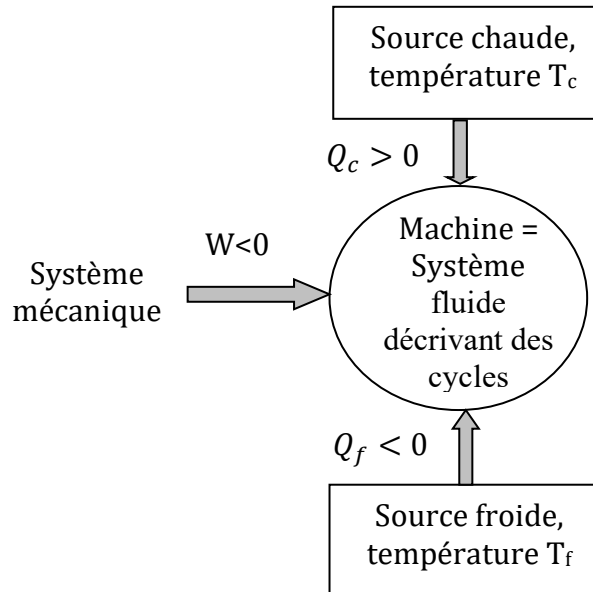


# CORRIGE CENTRALE PC I 2024

## A propos de l'environnement marin

### Partie A. L'énergie thermique des mers

Q1. Orienter les transferts d'énergie vers le système les reçoit :



Q2.

- Le rendement du moteur de Carnot (à donner directement) est :

$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{273+5}{273+26} = 0,070 \text{ (T en Kelvin !!)}$$

- Valeur très faible (valeurs centrale électrique 30 à 50 %) car l'écart entre les températures des deux sources est faible.

Q3.

- Par hypothèse pour que l'installation soit rentable, il faut que l'écart de température entre les eaux de surface et les eaux profondes soit d'au moins  $20^\circ\text{C}$ , il faut donc prélever l'eau froide à au moins **1000 m** de profondeur.

Q4.

- HYP (souvent oubliées)** : On suppose que l'eau est **incompressible et au repos**
- La relation de la statique des fluides donne :

$$p(1000\text{m}) = P^o + \rho_1 g h = 10^5 + 10^3 * 9,8 * 1\ 000 = 99 \text{ bar}$$

Q5.

- Avantages : la différence de température entre les sources est gratuite ; production de travail sans dégagement de  $\text{CO}_2$ ...
- Inconvénients : pression élevée donc problème de résistance mécanique de l'installation ; milieu marin risque de corrosion ; rendement faible...

Q6.

- Point critique de température  $T_c = 132^\circ\text{C}$  et de pression  $P_c = 110 \text{ bar}$ , au-dessus du point critique on ne peut plus différencier les phases liquides et gazeuses, elles ont le même indice de réfraction.

