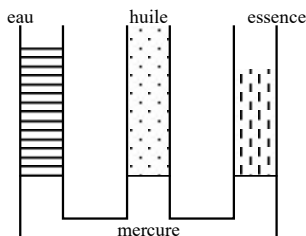


MFO : STATIQUE DES FLUIDES

EXERCICE 1 : MESURE DE DENSITE



Un tube en W constitué de trois branches de même section $S = 100 \text{ cm}^2$ est rempli de mercure. On verse dans une branche de l'eau jusqu'à une hauteur de 50 cm. On verse ensuite dans les deux branches de l'huile et de l'essence de telle façon que les surfaces libres des trois liquides soient sur le même niveau horizontal.

- Déterminer les hauteurs d'huile et d'essence.
- On immerge partiellement dans l'eau un cylindre en bois massif de section 50 cm^2 et de hauteur 20 cm, de façon à ce que son poids soit exactement compensé par la poussée d'Archimède. Déterminer les nouvelles positions relatives entre les surfaces libres des trois liquides.

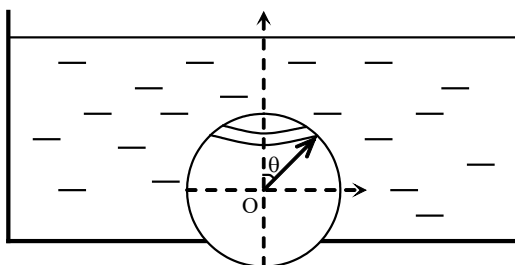
Données :

Masse volumique : $\rho_0 = 13600$ pour le mercure, $\rho_2 = 920$ pour l'huile, $\rho_3 = 750$ pour l'essence et $\rho_4 = 800 \text{ kg/m}^3$ pour le bois.

EXERCICE 2 : CHASSE D'EAU ANCIENNE

Un trou circulaire de rayon r , se trouvant au fond d'un récipient, est bouché par une boule de masse m et de rayon R . On verse une hauteur d'eau H dans le récipient qui couvre complètement la boule. On cherche la condition sur les dimensions du système pour que la boule ne se soulève pas. On supposera que le contact entre boule et récipient ne laisse pas l'eau s'échapper.

- On fera d'abord une étude qualitative en précisant les conditions les plus favorables en fonction des paramètres m , r et R .
 - $r = 1 \text{ cm}$, $R = 10 \text{ cm}$, $m = 200 \text{ g}$
 - $r = 8 \text{ cm}$, $R = 10 \text{ cm}$, $m = 200 \text{ g}$
 - $r = 1 \text{ cm}$, $R = 2 \text{ cm}$, $m = 50 \text{ g}$
- Etablir ensuite la condition de façon analytique et faire une application numérique. Commenter la dépendance en fonction de H/R .
 $R/r = 2$.



EXERCICE 3 : STABILITE DE L'ATMOSPHERE.

On assimile l'atmosphère à un gaz parfait de masse molaire $M_o = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de coefficient $\gamma_o = \frac{c_p}{c_v}$ constant et égal à 1,4.

On observe expérimentalement que la température varie linéairement avec l'altitude selon la loi $T(z) = T_o - az$ avec a de l'ordre de $6 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$.

1. Expliquer l'origine de ce gradient quand l'air est calme. Etablir la loi donnant la variation de la pression avec l'altitude.
2. Un ballon atmosphérique, de masse m_w , est constitué d'une membrane souple renfermant une masse m_{gaz} d'un gaz léger de masse molaire M et de coefficient γ . On considère ici l'équilibre du ballon à altitude constante depuis suffisamment longtemps pour que l'équilibre thermique entre le gaz et l'atmosphère ait eu le temps de s'établir. Etablir la relation traduisant l'équilibre du ballon.



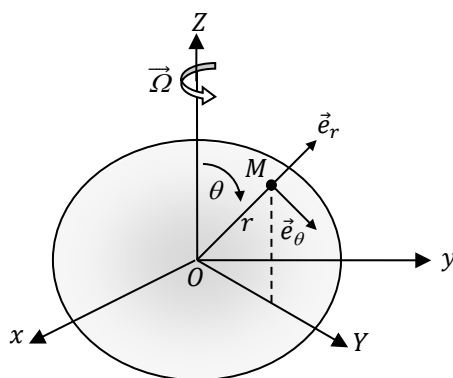
Quels gaz pouvez-vous proposer et préciser leur avantage et leur inconvénient.

3. L'équilibre précédent étant vérifié, on considère une petite perturbation qui décale le ballon d'une hauteur dz . L'équilibre des pressions entre le ballon et l'atmosphère se fait instantanément, en revanche la transformation du gaz est adiabatique réversible. Justifier cette approximation.
A quelle condition l'équilibre est-il stable ? Proposer une application numérique.
4. Comment adapter le modèle précédent pour trouver une condition de stabilité de l'atmosphère ? Expliquer qualitativement comment le gradient de température se stabilise.

EXERCICE 4 : ELLIPSOÏDE TERRESTRE.

De nombreux physiciens ont, par le passé, tenté de trouver la « forme de la terre » en utilisant différents modèles.

Le modèle étudié ici est celui de la terre, considérée comme un fluide homogène de masse volumique μ , en équilibre hydrostatique dans le référentiel terrestre (R_T) en rotation uniforme, autour de l'axe (OZ), dans le référentiel géocentrique supposé galiléen (R_0).



1. Faire le bilan des forces exercées sur une particule fluide placée en M dans le référentiel (R_T).
On supposera que le champ de gravitation reste à symétrie sphérique.
2. En déduire, par intégration, qu'il existe un invariant dans le fluide ne dépendant que des variables r , θ et P où P est la pression exercée en M .
3. En déduire l'équation de l'ellipsoïde :

$$\left(\frac{z}{b}\right)^2 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont définis à une constante multiplicative près.}$$

Exprimer et calculer l'écart relatif entre le grand-axe et la petit-axe de l'ellipsoïde : $\varepsilon = \frac{a-b}{a}$

Que pensez-vous du modèle utilisé ?

Données : Masse volumique de la terre : $\mu = 5,52 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

EXERCICE 5 : DEUX LIQUIDES NON MISCIBLES EN EQUILIBRE DANS UN REFERENTIEL TOURNANT

Un récipient cylindrique de rayon R , d'axe vertical (Oz), contient deux liquides incompressibles et non miscibles :

- Un liquide de masse volumique ρ_2 , qui occupe au repos une hauteur h_2 au fond du récipient ;
- Un liquide de masse volumique $\rho_1 < \rho_2$, qui occupe au repos une hauteur h_1 au-dessus du premier.

L'atmosphère au-dessus est à la pression uniforme P_0 . On met le récipient en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de (Oz). Une fois le régime permanent atteint, les deux liquides sont au repos dans le référentiel R' lié au récipient. On repère un point par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z), avec $z = 0$ au fond.

1. Le référentiel R' est-il galiléen ? Faire le bilan des forces volumiques s'exerçant sur une particule de fluide au repos dans R' .
2. Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle volumique que l'on exprimera. En déduire que, dans chaque liquide i , la quantité suivante est uniforme :

$$P + \rho_i g z - \frac{1}{2} \rho_i \omega^2 r^2$$

3. Établir l'équation $z_s(r)$ de la surface libre, en fonction de sa cote $z_s(0)$ sur l'axe.
4. En écrivant la continuité de la pression à l'interface, établir l'équation $z_i(r)$ de l'interface entre les deux liquides. Commenter.
5. Utiliser la conservation du volume de chaque liquide pour déterminer $z_i(0)$ et $z_s(0)$. Que peut-on dire de l'épaisseur de la couche de liquide 1 ?
6. À quelle condition sur ω le fond du récipient reste-t-il entièrement recouvert de liquide 2 ? Application numérique : $R = 5,0 \text{ cm}$, $h_2 = 3,0 \text{ cm}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
7. Calculer la force pressante totale exercée par les liquides sur le fond et interpréter le résultat.
8. Que se passerait-il si l'on avait placé le liquide le plus léger au fond ? Interpréter en termes de « pesanteur effective ».

