond bien à un écoulement laminaire), on arrive donc à $\xi \approx 3.10^4$.

Attention toutefois ce nombre de Reynolds a été évalué à partir de la vitesse déterminée en question 25, elle-même déterminée à partir du décalage en fréquence fourni par l'énoncé ; on ne sait pas à quoi correspondait cette vitesse : vitesse moyenne, vitesse maximale ? On poursuit en estimant qu'il s'agissait de la vitesse moyenne.

Pour un capillaire long de 1 cm, ceci donne une perte de charge $\Delta P_{cap} = \frac{64}{Re} \frac{\rho \bar{v}^2}{2D} L \approx 7.10^2$ Pa (on ne donne qu'un chiffre significatif mais, pour les calculs intermédiaires, on en a gardé davantage, ainsi $Re \approx 2,4.10^{-3}$).

30. On peut certes le deviner, mais l'énoncé pourrait définir ce que sont ε et la rugosité relative. Nous avons trouvé pour l'aorte un nombre de Reynolds de l'ordre de 4.10^3 . Il nous faut faire une hypothèse sur la rugosité relative de l'aorte. Avec une rugosité relative de 2% (choix totalement arbitraire !), on trouve un coefficient de friction ξ de l'ordre de 0,06.

La perte de charge correspondante sera alors $\Delta P_{aorte} = \xi \frac{\rho \bar{v}^2}{2D} L \approx 6.10^1$ Pa (pour $\bar{v}$ on a en

fait pris $4,8 \times 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

31. Pour un capillaire, l'écoulement est laminaire et on a alors, d'après la question 28, $\mathcal{R}_{cap} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \approx 8 \cdot 10^{15} \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}$.

Pour l'aorte, l'écoulement n'est pas laminaire et on peut prendre $\mathcal{R}_{aorte} = \frac{\Delta P}{\pi R^2 \bar{v}} = \frac{\xi \rho \bar{v} L}{4\pi R^3} \approx 4 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}$.

Les N capillaires en parallèle ont une résistance à l'écoulement totale égale à $\frac{\mathcal{R}_{cap}}{N}$ (même différence de pression ΔP à leurs bornes, mais les débits volumiques s'additionnent); en conséquence il faut de l'ordre de $2 \cdot 10^{10}$ capillaires en parallèle pour que leur résistance à l'écoulement soit égale à celle de l'aorte. Ceci dit, pourquoi est-ce que ça devrait être le cas ???