## DOCUMENT RÉPONSE 1

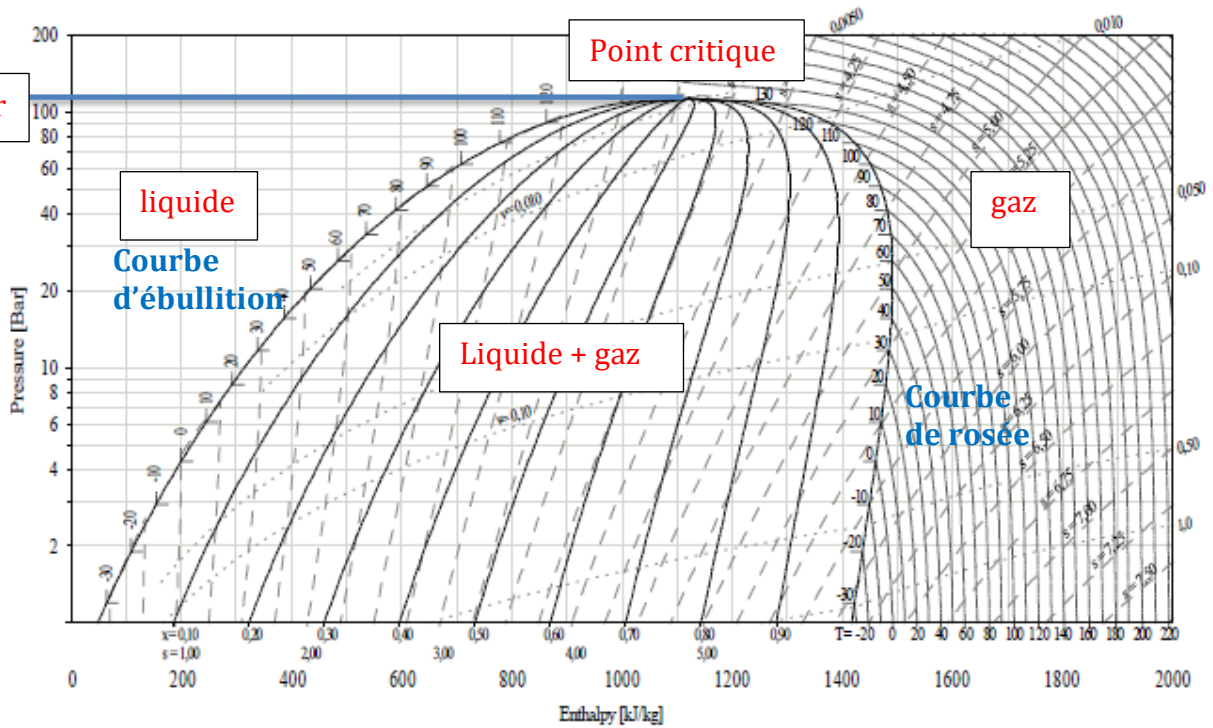
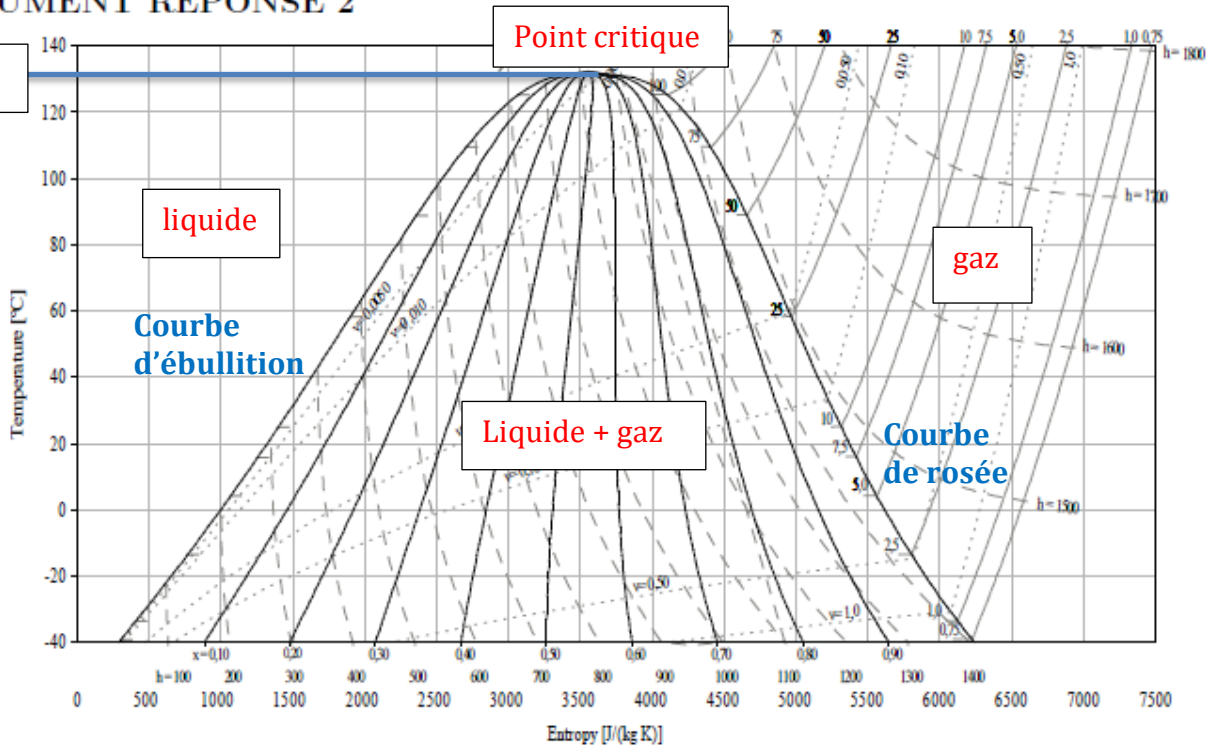