MF2 : CINEMATIQUE

EXERCICE 6 : ECOULEMENT DANS UN TRIEDRE (*)

Soit un écoulement bidimensionnel dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini pour $x > 0$ et $y > 0$ est :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -kx \vec{u}_x + ky \vec{u}_y$$

1. Déterminer le champ des accélérations avec le formalisme lagrangien puis avec le formalisme eulérien.
2. L'écoulement est-il compressible ?
3. L'écoulement est-il rotationnel ? dans la négative, déterminer le potentiel des vitesses.
4. Déterminer l'équation des lignes de courant.
5. Déterminer les trajectoires des particules fluides.

EXERCICE 7 : « EFFET DE PEAU » (*)

L'écoulement entre un plan oscillant ($y = 0$) et l'infini (y infini) est donné par le champ Eulérien des vitesses suivant en coordonnées cartésiennes : $\vec{v} = a \exp(-ky) \cdot \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x$.

Préciser les caractéristiques du champ des vitesses :

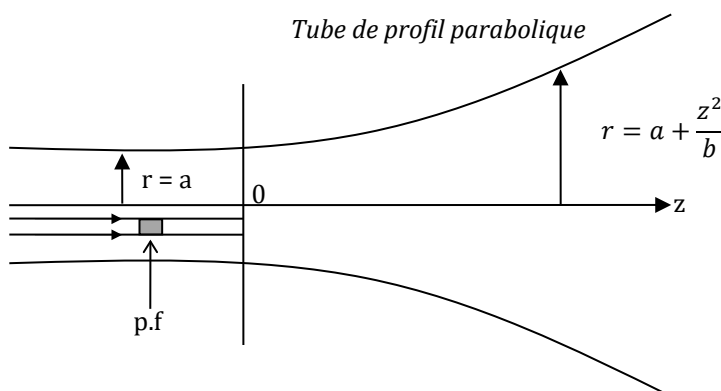
1. Ce champ correspond-il à un écoulement stationnaire ?
2. Préciser la nature des lignes de courant et des trajectoires.
3. Cet écoulement est-il incompressible ? Existe-t-il une fonction courant ψ telle que $\vec{v} = \overrightarrow{rot}(\psi \vec{e}_z)$? si oui, la définir.
4. Cet écoulement est-il le siège de tourbillons ? Existe-t-il un potentiel ϕ des vitesses tel que $\vec{v} = \overrightarrow{grad} \phi$? Si oui le définir.

EXERCICE 8 : ECOULEMENT DANS UN TUBE PARABOLIQUE (**)

Un fluide est en écoulement permanent dans une portion de tube profil parabolique : (Oz) étant l'axe de symétrie, les lignes de courant ont pour équation :

$$\begin{cases} z < 0 : r = \lambda a \\ z > 0 : r = \lambda \left(a + \frac{z^2}{b} \right) \end{cases}$$

où λ (sans dimension), a et b sont des constantes.



Le fluide est incompressible et la composante axiale v_z de la vitesse est supposée uniforme sur une section droite ($z < 0$ et $z > 0$), c'est-à-dire que v_z est indépendant de r quelque soit z . On notera v_0 la vitesse en O.

1. Déterminer la vitesse $\vec{v}(r, z)$ en tout point.

- On considère un élément de fluide qui, pour $z < 0$, a la forme représentée sur le schéma ci-dessus. Décrire qualitativement l'évolution de cet élément de fluide.
- L'écoulement est-il potentiel ?

EXERCICE 9 : SPHERE PULSANTE (**)

Dans un fluide incompressible infiniment étendu, initialement au repos, on place une sphère solide de centre O. Le rayon R de la sphère est variable : $R(t) = R_0 + a \cdot \cos(\omega t)$.

- Déterminer le champ des vitesses.
- Calculer l'accélération particulaire en un point M à l'instant t.
- Que deviennent ces résultats dans l'approximation des petites oscillations : $a \ll R_0$?

EXERCICE 10 : DIPOLE HYDRAULIQUE (*)

On s'intéresse à un puits de débit D_v situé en $P\left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ et une source de débit opposé $-D_v$ située en $S\left(+\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ et on se place en un point M, **loin du puits et de la source**.

- Trouver dans ces conditions une approximation de PM et SM
- L'écoulement est non tourbillonnaire : $\vec{r} \otimes \vec{t} \vec{v} = \vec{0}$. Déterminer le potentiel en superposant le potentiel d'une source et celui d'un puits : $\phi(M) = \frac{D_v}{2\pi} \ln\left(\frac{SM}{PM}\right)$. On l'exprimera en fonction du moment dipolaire $m = \frac{D_v}{2\pi} a$.
- Déterminer le champ des vitesses total en fonction de m .

EXERCICE 11 : LAVABO QUI SE VIDE (*)



- Un puits ou une source est un axe par lequel du fluide peut s'écouler. Lorsqu'un lavabo se vide, l'axe vertical passant par la bonde est un puits de fluide, car le fluide se dirige vers cet axe pour y être emporté. En coordonnées cylindriques, le champ de vitesse d'un puits est modélisé par $\vec{V}_1 = \frac{D}{2\pi r} \vec{e}_r$ où D est une constante.
 - Déterminer l'équation des lignes de champ de $\vec{V}_1$ et les représenter.
 - L'écoulement est-il compressible ?
 - Calculer le débit volumique associé à ce champ de vitesse à travers la face latérale (orientée vers l'extérieur) d'un cylindre d'axe z, de rayon R et de hauteur h. Comment interpréter D ? Selon de signe de D on parle de puits ou de source. A quel signe est associé chaque nom ?
 - L'écoulement est-il potentiel ? Si oui trouver le potentiel associé.
 - Calculer le champ électrostatique produit par un fil infiniment long, d'axe $(O, \vec{e}_z)$ en coordonnées cylindriques, et portant la densité de charge linéique uniforme λ . Faire une analogie entre le champ de vitesse du puits de fluide et ce champ électrique.
- Le vortex sert à modéliser un tourbillon de lanière simple (modèle bidimensionnel d'un lavabo qui se vide par exemple). Son champ de vitesse $\vec{V}_2$ est : $\vec{V}_2 = \frac{C}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, où C est une constante.
 - Déterminer l'équation des lignes de courant associées et les représenter.
 - L'écoulement est-il compressible ?

- c. Calculer la circulation de $\vec{V}_2$ le long d'un cercle d'axe z et de rayon R, orienté dans le sens trigonométrique. Interpréter C. Pouvaient-on trouver ce résultat par le théorème de Stokes ?
 - d. Calculer le champ magnétique créé par un fil rectiligne infiniment long d'axe $(O, \vec{e}_z)$ parcouru par un courant i constant et uniforme. Faire une analogie entre le champ de vitesse $\vec{V}_2$ du vortex et le champ magnétique créé par un fil infini.
3. Pour modéliser ce qui se passe dans un lavabo qui se vide, on superpose un champ de vortex (avec $C > 0$ par exemple) un puits : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$. On ne se préoccupe pas d'une composante selon z de la vitesse car le modèle du puits assure que le fluide disparaît quand il touche l'axe z.
- a. Dans ce modèle le fluide est-il compressible ?
 - b. Etablir l'équation des lignes de courant en coordonnées cylindriques et les tracer.
 - c. La formation des tourbillons lors de la vidange des lavabos est-elle due à la force de Coriolis induite par la rotation propre de la terre ?

EXERCICE 12 : ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE SPHERE OU D'UN CYLINDRE (*)

On considère un fluide parfait, incompressible (air à de faibles vitesses d'écoulement), de masse volumique μ entourant un obstacle cylindrique de rayon R et d'axe Oz.

L'écoulement est à deux dimensions (vitesses parallèles au plan (Oxy) et indépendantes de z) et est stationnaire.

Un point M du plan (Oxy) est repéré par ses coordonnées polaires r et θ .

L'obstacle dans son voisinage déforme les lignes de courant ; loin de l'obstacle le fluide est animé d'une vitesse uniforme $\vec{V}_\infty = V_0 \vec{e}_x$.

L'écoulement est supposé irrotationnel.

