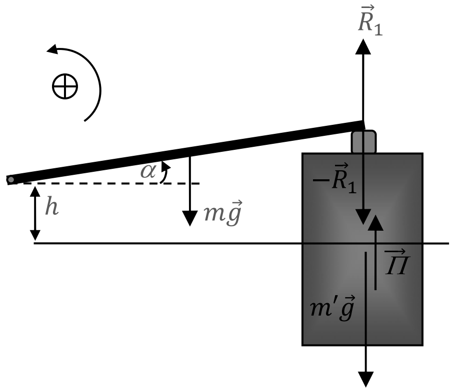
Bouée (Corrigé)



1.

On note H la hauteur de la bouée.

Equilibre du système {planche, bouée} :

TMC planche : $-\frac{1}{2}mLg + LR_1 = 0$

TRC bouée : $-R_1 + m^*g - m'g = 0$ avec $m^* = \rho S(H - h - Lsin\alpha_o)$

D'où la relation à l'équilibre : $\frac{m}{2} + m' = \rho S(H - h - Lsin\,\alpha_o)$

Equilibre du système {planche, bouée, homme sur la bouée} :

TMC planche : $-\frac{1}{2}mLg + LR_1 = 0$

TRC bouée : $-R_1 + m^*g - m'g - m_h g = 0$ avec $m^* = \rho S(H - h - Lsin\alpha)$

D'où la relation à l'équilibre : $\frac{m}{2} + m' + m_h = \rho S(H - h - Lsin\,\alpha)$

En combinant les deux relations d'équilibre, on obtient : $sin\alpha = sin\alpha_o - \frac{m_h}{LS\rho}$

La limite où l'homme garde les pieds secs correspond au cas où $sin\alpha = -\frac{h}{L}$

$\Rightarrow$ On en déduit la masse maximale de l'homme : $m_h = L\rho S\left(\sin\alpha_o + \frac{h}{L}\right)$ AN :$m_h = 62\ kg$

2.

Valeur de α quand l'enfant est sur la bouée : $sin\alpha_e = \sin\alpha_o - \frac{m_e}{LS\rho} \Rightarrow \alpha_e = 0{,}084\ rad$ (4,8°)

On modélise la poussée supplémentaire exercée par l'enfant par une force sinusoïdale : $F = F_o \cos\omega t$

TMC appliqué à la planche : $-\frac{1}{2}mLg + LR_1 = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\alpha}$

TRC appliqué à la bouée : $-R_1 + \rho Sg(H - h - L\sin\alpha) - m_e g - m'g + F = m'L\,\ddot{\alpha}$

En éliminant R_1 et en remplaçant $H - h$ par $\sin\alpha_o + \frac{1}{\rho S}\left(\frac{m}{2} + m'\right)$ et m_e par $\rho LS(\sin\alpha_o - \sin\alpha_e)$, on trouve :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3}m + m'\right)}_{m''}L^2\ddot{\alpha} = FL + \rho SL^2 g(\sin\alpha_e - sin\alpha)$$

$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \omega_o^2\alpha = \omega_o^2\alpha_e + \frac{F}{m''L}$ avec $\omega_o^2 = \frac{\rho Sg}{m''} \Rightarrow$ En posant $X = \alpha - \alpha_e$ on obtient : $\ddot{X} + \omega_o^2 X = \frac{F}{m''L}$

En régime sinusoïdal forcé, l'amplitude de X vaut donc :

$$X_m = \frac{F_o}{m''L|\omega^2 - \omega_o^2|}$$

La limite où l'enfant garde les pieds au sec, correspond à $X_m = \alpha_e + \frac{h}{L}$

On en déduit la valeur maximale de F_o : $F_m = (\omega^2 - \omega_o^2)(\frac{1}{3}m + m')L\left(\alpha_e + \frac{h}{L}\right)$

AN : $\frac{F_m}{g} = 27kg$

Pour que l'enfant ait les pieds dans l'eau, il faut qu'il exerce une poussée du même ordre de grandeur que son poids.