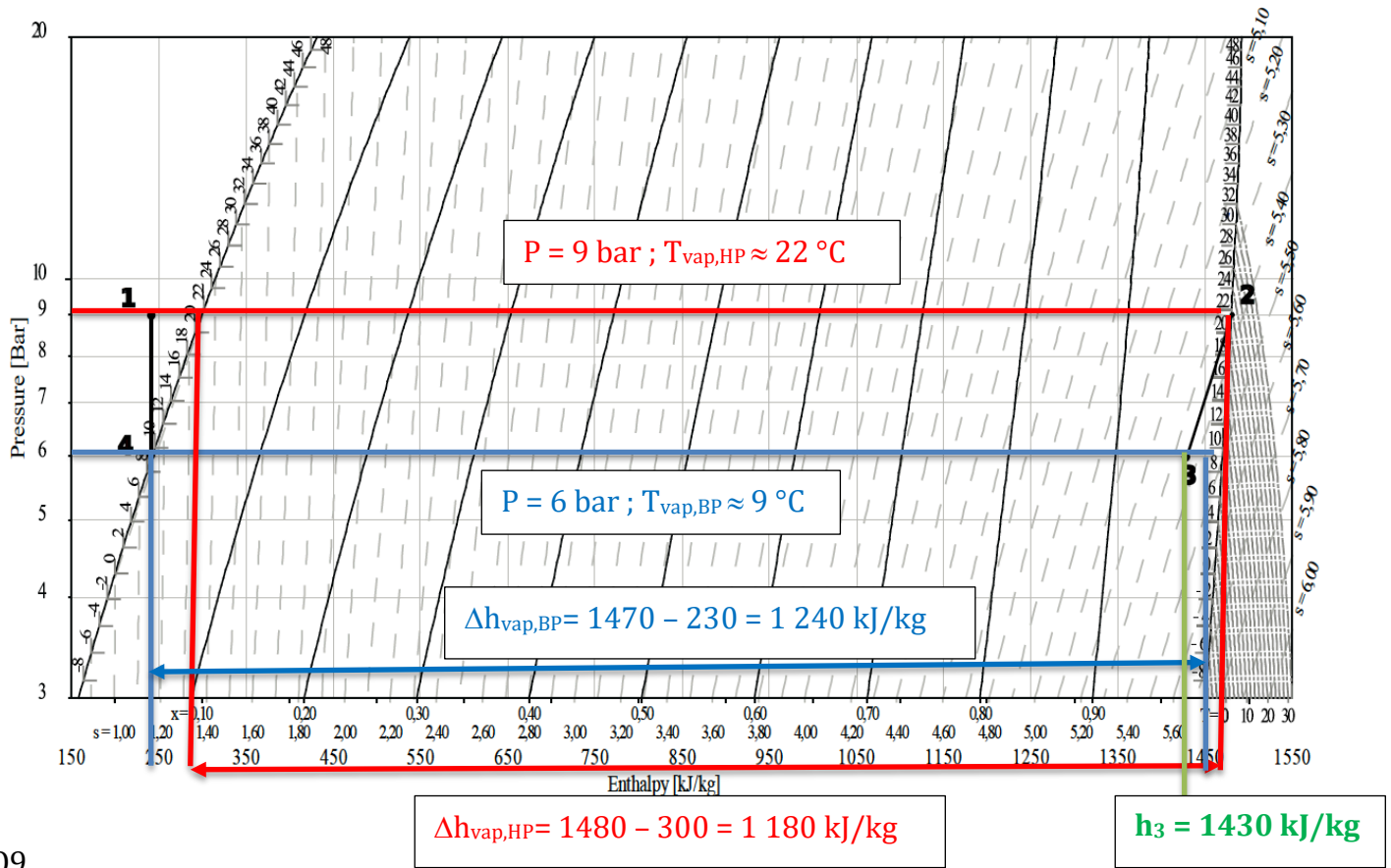
Diagramme de l'ammoniac ( $P, h$ ). DTU, Department of Energy Engineering,  $s$  en  $(\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1})$ ,  $v$  en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $T$  en  $^{\circ}\text{C}$ , M.J. Skovrup & H.J.H Knudsen (23-10-03).

## DOCUMENT RÉPONSE 2



Q7 et Q8.

- Tolérance sur les résultats (établies en réunion de barème) : Les lectures de températures sont faites à l'unité près, les lectures d'enthalpies massiques à 30 kJ/kg près et les lectures d'entropies massiques à 0,1 kJ/K/kg.



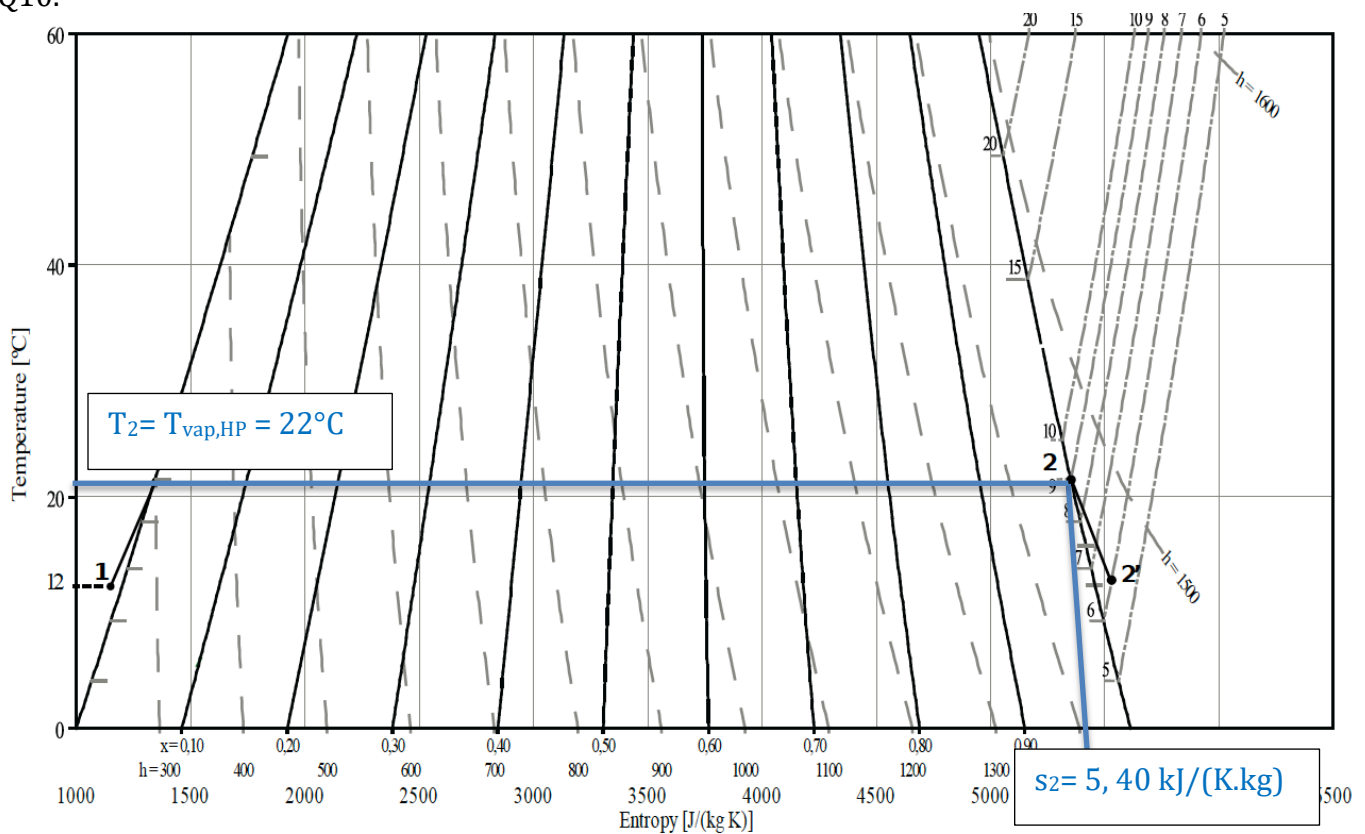
Q9.