1. Dédire que $\vec{V} = \overrightarrow{grad} \phi$ et que $\Delta \phi = 0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$.
2. Ecrire les conditions limites satisfait par le champ de vitesse $\vec{V}$ au voisinage de l'obstacle ($r = R$) et à l'infini ($r \rightarrow \infty$).
3. Montrer qu'une solution type $\phi(r, \theta) = f(r) \cdot \cos \theta$ est solution de $\Delta \phi = 0$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$. Intégrer cette équation différentielle en cherchant les solutions sous la forme $f(r) = Ar^n$. Calculer les constantes d'intégration et exprimer les composantes du champ de vitesses V_r et V_θ .
4. Reprendre l'exercice en remplaçant le cylindre par une sphère de rayon R. On remarquera que le problème a une symétrie autour de l'axe (Oz). On rappelle, qu'en coordonnées sphériques, compte-tenu de la symétrie de révolution autour de l'axe Oz : $\Delta \phi = 0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$

MF3 : DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

EXERCICE 13 : CLEPSYDRE (*)



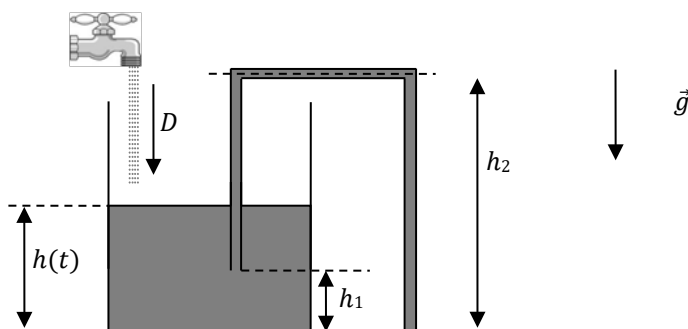
Une Clepsydra, appelé **horloge à eau**, est un récipient à symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) et de section horizontale S variant en fonction de la cote z , comptée à partir d'un orifice O de très faible section percé au fond.

1. Exprimer l'équation différentielle donnant $\frac{dz}{dt}$ la variation de l'altitude de l'eau.
2. On suppose maintenant que la section varie suivant la loi :

$$S(z) = S_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^n$$

- a. En déduire le temps de vidange entre deux valeurs de la cote.
- b. Pour quelle valeur de n ce temps est-il proportionnel à la variation de niveau ?

EXERCICE 14 : VASE DE TANTALE (*)



Le dispositif représenté sur le schéma ci-dessus permet d'obtenir périodiquement un débit important à partir d'une source de faible débit.

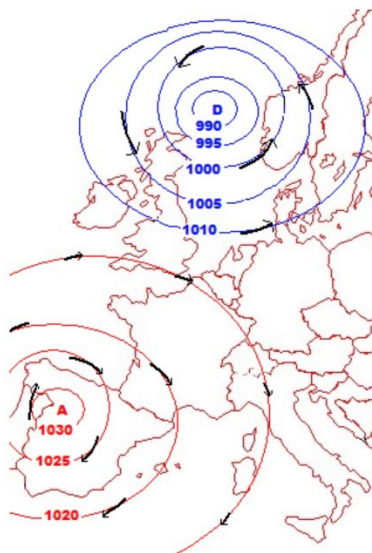
Le tuyau a une section s faible devant la section S du vase cylindrique. La source a un débit volumique D constant. L'eau est incompressible et on néglige toute viscosité.

1. En partant d'un niveau h nul, décrire les différentes phases de l'écoulement.
2. Montrer que pour D inférieur à une certaine valeur limite D_1 que l'on calculera, l'écoulement est périodique.
3. Supposons $D \ll D_1$. Tracer l'allure du graphe de la fonction $h(t)$ et calculer une valeur approchée de sa période.
4. Si on ne fait pas cette hypothèse, calculer la durée de la phase de vidange.
5. AN : Calculer la durée de vidange et la période pour les valeurs : $h_1 = 10 \text{ cm}$; $h_2 = 40 \text{ cm}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$; $S = 100 \text{ cm}^2$; $s = 1 \text{ cm}^2$; $D = 0,014 \text{ L/s}$

EXERCICE 15 : COURANTS GEOSTROPHIQUES (*)

On veut étudier le mouvement de l'atmosphère terrestre. Aussi, on se place dans le référentiel terrestre R non galiléen, en rotation par rapport au référentiel géocentrique R_g avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}$, au voisinage d'un point de la terre à la latitude λ . On s'intéresse à un écoulement plan, horizontal.

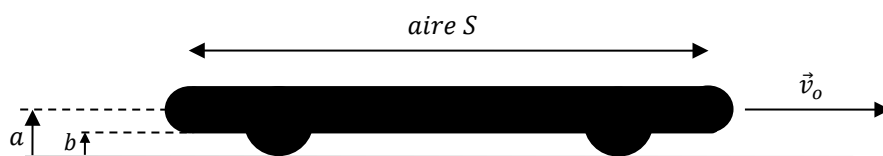
1. Etablir l'équation d'équilibre géostrophique obtenue en traduisant l'équilibre, d'une particule fluide dans l'atmosphère terrestre. Comparer les lignes de courant et les isobares. Dans quel sens tourne l'air atmosphérique ?



2. On appelle nombre de Rossby R_0 d'un écoulement le rapport sans dimension entre le terme d'accélération (convective) et le terme lié à la force de Coriolis dans la précédente équation. Evaluer R_0 pour un écoulement atmosphérique typique pour lequel l'ordre de grandeur de la vitesse d'écoulement caractéristique, U , vaut 10 m.s^{-1} et l'ordre de grandeur de la dimension horizontale caractéristique L vaut 1000 km . Commenter le résultat obtenu.

EXERCICE 16 : EFFET DE SOL (*)

Un bolide dont la forme est schématisée ci-dessous se déplace à la vitesse $\vec{v}_0$ constante.



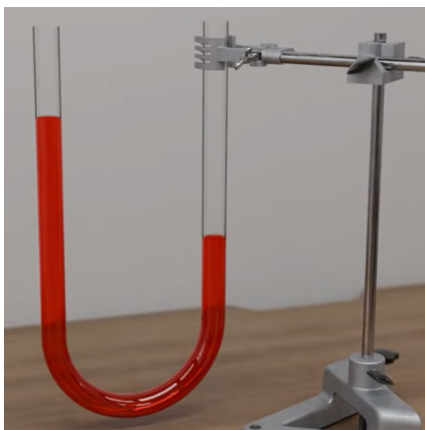
Déterminer l'ordre de grandeur de la composante verticale des forces de pressions. On précisera les hypothèses.

Proposer une application numérique.

EXERCICE 17 : OSCILLATIONS D'UN LIQUIDE (*)

1. Une canalisation de section S constante, fixe par rapport à un repère galiléen, est le siège d'un écoulement non permanent d'un liquide incompressible non visqueux. Montrer que pour une longueur L de cette canalisation l'équation caractéristique de l'écoulement s'écrit : $\frac{\partial v}{\partial t} L = \frac{(P_1 + \mu g z_1) - (P_2 + \mu g z_2)}{\mu}$, l'écoulement se faisant de 1 vers 2, entrée et sortie de la portion liquide considérée.
2. Une application de la relation précédente est donnée par les oscillations d'un liquide placé dans un tube en U de section constante.

Un tube contient au repos, une colonne de liquide de longueur L . Si on perturbe par un mouvement brusque cet état d'équilibre, le liquide se met à osciller.



En négligeant frottements et phénomènes superficiels, montrer que cette colonne liquide se comporte comme un pendule (hydraulique) et préciser la période des oscillations.

