1. **Justifier des expressions de $\underline{V}_x(x,z,t)$, $\underline{V}_z(x,z,t)$ et $\underline{p}(x,z,t)$:**
   - ✘ Par invariance par translation parallèle à (Oy) de l'onde de surface, ces trois grandeurs ne dépendent pas de y
   - ✘ Le milieu étant linéaire, à une excitation sinusoïdale correspond une réponse sinusoïdale.
2. **Établir les trois équations liant $\underline{v}_x$, $\underline{v}_Z$ et $\underline{p}$.**
   - ✘ D'après les hypothèses de l'énoncé, on utilise l'équation d'Euler linéarisée :

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P + \rho\vec{g}$$

$$\rho\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g$$

   - ✘ Sachant que $P(x,z,t) = P_0 - \rho g z + p(x,z,t)$, on en déduit :

$$\rho\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

   - ✘ L'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité), s'écrit :

$$\mathrm{div}\vec{V} = 0$$

   Soit :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

   - ✘ En représentation complexe, on obtient donc :

$$j\omega\rho\underline{v}_x(z) = jk\underline{p}(z)$$

$$j\omega\rho\underline{v}_z(z) = -\frac{\mathrm{d}\underline{p}}{\mathrm{d}z}$$

$$-jk\underline{v}_x(z) + \frac{\mathrm{d}\underline{v}_z}{\mathrm{d}z} = 0$$

   - ✘ En combinant ces équations, on obtient l'équation différentielle vérifiée par $\underline{p}(z)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{p}}{\mathrm{d}z^2} - k^2\underline{p}(z) = 0$$

   - ✘ On intègre cette équation sans difficultés :

$$\underline{p}(z) = \underline{A}\exp(kx) + \underline{B}\exp(-kx)$$

   - ✘ On en déduit :

$$\underline{v}_x(z) = \frac{k}{\rho\omega}\left(\underline{A}\exp(kx) + \underline{B}\exp(-kx)\right)$$

$$\underline{v}_z = \frac{-k}{j\omega\rho}\left(\underline{A}\exp(kx) - \underline{B}\exp(-kx)\right)$$

3. **Conditions limites :**

   - On est dans le cas d'un écoulement parfait, donc la vitesse au fond de l'eau ne doit pas avoir de composante normale :

   $$\underline{v}_z(-H) = 0 \Rightarrow \underline{B} = \underline{A}\exp(-2kH)$$

   On en déduit :

   $$\underline{p}(z) = 2\underline{A}\exp(-kH)\cosh\left(k(z+H)\right)$$

   - En utilisant p_0 la pression en $z = 0$, on a également :

   $$\underline{p}(0) = p_0 = 2\underline{A}\exp(-kH)\cosh(kH)$$

   D'où :

   $$\underline{p}(z) = p_0\frac{\cosh\left(k(z+H)\right)}{\cosh(kH)}$$
   $$\underline{v}_x(z) = \frac{p_o k}{\rho\omega}\frac{\cosh\left(k(z+H)\right)}{\cosh(kH)}$$
   $$\underline{v}_z(z) = \frac{jp_0 k}{\rho\omega}\frac{\sinh\left(k(z+H)\right)}{\cosh(kH)}$$

   - Soit, en revenant aux valeurs réelles instantanées :

   $$p(x,z,t) = \frac{p_o k}{\rho\omega}\frac{\cosh\left(k(z+H)\right)}{\cosh(kH)}\cos(\omega t - kx)$$

   $$V_x(x,z,t) = \frac{p_o k}{\rho\omega}\frac{\cosh\left(k(z+H)\right)}{\cosh(kH)}\cos(\omega t - kx)$$
   $$V_z(x,z,t) = \frac{-p_0 k}{\rho\omega}\frac{\sinh\left(k(z+H)\right)}{\cosh(kH)}\sin(\omega t - kx)$$

   - Soit une particule fluide située en (X_0, Z_0) en l'absence de houle, alors au passage de la houle ses coordonnées $(X(t), Z(t))$ vérifient :

   $$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{p_0 k}{\rho\omega}\frac{\cosh\left(k(Z_0+H)\right)}{\cosh(kH)}\cos(\omega t - kX_0)$$

   $$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = \frac{-p_0 k}{\rho\omega}\frac{\sinh\left(k(Z_0+H)\right)}{\cosh(kH)}\sin(\omega t - kX_0)$$

   - Après intégration, on obtient :

   $$X(t) = X_0 + \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}\frac{\cosh\left(k(Z_0+H)\right)}{\cosh(kH)}\sin(\omega t - kX_0)$$

   $$Z(t) = Z_0 + \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}\frac{\sinh\left(k(Z_0+H)\right)}{\cosh(kH)}\cos(\omega t - kX_0)$$

   En posant :

   $$a = \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}\frac{\cosh\left(k(Z_0+H)\right)}{\cosh(kH)}$$

$$b = \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}\frac{\sinh\left(k(Z_0+H)\right)}{\cosh\left(kH\right)}$$

On obtient les équations :

$$X(t) = X_0 + a\sin\left(\omega t - kX_0\right)$$

$$Z(t) = Z_0 + b\cos\left(\omega t - kX_0\right)$$

Soit :

$$\left(\frac{X-X_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{Z-Z_0}{b}\right)^2 = 1$$

Avec :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\tanh\left(k(Z_0+H)\right)}$$

La trajectoire d'une particule fluide au passage de la houle est donc elliptique.