- Une transformation isentropique est une adiabatique réversible. Sur le diagramme on constate que cette transformation est également isenthalpe.
- Pour une phase condensée idéale, supposée incompressible, on peut écrire :

$$ds = c \frac{dT}{T} ; dh = cdT \text{ et donc } dh = Tds$$

Ainsi : une isentropique est une isenthalpique d'où 4-1 qui est verticale dans le diagramme (P,h).

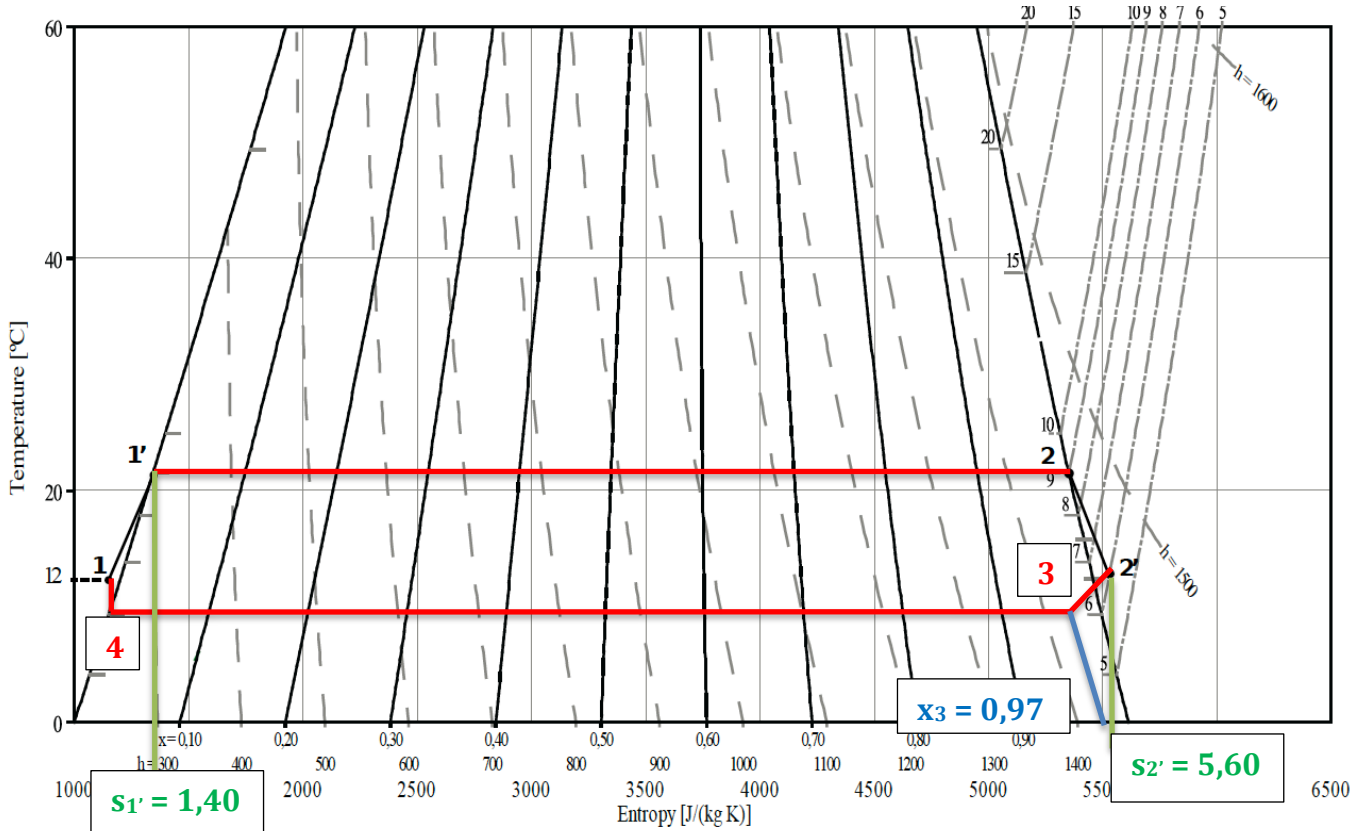
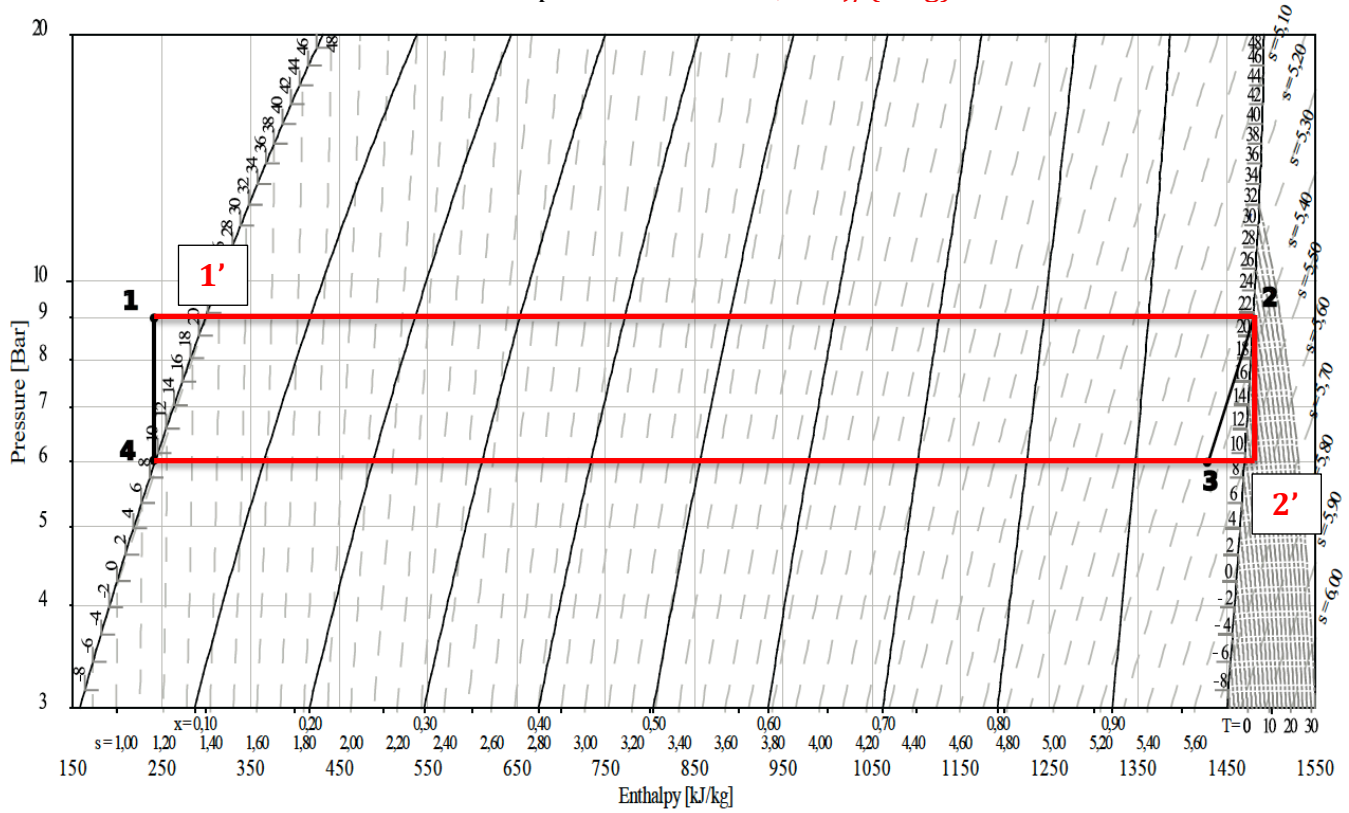
Q10.



- Par lecture graphique, on a :  $T'_2 = 13\text{ }^\circ\text{C}$
- Par lecture graphique,  $h_2$  est déterminé précédemment :  $h'_2 = h_2 = 1480\text{ kJ/kg}$ .
- Par lecture graphique, on a :  $s'_2 = 5.60\text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$
- Au point 2',  $\text{NH}_3$  est à l'état gazeux : **Vapeur sèche** (Le terme « sèche » est obligatoire)

Q11.

- $T_3 = T_{\text{vap,BP}} = 9\text{ }^\circ\text{C}$  ;
- $h_3$  déterminée par lecture graphique sur le document 3 :  $h_3 = 1430\text{ kJ/kg}$  ;
- La transformation 2-3 est isentropique d'où  $s_3 = s_2 = 5,40\text{ kJ}/(\text{K}\cdot\text{kg})$



Q13.