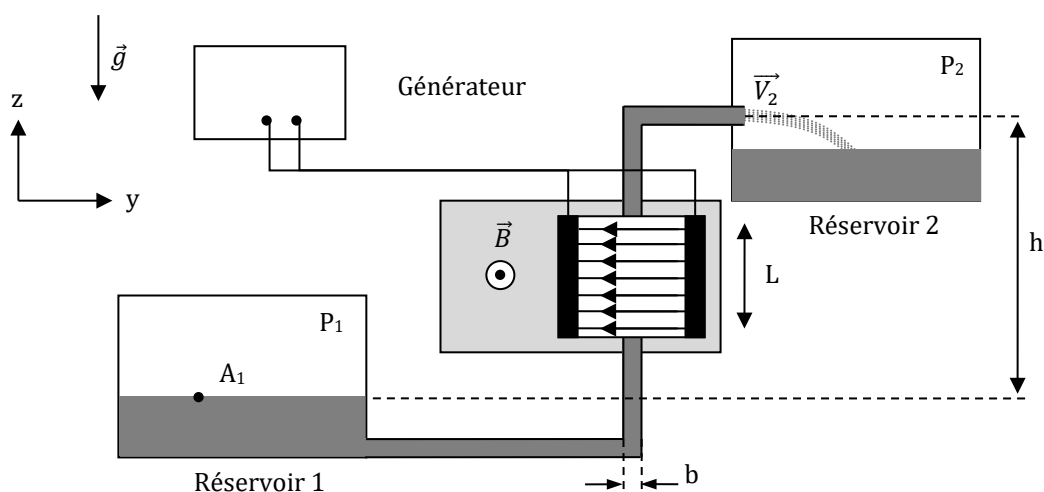
EXERCICE 18 : POMPE MAGNETIQUE (**)

Pour transvaser un liquide conducteur (métal fondu) entre deux réservoirs de pression P_1 et P_2 et dénivelés de h , on fait circuler un courant I dans une zone où règne un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_x$. On supposera que, dans le domaine parcouru par le courant, $\vec{B}$ est uniforme ainsi que la densité de courant $\vec{j}$.

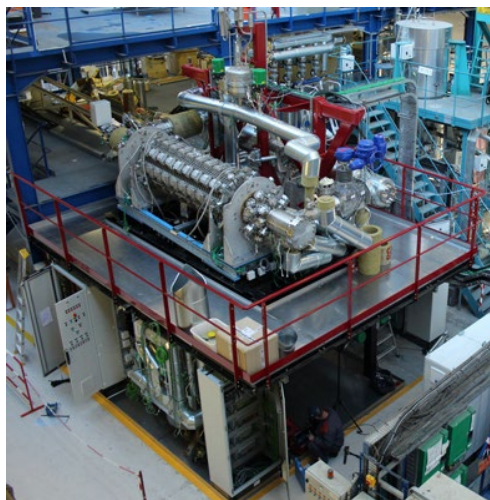
Les orientations sont indiquées sur le schéma ci-dessous.

La canalisation soumise au champ magnétique a une section rectangulaire de longueur a dans le sens de $\vec{B}$ et de largeur b dans le sens du courant.

Le liquide arrive dans le réservoir (2) avec une vitesse v_2 par une canalisation de section s . La surface des réservoirs étant très grande devant s , on peut considérer que les niveaux sont invariables et que l'écoulement est permanent.



1. Calculer le débit de métal fondu en régime permanent. On supposera que le fluide est incompressible et sans viscosité.
2. Quelle est l'intensité minimale nécessaire si : $\rho = 10^4 \text{ kg/m}^3$; $B=0,5 \text{ T}$; $a = 5 \text{ cm}$; $P_1 = P_2$; $g = 10 \text{ m/s}^2$ et $h = 1 \text{ m}$?

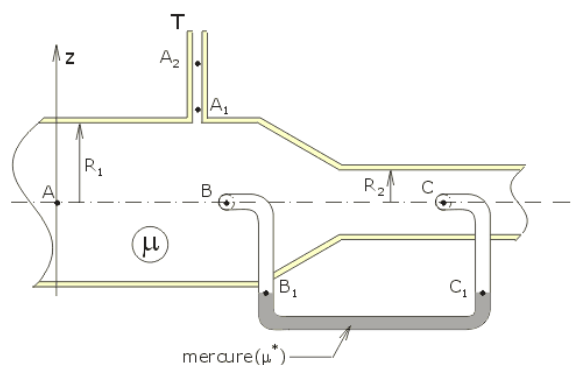


Les pompes magnétiques de Cadarache supposées remplacer les pompes classiques du circuit primaire au sodium

EXERCICE 19 : MESURE D'UN DEBIT (*)

Dans une canalisation, on étudie un déplacement d'eau que l'on modélise par l'écoulement incompressible d'un fluide parfait.

La canalisation horizontale rectiligne comporte deux sections de rayons respectifs R_1 et R_2 . La pression en amont vaut $P(A)=P_A$, avec $z(A)=0$, la masse volumique du fluide est μ



On place un tube T sur la canalisation de rayon R_1 , de hauteur telle que le fluide en écoulement ne puisse en sortir. La pression à l'air libre est la pression atmosphérique P_o . Sur la canalisation est placé un manomètre qui comporte deux prises latérales en B et en C. Il contient, dans sa partie inférieure, du mercure de masse volumique μ^* .

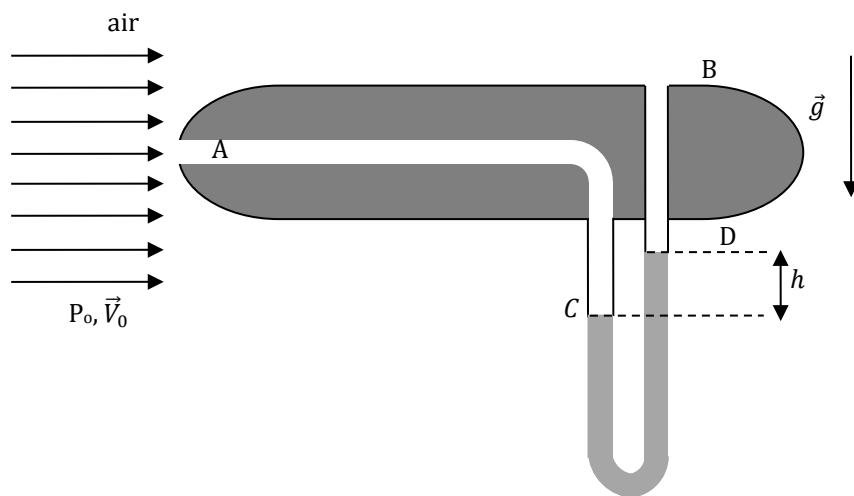
On prendra g_o l'accélération de la pesanteur.

1. Représenter, dans le manomètre, les deux surfaces de séparation mercure-eau. Justifier la différence de hauteur $h = z(C_1) - z(B_1)$ entre les deux surfaces de séparation. On prendra $V_B = V_1$ et $V_C = V_2$ pour les vitesses dans les deux parties de la canalisation.
2. Etablir, en fonction de R_1, P_A, P_o, μ et g_o la hauteur h_o à laquelle monte l'eau dans le tube.
3. Exprimer le débit volumique D dans la canalisation en fonction de R_1, R_2, h, μ, μ^* et g_o .
4. Calculer D et h_o

On prendra : $P_o = 10^5 \text{ Pa}$, $P_A = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $\mu = 10^3 \text{ Kg/m}^3$, $\mu^* = 13,6 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$, $g_o = 9,8 \text{ m/s}^2$, $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 5 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ cm}$.

EXERCICE 20 : TUBES DE PITOT (*)

Les tubes de Pitot sont des dispositifs très utilisés pour mesurer la vitesse d'un écoulement en le perturbant de façon minime.



Le dispositif, de faibles dimensions latérales, ne perturbe pratiquement pas l'écoulement d'air caractérisé par sa masse volumique ρ_0 , sa pression P_0 et sa vitesse loin du tube $\vec{V}_0$.

Les tubes ont des sections très faibles : l'écoulement en B n'est pas modifié par l'orifice.

On admet que la masse volumique de l'air est invariable, hypothèse justifiée tant que la vitesse d'écoulement est très petite devant la vitesse de propagation du son dans ce fluide. On néglige également la viscosité de l'air.

Toutefois, celle-ci ne peut être négligée au voisinage immédiat du tube où se forme une couche limite et où la vitesse passe très rapidement de la valeur que l'on affectera ici à l'écoulement parfait à une valeur nulle.

On admettra qu'à la traversée de cette couche limite, la pression ne varie pratiquement pas. Ainsi, la pression en A (ou en B) dans l'écoulement sera confondue avec celle de l'air au repos à l'intérieure du tube de Pitot.