✘ Notons que dans le cas de particules fluides situées en profondeur, les ellipses sont très aplaties :

$$Z_0 \approx -H \Rightarrow a >> b$$

✘ Notons enfin que l'expression de $Z(t)$ nous permet de trouver l'expression de h_0. Pour cela, il suffit de poser $Z_0 = 0$:

$$Z(t) = \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}\tanh\left(kH\right)\cos\left(\omega t - kX_0\right)$$

Expression à $h(t) = h_0\cos(\omega t - kx)$ avec $x = X_0$

On obtient donc :

$$h_0 = \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}\tan\left(kH\right)$$

4. **Houle en eau profonde**

   (a) Condition pour considérer la houle comme profonde :

$$H >> \lambda \Rightarrow kH >> 1$$

✘ On simplifie alors les expressions des différentes grandeurs précédentes en considérant que :

$$\cosh\left(kH\right) \approx \frac{1}{2}\exp(kH)$$

$$\cosh\left(k(H+z)\right) \approx \frac{1}{2}\exp(k(H+z))$$

$$\sinh\left(k(H+z)\right) \approx \frac{1}{2}\exp\left(k(H+z)\right)$$

et on obtient :

$$p(x,z,t) = p_0\exp(kz)\cos\left(\omega t - kx\right)$$

$$V_x(x,z,t) = \frac{kp_0}{\rho\omega}\exp\left(kz\right)\cos\left(\omega t - kx\right)$$

$$V_z(x,z,t) = -\frac{kp_0}{\rho\omega}\exp(kz)\sin(\omega t - kx)$$

$$X(t) = X_0 + \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}\exp(kZ_0)\sin(\omega t - kX_0)$$

$$Z(t) = Z_0 + \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}\exp(kZ_0)\cos(\omega t - kX_0)$$

$$a = b = R = \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}\exp(kZ_0)$$

✘ La trajectoire d'une particule fluide est donc une cercle de rayon R, de centre (X_0, Z_0). Notons que quand Z_0 diminue, le rayon R diminue également.

(b)

$$h_0 = \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}$$

(c) La pression au niveau de la surface libre vaut P_0 la pression atmosphérique, on a donc :

$$P - 0 = p(x, z = h, t) + P_0 - \rho g h(x,t)$$

Soit :

$$p(x,h,t) = \rho g h(x,t)$$

$$p_0 \exp(kh) = \rho g h_0$$

Sachant que $hk << 1$, on en déduit :

$$p_0 = \rho g h_0$$

En combinant cette relation avec $h_0 = \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}$, on obtient la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk$$

La vitesse de phase vaut :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega}$$

Le milieu est donc dispersif

La vitesse de groupe vaut alors :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{k} = \frac{g}{2\omega}$$

Il y a déformation du paquet d'onde.

(d) Calcul de la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{g}{2\pi f^2} = 40\,\mathrm{m}$$

Il faut donc une profondeur supérieure à 400 m.

5. **Cas d'eaux peu profondes**

(a) On est maintenant dans le cas où :

$$\lambda >> H \Rightarrow Hk << 1$$

- ✘ On simplifie alors les expressions des différentes grandeurs précédentes en considérant que :

$$\cosh(kH) \approx 1$$
$$\cosh(k(H+z)) \approx 1$$
$$\sinh(k(H+z)) \approx k(H+z)$$

et on obtient :

$$p(x,z,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$
$$V_x(x,z,t) = \frac{kp_0}{\rho\omega}\cos(\omega t - kx)$$
$$V_z(x,z,t) = -\frac{k^2 p_0}{\rho\omega}(H+z)\sin(\omega t - kx)$$
$$X(t) = X_0 + \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}\sin(\omega t - kX_0)$$
$$Z(t) = Z_0 + \frac{p_0 k^2}{\rho\omega^2}(Z_0 + H)\cos(\omega t - kX_0)$$
$$a = \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}$$
$$b = \frac{p_0 k^2}{\rho\omega^2}(Z_0 + H)$$

- ✘ La trajectoire d'une particule fluide est donc une ellipse, de centre (X_0, Z_0) avec :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k(Z_0 + H)}$$

Notons que quand Z_0 diminue, les ellipses s'aplatissent.

- ✘

$$h_0 = \frac{p_0 k^2}{\rho\omega^2} H$$

- ✘ Sachant que l'on a toujours :

$$p_0 = \rho g h_0$$

En combinant cette relation avec $h_0 = \frac{p_0 k^2}{\rho\omega^2}$, on obtient la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk^2 H$$

La vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales et valent :

$$v_\phi = v_g = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$$

Le milieu est donc non dispersif

(b) Les applications numériques donnent :

$$c = 3.2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

$$\lambda = 16\,\mathrm{m} >> 1m$$

(c) A l'approche du rivage, on est dans le cas des eaux peu profondes et pourtant les vagues déferlent (déformation du paquet d'onde). Ceci s'explique simplement grâce à l'expression de la vitesse de groupe : cette vitesse dépend de la hauteur d'eau. Or, le front avant de la vague, à l'approche du rivage, se trouve naturellement à une profondeur moins importante que la partie arrière de la vague. Ainsi, la partie arrière de la vague va plus vite que la partie avant de la vague : la vague déferle.