Point i	T <sub>i</sub> (°C)	P <sub>i</sub> (bar)	x <sub>i</sub>	h <sub>i</sub> (kJ.kg <sup>-1</sup> )	s <sub>i</sub> (kJ.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )
1	12	9	0	240	1,15
1'	22	9	0	300	1,40
2	22	9	1	1 480	5,40
2'	12	6	1	1 480	5,60
3	9	6	0,97	1 430	5,40
4	9	6	0	240	1,15

Q14.

- Pour la transformation 1-1' NH<sub>3</sub> est liquide donc :

$$c_a = \frac{h_1 - h_{1'}}{T_1 - T_{1'}} = \frac{240 - 300}{12 - 22} = 6,0 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

on trouve 4,7 kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> dans la littérature.

Q15.

- On utilise plutôt de l'ammoniac que de l'eau car les températures de changement d'état sont plus faibles que celles de l'eau.
- Il s'agit d'un oxydant moins fort que l'eau, l'odeur caractéristique du gaz permet de détecter une fuite, par contre il s'agit d'un gaz toxique.

Q16. COURS, quelques rappels :

- **Noter que si à un moment donné dans votre démonstration vous utilisez :  $\Delta U$  ou  $\Delta E$  mais aussi  $W$  ou  $Q$ , c'est que c'est faux. En revanche :  $\frac{DE}{Dt}$ ,  $\frac{DU}{Dt}$ ,  $\dot{W}$ ,  $\dot{Q}$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta u$  sont OK**
- Faire un bilan d'énergie totale (et non pas d'énergie interne ou d'enthalpie) puis appliquer le premier principe de la thermodynamique :

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{dE}{dt} + D_{ms}e_s - D_{me}e_e = P_{pression} + P_u + P_{th}$$

- Rappeler qu'en régime stationnaire, on a :

$$\frac{dE}{dt} = 0 \text{ et } D_m = D_{me} = D_{ms}$$

- Négliger les variations de l'énergie mécanique massique (et non pas l'énergie massique elle-même).
- Avec ces deux hypothèses, on arrive à :

$$D_m(u_s - u_e) = P_{pression} + P_u + P_{th}$$

- Ne pas confondre travail et puissance.
- Faire le calcul de la puissance des forces de pression à partir des travaux en entrée et en sortie :

$$P_{pression} = \frac{P_e \delta V_e - P_s \delta V_s}{dt} = D_m(P_e v_e - P_s v_s)$$

- Utiliser enfin :

$$h = u + Pv$$

Q17.

- Le passage dans l'évaporateur correspond à la transformation 1 - 2, qui est la même que le cycle soit réel ou virtuel.
- Il n'y a pas de pièces mobiles dans l'évaporateur donc  $\mathcal{P}_u = 0$
- Le PPI appliqué à l'ammoniac lors de la traversée des condenseurs donne :  
 $\dot{m}_1(h_2 - h_1) = \mathcal{P}_{thEV} = \mathcal{P}_{thER} = 0,4 * (1480 - 240) = 496 \text{ kW} > 0$
- NH<sub>3</sub> reçoit un transfert thermique pour être vaporisé, c'est logique.  
*Remarque : la valeur numérique de  $\dot{m}_1$  se trouve tout en fin d'énoncé*

Q18.

- Lors du passage dans l'évaporateur, l'eau ne reçoit aucun travail utile.
- On applique le PPI à l'eau lors de la traversée de l'évaporateur :

$$\mathcal{P}_{\text{thec}} = \dot{m}_e (h_6 - h_5) = \dot{m}_e c_e (T_6 - T_5) < 0 \text{ car } T_6 < T_5$$

Q19.

- L'évaporateur étant globalement adiabatique signifie que le transfert thermique reçu par l'ammoniac vient de l'eau :

$$\mathcal{P}_{\text{thec}} + \mathcal{P}_{\text{thE}} = 0$$

- d'où :

$$\dot{m}_e (T_6 - T_5) = -\mathcal{P}_{\text{thER}}$$

$$\dot{m}_e = -\mathcal{P}_{\text{thER}} / (T_6 - T_5) = 496.10^3 / (4.10^3 * 1,5) = 83 \text{ kg.s}^{-1}$$

Q20.

- La traversée de la vanne étant rapide, on peut supposer que les échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire, on peut donc supposer la transformation adiabatique  $\mathcal{P}_{\text{th}} = 0$
- Il n'y a pas de parties mobiles donc  $\mathcal{P}_u = 0$ ,
- D'après le PPI appliqué à l'ammoniac lors de la traversée de la vanne, on peut dire que la traversée de la vanne est isenthalpique (hypothèse de l'énoncé)

Q21.

- Le régime étant stationnaire, on a conservation du débit massique dans un tdc et donc on peut appliquer une loi « des nœuds » entre 2' et 3 avec les débits massiques :

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3 = 0,45 \text{ kg.s}^{-1}$$

Q22.

- L'ammoniac ne reçoit pas de travail utilise lors de la traversée des condenseurs :  $P_u = 0$
- On applique le PPI à l'ammoniac lors de la traversée de ces condenseurs :

- $\mathcal{P}_{\text{CR}} = \dot{m}_3 (h_4 - h_3) = 0,45 * (240 - 1430) = -535 \text{ kW}$

- $\mathcal{P}_{\text{CV}} = \dot{m}_1 (h_4 - h_3) = 0,40 * (240 - 1430) = -476 \text{ kW}$

- Ces deux valeurs sont négatives car NH<sub>3</sub> cède de l'énergie lors de la liquéfaction.