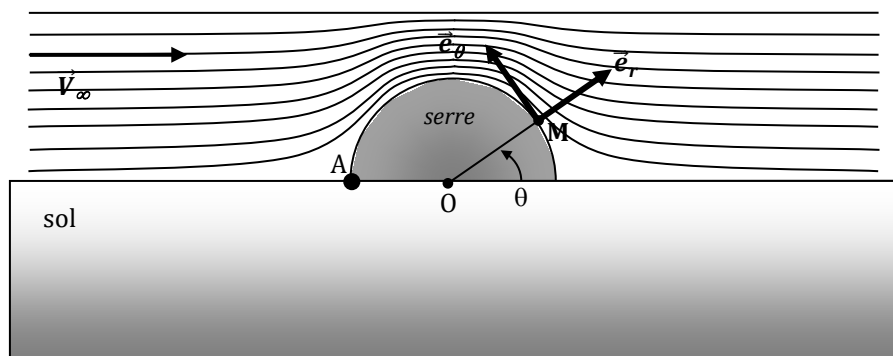
1. Dessiner l'allure de l'écoulement autour du tube. Tracer en particulier la ligne de courant qui aboutit en A et celle qui frôle le tube en B.
2. Que peut-on dire avec une bonne approximation en A et en B ? Calculer les pressions P_A et P_B .
3. Exprimer de deux façons indépendantes la différence de pression en C et en D. En déduire la mesure de v_0 .
4. Données : $\rho_1 = 10^3 \text{ kg/m}^3$; $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$; $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Calculer h .

EXERCICE 21 : SERRE SOUS LA TEMPÊTE (**)

Une serre est protégée par une sorte de toiture en forme de demi-cylindre horizontal de longueur L grande devant son rayon R . Une violente tempête engendre un vent qui, loin de la serre est horizontal, de vitesse orthogonale à l'axe du cylindre et de module V_∞ . L'écoulement est pratiquement incompressible et irrotationnel, de sorte que le champ des vitesses soit le gradient d'une fonction Φ qui, en coordonnées cylindriques, est cherchée sous la forme suivante, indépendante de z :

$$\Phi = A.r.\cos\theta + \frac{B}{r}\cos\theta \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}$$

1. Calculer A et B pour que la vitesse soit horizontale de module V_∞ loin de la toiture et qu'elle soit tangentielle au niveau de la toiture.



2. En admettant que la pression loin de la toiture est uniforme (notée P_∞) et que l'on peut négliger les effets de la pesanteur, déterminer la pression P en tout point de l'espace.
3. Le manque d'étanchéité de la serre impose que la pression à l'intérieur de la serre est celle du point au pied de la serre du côté du vent (A). En déduire le module $\vec{F}$ de la force de pression qui s'exerce sur la toiture.
4. Application numérique : $P_\infty = 10^5 \text{ Pa}$; $\mu = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $V_\infty = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; $R = 2 \text{ m}$; $L = 10 \text{ m}$.

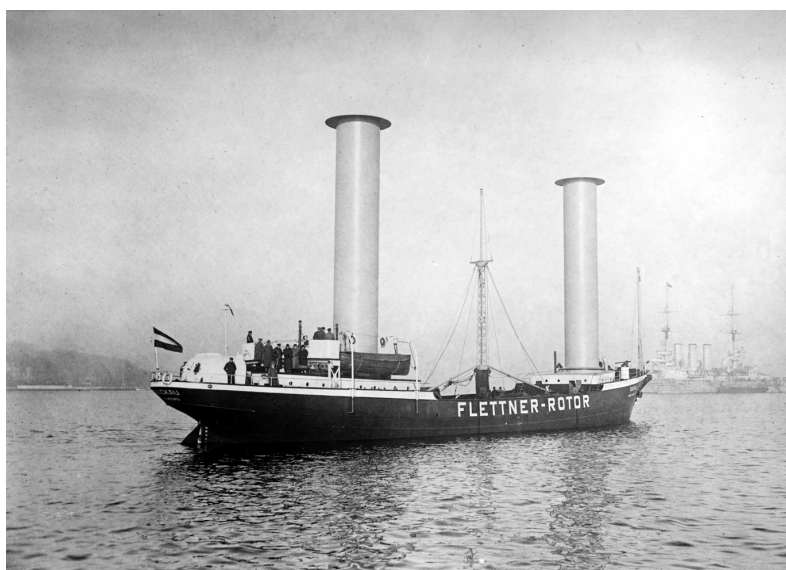
On donne : $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$; $\int_0^\pi \cos \theta \cdot \sin^2 \theta d\theta = 0$

EXERCICE 22 : EFFET MAGNUS (**)

On veut modéliser l'écoulement d'un fluide autour d'un corps en mouvement de translation avec une vitesse de module V et animé d'un mouvement de rotation rapide de vitesse angulaire Ω ; on se place dans le cas d'un cylindre tournant autour de son axe de symétrie et l'on suppose que celui-ci entraîne un mouvement de rotation du fluide ; on admet que, dans le référentiel lié au cylindre le potentiel des vitesses est de la forme :

$$\Phi = V_\infty r \left(\cos \theta + \frac{R^2}{r^2} \cos \theta \right) + C \cdot \theta \text{ où } C \text{ est un terme phénoménologique (constant).}$$

1. Justifier qualitativement l'expression de Φ et notamment justifier que C est du signe de Ω .
2. Calculer la vitesse et la pression en tout point.
3. En déduire la force exercée par l'air sur le cylindre et notamment montrer que cette force dévie latéralement le cylindre.
4. Discuter l'intérêt d'un tel effet sur un ballon.



Navire équipé d'un rotor Flettner fonctionnant sur le principe de l'effet Magnus

EXERCICE 23 : MODELE DE LA HOULE (**)

Pour modéliser simplement les vagues de houle, on adopte les hypothèses suivantes :

- ✓ L'eau est un fluide incompressible de masse volumique ρ sans viscosité.
 - ✓ Les mouvements sont de faible amplitude ; on peut donc négliger les termes du second ordre en v , et en particulier l'accélération convective.
 - ✓ On limite l'étude à des mouvements dans le plan (xOz) ; l'axe (Oz) étant dirigé vers le haut.
 - ✓ Les grandeurs variables sont toutes des fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation ω
 - ✓ On cherche les solutions qui présentent une propagation dans le sens des x croissants.
 - ✓ On ne tient pas compte des phénomènes liés à la tension superficielle.
 - ✓ L'origine des altitudes est prise au niveau de l'interface air/eau en l'absence de houle.
 - ✓ En présence de houle, l'amplitude de l'interface air/eau est : $h(x, t) = h_o \cos(\omega t - kx)$. Les oscillations étant de faible amplitude, on suppose $h_o \ll \frac{1}{k}$
 - ✓ H est la profondeur moyenne : L'altitude du fond est donc égale à $-H$
 - ✓ On introduit la surpression dans l'eau : $p(x, z, t) = P(x, z, t) - P_o + \rho g z$, la différence entre la pression dans l'eau et sa valeur statique en l'absence de houle (P_o étant la pression atmosphérique).
 - ✓ On note p_o la valeur maximale de la surpression pour $z = 0$
 - ✓ On note $\underline{v}_x(x, z, t) = \underline{v}_x(z)e^{j(\omega t - kx)}$; $\underline{v}_z(x, z, t) = \underline{v}_z(z)e^{j(\omega t - kx)}$ et $\underline{p}(x, z, t) = \underline{p}(z)e^{j(\omega t - kx)}$ les représentations complexes de $v_x(x, z, t)$; $v_z(x, z, t)$ et $p(x, z, t)$
1. Justifier la forme donnée aux représentations complexes de $v_x(x, z, t)$; $v_z(x, z, t)$ et $p(x, z, t)$. Quelles relations a-t-on entre la célérité c des ondes de houle, ω, k et la longueur d'onde λ ?
 2. En tenant compte des hypothèses simplificatrices, écrire les trois équations aux dérivées partielles linéaires liant $v_x(x, z, t)$; $v_z(x, z, t)$ et $p(x, z, t)$. En déduire les équations vérifiées par $\underline{v}_x(z)$; $\underline{v}_z(z)$ et $\underline{p}(z)$.
 3. En introduisant les conditions limites, déterminer les fonctions $v_x(x, z, t)$; $v_z(x, z, t)$ et $p(x, z, t)$. On les exprimera en fonction de p_o . Quelles sont les équations $(X(t), Z(t))$ de la trajectoire de la particule fluide dont la position moyenne est (X_o, Z_o) ?
 4. Houle en eau profonde.
 - a. A condition la profondeur peut-elle être considérée comme infinie ? Dans cette hypothèse, quelles sont les expressions de $v_x(x, z, t)$; $v_z(x, z, t)$ et $p(x, z, t)$? Quelle est la nature des trajectoires des particules fluides ?
 - b. En déduire une expression de l'équation de la surface libre $h(x, t)$ puis une première relation entre h_o et p_o .
 - c. Quelle est l'expression de la surpression au niveau de la surface libre ? En supposant toujours que $\lambda \gg h_o$, déterminer une seconde relation entre h_o et p_o . En déduire la relation de dispersion reliant ω et k . En déduire la célérité en fonction de ω .
 - d. AN : la fréquence est de 0,2 Hz. Quelle est la distance entre deux crêtes ? Préciser le critère « profondeur infinie ».
 5. Houle en faible profondeur.
 - a. On considère maintenant la situation où la longueur d'onde est très grande devant la profondeur H et où l'amplitude h_o des ondes de houle est très petite devant H . Déterminer la relation de dispersion liant ω et k . En déduire la célérité c .
 - b. AN : la fréquence est de 0,2 Hz et la profondeur est de 1m. Calculer la célérité ; l'hypothèse « eau peu profonde » est-elle correcte ?
 - c. Expliquer qualitativement, pourquoi les vagues se brisent à l'approche du rivage.

