Ex9 : Condensateur plan en régime variable

1. Le champ magnétique mesuré dans tous les cas vient de l'équation de Maxwell-Ampère. Les courants qui en sont responsables sont :
   - aux points P et R, les courants de conduction $I(t)$,
   - au point Q, les courants de déplacement : $I'(t) = \varepsilon_0 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}$.

   Le flux du champ électrique, intervenant dans l'expression de $I'(t)$ est le flux du champ électrique à travers la contour circulaire passant par le point Q :
$$\phi_E = E\,s = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}.$$
   On a donc :
$$I'(t) = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I(t).$$

2. (a) ✘ Au départ (ordre 0), le champ électrique est créé par les charges $Q(t)$ et $-Q(t)$ sur les armatures. L'étude des symétries et invariances permet alors d'écrire :
$$\vec{E}[M,t] = E_r[r,z,t]\,\vec{e}_r + E_z[r,z,t]\,\vec{e}_z.$$
   Le champ $\vec{B}$ étant nul intialement, on a :
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0}$$
   d'où :
$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial r}$$
   et en ordre de grandeur :
$$\frac{|E_r|}{e} \approx \frac{|E_z|}{R}$$
   donc :
$$\frac{|E_r|}{|E_z|} \approx \frac{e}{R} \ll 1.$$
   Dans ces conditions :
$$\vec{E}\,(M,t) = E_z\,(r,z,t)\,\vec{e}_z.$$
   En l'absence de charge entre les armatures, on a :
$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$
   et donc : $\vec{E}\,(M,t) = E_z\,(r,t)\,\vec{e}_z$.

   ✘ Le champ magnétique cherché est généré par les variations temporelles de $\vec{E}$ selon :
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ (Maxwell-Ampère)}$$
   Le champ $\vec{E}$ est dirigé suivant (Oz) et indépendant de z et θ. Ainsi, le plan contenant l'axe (Oz) et passant par le point M où l'on calcule le champ est-il plan de symétrie pour $\vec{E}$. De par les propriétés du rotationnel, $\vec{B}$ est suivant $\vec{e}_\theta$ et qu'il ne dépend que de (r,t) :
$$\vec{B}\,(M,t) = B_\theta\,(r,t)\,\vec{e}_\theta.$$

(b) On utilise le champ donné dans la question (1) :

$$\underline{\vec{E}} = \frac{\underline{Q}(t)}{S\varepsilon_0}\vec{e}_z = E_0 \exp(\mathrm{j}\omega t)\,\vec{e}_z,$$

où $\underline{Q}(t) = Q_0 \exp(\mathrm{j}\omega t)$. On en déduit :

$$E_0 = \frac{Q_0}{S\varepsilon_0}$$

(c) On utilise l'expression intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère en choisissant comme contour fermé le cercle d'axe (Oz) et de rayon $r < R$:

$$\oint_C \underline{\overrightarrow{B_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oiint \underline{\overrightarrow{E_0}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S},$$

d'où :

$$\underline{\overrightarrow{B_1}}(r,t) = \frac{\mathrm{j}\omega}{2c^2} r E_0 \exp(\mathrm{j}\omega t)\,\vec{e}_\theta.$$

(d) On utilise l'expression intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, avec pour contour fermé le rectangle de la figure 1, pour surface élémentaire la bandelette verticale d'épaisseur $\mathrm{d}r'$, hauteur h, située à distance r' de l'axe, de vecteur-surface :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -h\mathrm{d}r'\vec{e}_\theta$$

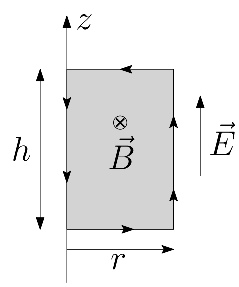

Figure 1

On obtient :

$$\oint_C \underline{\overrightarrow{E_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oiint \underline{\overrightarrow{B_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S},$$

soit, sachant que le champ $\underline{\overrightarrow{E_2}}$, dû au champ perturbatif $\underline{\overrightarrow{B_1}}$, s'annule sur l'axe :

$$\underline{E_2} h = \frac{\mathrm{j}^2 h e^{\mathrm{j}\omega t}\omega^2 E_0}{2c^2} \int_0^r r'\mathrm{d}r'$$

$$\underline{\overrightarrow{E_2}} = \frac{-\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 \exp(\mathrm{j}\omega t)\,\vec{e}_z$$

(e) En procédant de la même manière, on trouve :

$$\underline{\overrightarrow{B_3}}(r,t) = \frac{-\mathrm{j}\omega^3}{16c^4} r^3 E_0 e^{\mathrm{j}\omega t}\vec{e}_\theta$$

$$\underline{\overrightarrow{E_4}} = \frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0 \exp(\mathrm{j}\omega t)\,\vec{e}_z$$

(f) Les champs résultants sont obtenus en sommant toutes les contributions (où $u = \dfrac{\omega r}{c}$) :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \left[1 - \frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{64} ... \right] e^{\mathrm{j}\omega t} \vec{e}_z,$$

$$\underline{\vec{B}} = \mathrm{j} \frac{E_0}{c} \left[\frac{u}{2} - \frac{u^3}{16} ... \right] e^{\mathrm{j}\omega t} \vec{e}_\theta.$$

3. (a) On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday et on obtient, sachant que $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ entre les armatures :

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

(b) En utilisant le laplacien en coordonnées cylindriques, on obtient l'équation demandée.

(c) En injectant l'expression de $\underline{E}$ dans l'équation différentielle précédente, on établit l'équation différentielle vérifiée par e :

$$\frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}r} + \frac{\omega^2}{c^2} e(r) = 0,$$

soit, en posant $u = \dfrac{\omega r}{c}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}u^2} + \frac{1}{u} \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}u} + e(u) = 0.$$

(d) On en déduit l'expression du champ électrique :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{u}{2} \right)^{2k} \right] e^{\mathrm{j}\omega t} \vec{e}_z$$

puis, par l'équation de Maxwell-Faraday, celle de $\underline{\vec{B}}$:

$$\underline{\vec{B}} = \mathrm{j} \frac{E_0}{c} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{u}{2} \right)^{2k} \right] e^{\mathrm{j}\omega t} \vec{e}_\theta$$

(e) Les premiers termes du développement de la série redonnent bien l'expression approchée des champs. Les deux méthodes sont compatibles.