Q23.

- Lors du passage dans le condenseur, l'eau ne reçoit aucun travail utile.
- On applique le PPI à l'eau lors de la traversée du condenseur :

$$\mathcal{P}_{\text{ef}} = \dot{m}_e c_e (T_8 - T_7)$$

- Le condenseur étant globalement adiabatique signifie que le transfert thermique prélevé à l'ammoniac est reçu par l'eau

$$\mathcal{P}_{\text{ef}} = -\mathcal{P}_{\text{CR}}$$

- On a donc :

$$-\dot{m}_3 (h_4 - h_3) = \dot{m}_e c_e (T_8 - T_7) = 535 \text{ kW}$$

- D'où :

$$T_8 = 5 + 535.10^3 / (83 * 4.10^3) = 6,6^\circ\text{C}$$

Q24.

- En supposant la détente de l'ammoniac dans la turbine adiabatique ( $P_{th} = 0$ ), le PPI donne :

$$\mathcal{P}_{\text{TV}} = \dot{m}_1 (h_3 - h_2) = 0,40 * (1430 - 1480) = -20 \text{ kW} < 0$$

- Signe cohérent puisque le fluide cède de la puissance pour entraîner la turbine lors de la détente.

Q25.

- La pompe ayant un fonctionnement isentropique et isenthalpique par hypothèse, on néglige la puissance mécanique de cette pompe par rapport aux autres puissances mécaniques mises en jeu

$$\mathcal{P}_{P1V} = \dot{m}_1(h_1 - h_4) = 0,40 * (240 - 240) = 0$$

- Pour le cycle réel :

$$\mathcal{P}_{P1R} = \dot{m}_3(h_1 - h_4) = 0$$

- On peut éventuellement évaluer pour NH<sub>3</sub> liquide

$$\mathcal{P}_{P1R} = \dot{m}_3 c_a (T_1 - T_4) = 0,45 * 6.10^3 (12 - 9) = 8,1 \text{ kW}...$$

Q26.

- Si on prend comme définition du rendement  $\eta_v = \left| \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} \right|$ , le gain est  $\mathcal{P}_{TV}$  et la dépense est  $\mathcal{P}_{P1V} = 0$ , donc un rendement infini...
- Maintenant si on revient à la dépense classique d'un moteur thermique, la dépense est la puissance thermique reçue de la source chaude c'est-à-dire  $\mathcal{P}_{thEV}$  d'où

$$\eta_v = \frac{20}{496} = 0,04...$$

Q27.

- Le rendement n'est pas infini car la pompe est réelle  $\mathcal{P}_{P1R} = 8,1 \text{ kW}$  alors  $\eta_R = \frac{20}{8,1} = 2,5 \dots$  mais la turbine pas isentropique, car pas rigoureusement réversible...

## Partie B. Naissance et propagation de la houle

Q28.

- Chaque fluide étant incompressible, on a :

$$\text{div}(\vec{v}_i) = 0, \quad i = 1,2$$

- Chaque champ de vitesse dérivant d'un potentiel, on en déduit :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta\varphi_i = 0$$

Q29.

- On calcule :

$$\frac{D\vec{v}_1}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}_1 = \frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} \text{ au premier ordre}$$

$$\Rightarrow \frac{D\vec{v}_1}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1) = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$$

- Et :

$$\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(-gz)$$

L'équation d'Euler donne :

$$\rho_1 \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}p_1 + \overrightarrow{\text{grad}}(-gz)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz \right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz = C_1(t)$$

Q30.

- On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{V}_2}{Dt} &= \frac{\partial\vec{V}_2}{\partial t} + (\vec{V}_2 \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}_2 = \frac{\partial\vec{V}_2}{\partial t} + ((\vec{U} + \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}_2 \\ &= \frac{\partial\vec{V}_2}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}_2 = \frac{\partial\vec{V}_2}{\partial t} + \left( U \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{V}_2 \text{ au premier ordre} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{D\vec{V}_2}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_2) + \left(U \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_2 \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

- L'équation d'Euler donne cette fois :

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{p_2}{\rho_2} + gz = C_2(t)$$

Q31.

- On calcule :

$$u_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}; w_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}$$

- La vitesse en  $z = -h$  (fond) ne peut avoir de composante selon Oz, soit :

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0$$

- Remarque : le fluide étant parfait il peut avoir une composante parallèle au fond.

Q32.

- On calcule :

$$u_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}; w_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}$$

- L'écoulement de l'air étant supposé « non perturbé » loin de la surface, la vitesse en  $z \rightarrow \infty$  tend vers U, soit :

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)_{z \rightarrow \infty} = 0; \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z \rightarrow \infty} = 0$$

Q33.