MF4 : DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX

EXERCICE 24 : CALCUL D'UNE FORCE DE VISCOSITE (*)

On étudie un écoulement visqueux dont le champ des vitesses est : $\vec{V}(z,t) = a\omega.e^{-kz}.\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$, l'axe (Ox) étant horizontal.

Calculer la densité volumique des forces de viscosité et l'accélération. En déduire une relation entre ω , k et la viscosité cinématique ν en supposant qu'il n'y a pas de gradient de pression horizontal.

EXERCICE 25 : ORDRE DE GRANDEUR D'ÉPAISSEUR DE COUCHES LIMITES (*)

1. Soit un obstacle de longueur caractéristique L se déplaçant à la vitesse V dans un fluide de viscosité cinématique ν . Déterminer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite δ .
2. On donne $\nu_{\text{air}} = 15,6.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $\nu_{\text{eau}} = 1,00.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $\nu_{\text{huile d'olive}} = 90,0.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Déterminer δ pour une voiture se déplaçant dans l'air à 100km/h; une planche à voile se déplaçant dans l'eau à 20 km/h et une olive tombant dans de l'huile d'olive à la vitesse de 1 cm/s. Conclusion ?

EXERCICE 26 : TRANSITION LAMINAIRE/TURBULENT (*)

Un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique de section S est caractérisé par son champ des vitesses

$\vec{V}(r,t) = (V_o(t) - ar^2)\vec{e}_z$ où r est la distance du centre de la conduite au point considéré. La vitesse $V_o(t)$ vérifie :

$$\frac{dV_o}{dt} = k > 0. \text{ A } t=0, \text{ le nombre de Reynolds vaut : } R_e(0) = 10.$$

1. Donner l'ordre de grandeur de la vitesse initiale sur l'axe de la conduite.
2. Au bout de combien de temps l'écoulement devient-il turbulent ?

Le fluide considéré est de l'eau et on donne : $\nu_{\text{eau}} = 1,00.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $k=1 \text{ m/s}$; $S=100 \text{ cm}^2$

EXERCICE 27 : FORCE DE TRAÎNÉE SUR UNE SPHERE (**)

Une bille en acier de rayon a tombe en chute libre. En vous aidant du graphique et des tableaux de données, déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse limite si le fluide dans lequel tombe la bille est de l'air; de l'eau ou de l'huile et si $a=1 \text{ mm}$ ou 2 cm .

On admettra que lorsque la vitesse est constante, l'action du fluide sur la bille est traduite par la force de traînée et par la poussée d'Archimède qui a la même expression qu'en statique.

Re	0,1	1	10	50	10^2	10^3	10^4	10^5	Re_c	10^6
C_x	245	28	4,4	1,7	1,1	0,47	0,43	0,47		0,14

	Acier	Eau	Huile	Air (CUTP)
$\rho(\text{kg/m}^3)$	8000	1000	900	1,2
$\eta(\text{Pa.s})$		10^{-3}	1,0	$1,7.10^{-5}$

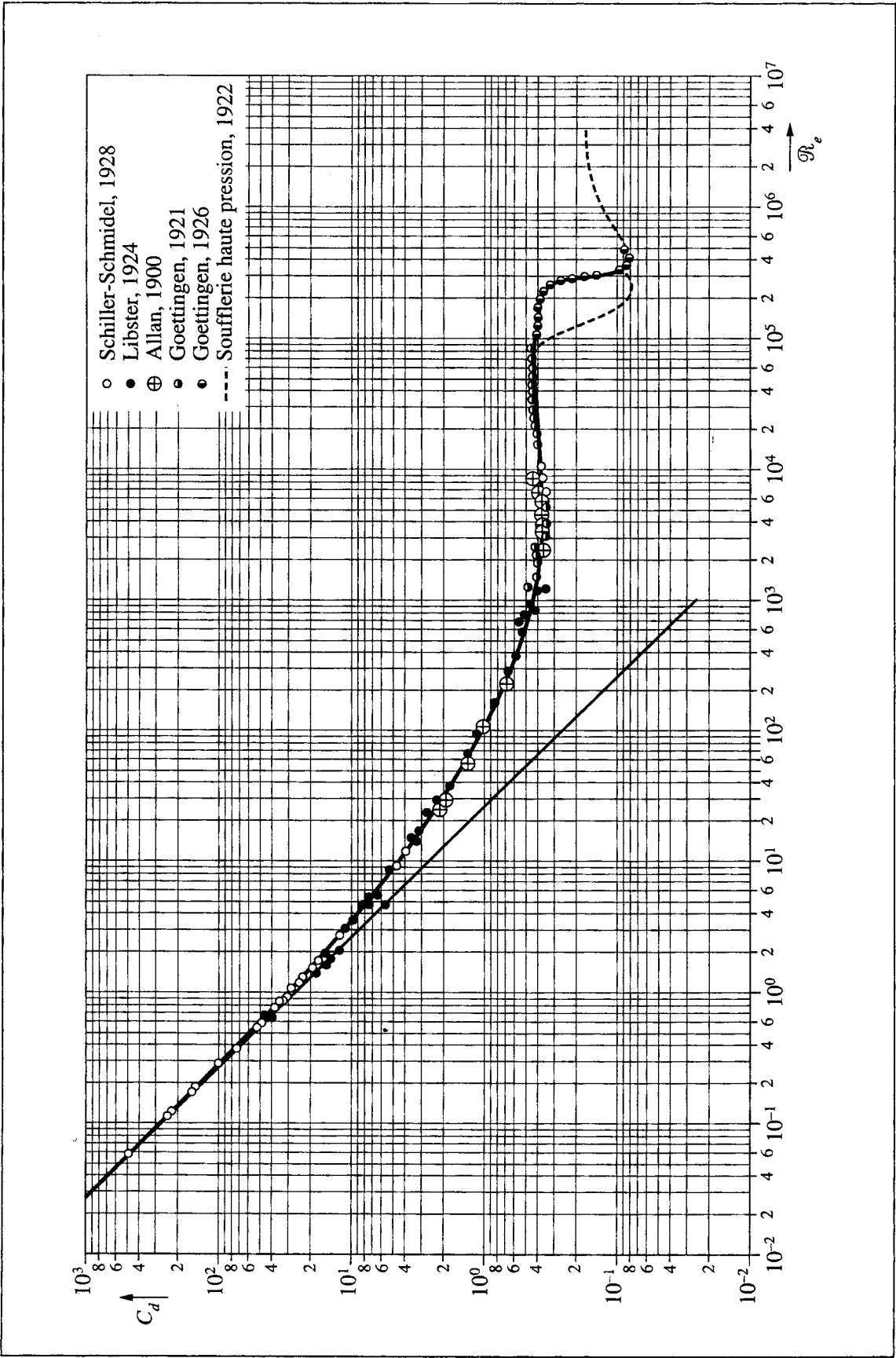


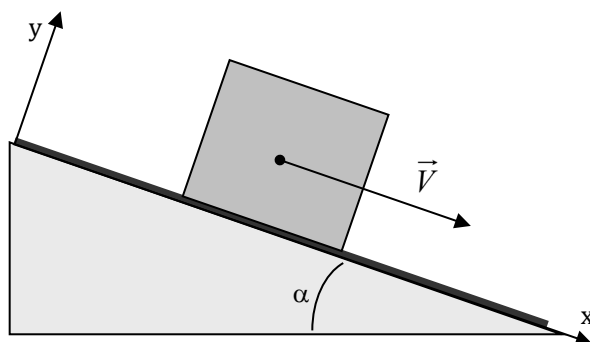
Fig. 4 : Coefficient de traînée C_d d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds Re . Pour les faibles valeurs de ce nombre, $C_x = 24/Re$ (formule de Stokes) expression représentée par la droite de pente - 1 sur le graphe.

EXERCICE 28 : MESURE D'UNE VISCOSITE (**)

Un bloc parallélépipédique de masse $M = 100 \text{ kg}$, d'aire $S = 2 \text{ m}^2$, glisse sur un plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle de $\alpha = 30^\circ$ avec une vitesse V de 1.2 m/s . Une couche d'huile d'épaisseur 1 mm sépare le bloc du plan incliné.

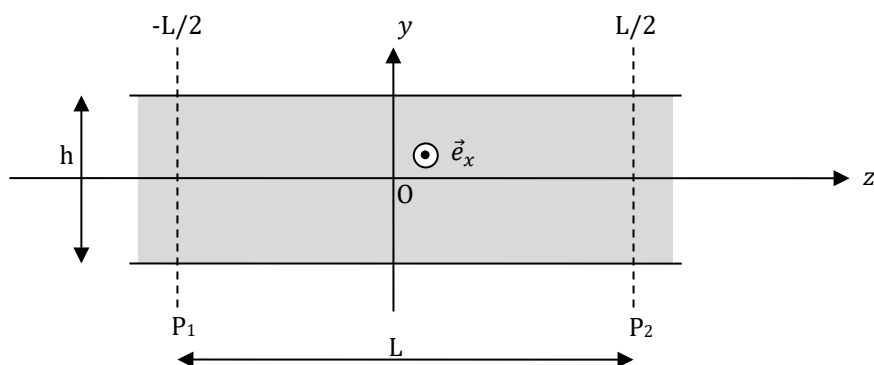
Déterminer le coefficient de viscosité de l'huile. On considère l'écoulement d'un fluide visqueux à travers un tuyau rectangulaire. On suppose le problème indépendant du temps et de y .

Par ailleurs, on suppose que la vitesse du fluide est parallèle à $\vec{e}_x$ et est fonction de y .



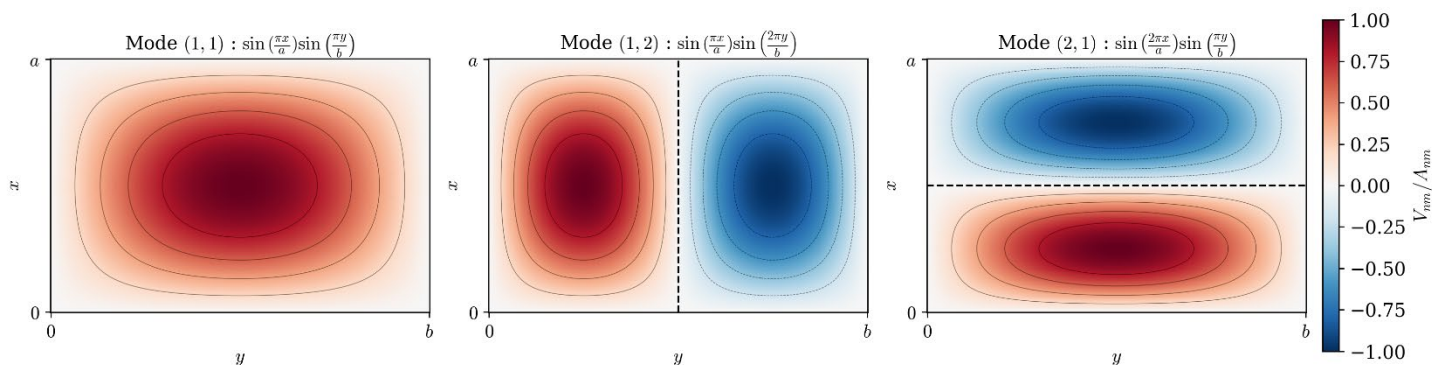
EXERCICE 29 : TRANSITION LAMINAIRE/TURBULENT D'UN ECOULEMENT DE POISEUILLE (***)

On considère un écoulement dans une conduite de section carrée ($a \times b$). La conduite a une longueur totale L et on note P_1 la pression en amont, P_2 la pression en aval, avec $\Delta P = P_2 - P_1$



Déterminer le champ des vitesses dans la conduite sous forme d'un développement en série.

Déterminer pour quelle valeur de ΔP l'écoulement devient turbulent.



Exemples des modes propres d'écoulement à déterminer

EXERCICE 30 : ECOULEMENT DE COUETTE ENTRE DEUX PLANS (**)

Deux longues plaques sont séparées par une distance e . L'espace entre ces plaques est rempli par un liquide de coefficient de viscosité constant η . La plaque supérieure se déplace à une vitesse constante V_0 , la plaque inférieure est immobile.

1. Trouver le profil de vitesse, c'est à dire l'expression de la vitesse v du fluide à une distance y de la plaque inférieure.
2. Déterminer la valeur moyenne de la vitesse du fluide entre les deux plaques.
3. On donne $e = 1\text{ mm}$, $\eta = 0.3\text{ Pl}$, $V_0 = 1.5\text{ m/s}$, $\mu = 885\text{ kg/m}^3$. Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement, justifier son caractère laminaire.

EXERCICE 31 : CANALISATION RELIANT LA RAFFINERIE A UN DEPOT DE STOCKAGE (*)

Du fuel lourd de masse volumique $\mu = 910\text{ kg/m}^3$, de viscosité dynamique η est transporté, dans l'enceinte d'une raffinerie, de A vers B à travers une conduite cylindrique d'axe horizontal, de longueur $L = 200\text{ m}$ et de rayon $R = 8\text{ cm}$ avec un débit volumique $Q = 36\text{ m}^3/\text{h}$. Les pressions en A et B sont : $P_A = 3,6\text{ atm}$ et $P_B = 1\text{ atm}$.



On admet qu'un régime d'écoulement permanent et laminaire est établi et que le débit est donnée par la formule de Poiseuille :

$$Q = \left(\frac{P_A - P_B}{L} \right) \frac{\pi R^4}{8\eta}$$

1. Calculer la vitesse moyenne d'écoulement du fuel.
2. Calculer la viscosité cinématique et la viscosité dynamique du fuel transporté.
3. Calculer le nombre de Reynolds de cet écoulement. Justifier alors son caractère laminaire.
4. Montrer que la puissance P de la pompe de transport est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne. Calculer P .
5. Quel serait le rayon R_0 d'une conduite cylindrique qui transporte de l'eau, de viscosité dynamique $\nu_o = 9.10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$ à la vitesse moyenne de 2 m/s pour assurer la similitude d'un tel écoulement avec celui du fuel étudié ? Commenter.

EXERCICE 32 : VISCOSIMETRE DE COUETTE (***)

Un viscosimètre de Couette est un dispositif permettant de mesurer la viscosité dynamique d'un fluide dont le principe est le suivant : un moteur fait tourner un cylindre dans le fluide dont on veut mesurer la viscosité. Le fluide exerce un couple de frottement visqueux sur le cylindre. La mesure de ce couple permet alors de remonter à la viscosité du fluide.



Viscosimètre de Couette

Le but de l'exercice est de déterminer le couple exercé par le fluide sur le cylindre C_1 . Pour cela, on modélise le dispositif comme suit : un fluide visqueux, de coefficient de viscosité η et incompressible occupe le volume délimité par deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) et de hauteur h ($h \gg R_1$ et R_2). Le cylindre intérieur C_1 tourne à vitesse angulaire constante Ω autour de son axe tandis que le cylindre 2 reste immobile. On se place en régime établi et on suppose l'écoulement laminaire.

Déterminer le couple qu'il faut exercer sur le cylindre C_1 pour maintenir sa vitesse de rotation constante.

Données : contrainte visqueuse pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique : $\vec{\sigma} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) \vec{e}_\theta$

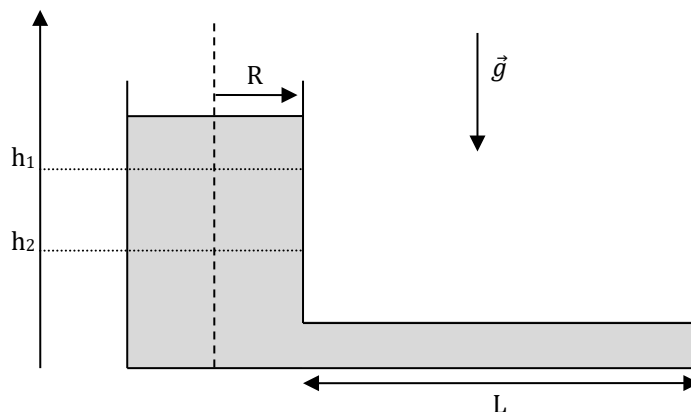
EXERCICE 33 : MESURE DE VISCOSITE (**)



Viscosimètre d'Oswald (ou de Poiseuille)

Le fonctionnement du viscosimètre d'Oswald, repose sur l'écoulement de Poiseuille : On mesure le temps d'écoulement d'un fluide dans un capillaire et on en déduit la viscosité dynamique du fluide. La mesure ne peut être faite que pour les fluides incompressibles, newtoniens et dans le cas d'un écoulement laminaire dans le capillaire. On peut étudier l'influence de la température sur la viscosité du fluide en thermalisant le récipient à une température donnée.

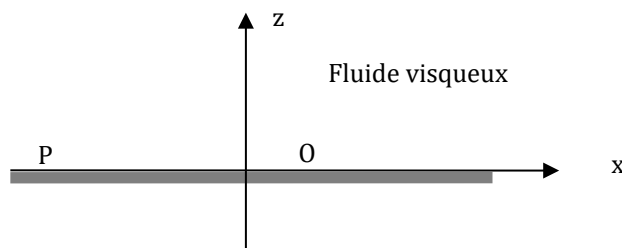
Pour comprendre le principe de l'appareil, on modélise le dispositif comme suit : le fluide contenu dans un récipient cylindrique de rayon R s'écoule lentement à travers un tube capillaire de longueur L et de rayon a . On mesure le temps τ de descente du fluide entre deux niveaux d'altitude h_1 et h_2 ($h_2 < h_1$). Le fluide est supposé incompressible ($\rho = \text{cste}$), son coefficient de viscosité est η . Le diamètre du tube est très faible devant celui du cylindre ($a \ll R$). Déterminer l'expression donnant le coefficient de viscosité en fonction de τ , h_1 , h_2 , ρ , a , g et R . On précisera toutes les hypothèses faites et les vérifiera à posteriori.



Application numérique : $a = 0,8 \text{ mm}$; $2R = 10 \text{ cm}$; $h_1 = 15 \text{ cm}$; $h_2 = 12 \text{ cm}$; $L = 50 \text{ cm}$ et on a obtenu : $\tau = 10 \text{ mn } 10 \text{ s}$.

EXERCICE 34 : RETOUR SUR L'EFFET DE PEAU (***)

La plaque P est animée dans son plan d'un mouvement oscillatoire sinusoïdal de pulsation ω . Elle est surmontée d'un fluide visqueux de coefficient de viscosité η .



On limite notre étude à un voisinage du point O centre de la plaque (on s'intéresse au mouvement du fluide suffisamment loin des extrémités de la plaque). Les effets de la pesanteur sont négligés.

1. Montrer que l'on peut ramener à un problème à une dimension avec un écoulement associé au champ des vitesses : $\vec{V} = V(z, t)\vec{e}_x$.
2. Déterminer la solution physique correspondante (on cherchera une solution à variables sinusoïdales dans le temps), et commenter les résultats obtenus.

On posera $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}}$.

3. Déterminer la puissance moyenne de l'opérateur permettant de maintenir les oscillations de la plaque.

EXERCICE 35 : COUCHE LIMITE LAMINAIRE (*)

Un objet de forme quelconque (sans arêtes vives de façon à limiter les turbulences) est placé dans l'écoulement d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η ; le fluide est infiniment étendu et la vitesse du fluide à grande distance est v_∞ . On suppose que l'écoulement dans la couche limite est laminaire ce qui correspond en pratique à un nombre de Reynolds inférieur à 10^5 .

On note : δ l'épaisseur de la couche limite ; l la longueur caractéristique de l'obstacle et Re le nombre de Reynolds.

1. Pour une couche limite laminaire, on pose classiquement $\delta = \frac{l}{\sqrt{Re}}$. On se propose de retrouver l'expression de l'ordre de grandeur de la couche limite.
 - a. Quelle condition doit vérifier la direction de la vitesse dans la couche limite ? En assimilant localement la surface de l'obstacle à un plan (xOz) , écrire une équation approchée de l'équation locale de la dynamique des fluides. On fera abstraction de la pesanteur et on supposera l'écoulement permanent.

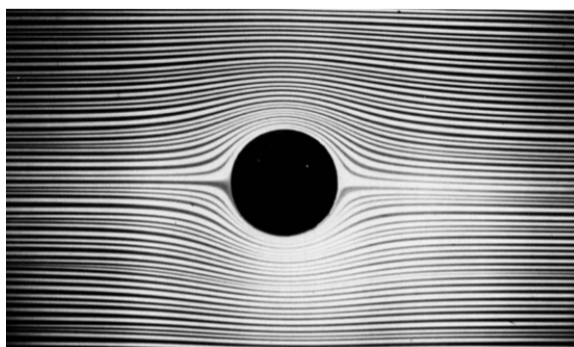
- b. Montrer que la pression est pratiquement uniforme le long de la normale à la surface du solide. Etablir aussi que, le long de l'obstacle, l'écart maximal de pression est de l'ordre de ρv_∞^2 .
 - c. En examinant les ordres de grandeur des termes de l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe (Ox) , retrouver l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite.
 - d. Pour quelles valeurs du nombre de Reynolds ce résultat est-il acceptable ?
2. La force de trainée s'écrit : $F_{trainée} = \frac{1}{2} C_x \rho v_\infty^2 S$. Dans un large domaine, pour de nombres de Reynolds importants (entre 10^3 et 10^5 environ) C_x est quasiment indépendant de la vitesse.
- a. Peut-on expliquer ce phénomène à partir de considérations d'ordre de grandeur ?
 - b. Dans le domaine de vitesse où C_x est constant, la force de trainée dépend-elle de la viscosité ? Commenter.

EXERCICE 36 : FORMULE DE STOKES (***)

Pour des faibles vitesses, en régime linéaire et permanent, le champ des vitesses d'un fluide incompressible autour d'une sphère a pour expression, en coordonnées sphériques :

$$v_r = v_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right)$$

$$v_\theta = -v_\infty \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right)$$



Pouvez-vous en déduire la formule de Stokes ?

Donnée : Contrainte visqueuse dans le cas d'un champ des vitesses de la forme (coordonnées sphériques) :

$$\vec{\sigma} = \eta \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta$$

EXERCICE 37 : ECOULEMENT DE COUETTE COMPRESSIBLE (***)

Déterminer l'évolution des pressions dans les deux réservoirs, mettre en évidence un temps caractéristique.