- Dans le milieu 1 (eau) :

$$\begin{aligned}w_1(x, 0, t) &= \frac{\partial\eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial\eta}{\partial x} + w_1 \frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} \text{ au premier ordre} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}(x, 0, t) &= \frac{\partial\eta}{\partial t}\end{aligned}$$

- Dans le milieu 2 (air) :

$$\begin{aligned}w_2(x, 0, t) &= \frac{\partial\eta}{\partial t} + (U + u_1) \frac{\partial\eta}{\partial x} + w_1 \frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + U \frac{\partial\eta}{\partial x} \text{ au premier ordre} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}(x, 0, t) &= \frac{\partial\eta}{\partial t} + U \frac{\partial\eta}{\partial x}\end{aligned}$$

Q34.

- L'équation proposée traduit la continuité de la pression en  $z_s(x, t) = \eta(x, t)$ . D'après les dernières lignes de la partie III, on a :

$$\rho_1 \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(x, 0, t) + g\eta(x, t)\right) = \rho_2 \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(x, 0, t) + U \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x, 0, t) + g\eta(x, t)\right)$$

qui est l'équation proposée.

Q35.

- D'après Q21 :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow -k^2\underline{\phi}_2(z) + \frac{\partial^2\underline{\phi}_2(z)}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

- La solution s'écrit :

$$\underline{\phi}_2(z) = A_2 e^{-kz} + B_2 e^{kz}$$

- La condition aux limites obtenue en Q32 permet d'obtenir  $B_2 = 0$ , d'où :

$$\underline{\phi}_2(z) = \underline{\phi}_2(0) e^{-kz} = \underline{\phi}_2^0(0) e^{-kz}$$

Q36.

- D'après Q21 :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -k^2\underline{\phi}_1(z) + \frac{\partial^2\underline{\phi}_1(z)}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

- La solution s'écrit :

$$\underline{\phi}_1(z) = A_1 e^{-kz} + B_1 e^{kz}$$

- La condition aux limites obtenue en Q31 permet d'obtenir :

$$-kA_1 e^{kh} + kB_1 e^{-kh} = 0$$

- On en déduit :

$$\underline{\phi}_1(z) = A_1 e^{-kz} + A_1 e^{kz} e^{2kh} = A_1 e^{kh} (e^{-k(z+h)} + e^{k(z+h)}) = 2A_1 e^{kh} \cosh(k(z+h))$$

Avec :

$$\underline{\phi}_1^0 = 2A_1 e^{kh}$$

- D'où :

$$\underline{\phi}_1(z) = \underline{\phi}_1^0 \cosh(k(z+h))$$

Q37.

- D'après Q33 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}(x, 0, t) &= \frac{\partial\eta}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \underline{\phi}_1^0 k \sinh(kh) &= j\omega\eta_m \end{aligned}$$

- Et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}(x, 0, t) &= \frac{\partial\eta}{\partial t} + U \frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \Leftrightarrow -k\underline{\phi}_2^0 &= j\omega\eta_m - jkU\eta_m = j(\omega - kU)\eta_m \end{aligned}$$

Q38.

- D'après Q34 :

$$\begin{aligned} \rho_1 \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(x, 0, t) + g\eta(x, t) \right) &= \rho_2 \left( \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(x, 0, t) + U \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x, 0, t) + g\eta(x, t) \right) \\ \Leftrightarrow \rho_1 \left( j\omega\underline{\phi}_1^0 \cosh(kh) + g\eta_m \right) &= \rho_2 \left( j\omega\underline{\phi}_2^0 - U \cdot jk\underline{\phi}_2^0 + g\eta_m \right) \end{aligned}$$

- Soit en remplaçant  $\underline{\phi}_1^0$  et  $\underline{\phi}_2^0$  avec Q 36 et Q37 :

$$\rho_1 \left( j\omega \frac{\cosh(kh)}{k \sinh(kh)} j\omega\eta_m + g\eta_m \right) = \rho_2 \left( -j(\omega - kU)j(\omega - kU) \frac{\eta_m}{k} + g\eta_m \right)$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 \left( \frac{(j\omega)^2}{\tanh(kh)} + gk \right) = \rho_2 \left( - (j(\omega - kU))^2 + gk \right)$$

Q39.

- On a :

$$\underline{\eta}(x, t) = \eta_m e^{j(\omega' t - kx)} e^{-\omega'' t}$$

Pour des oscillations divergentes on doit avoir :

$$\omega'' < 0$$

Q40.

- $\tanh(kh) \rightarrow 1$  lorsque  $kh \rightarrow \infty$ . L'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_1 \left( (j\omega)^2 + gk \right) &= \rho_2 \left( - (j(\omega - kU))^2 + gk \right) \\ \Leftrightarrow (gk - (\omega)^2) &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( gk - (\omega)^2 + (kU)^2 - 2\omega kU \right) \end{aligned}$$

- Compte tenu du fait que  $\frac{\rho_2}{\rho_1} \ll 1$ , on simplifie :

$$\begin{aligned} (gk - (\omega)^2) &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( (kU)^2 - 2\omega kU \right) \\ \Leftrightarrow (gk - \omega'^2 + \omega''^2 - 2j\omega' \omega'') &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( (kU)^2 - 2(\omega' + j\omega'')kU \right) \end{aligned}$$

- La partie réelle de cette équation est :

$$gk - \omega'^2 + \omega''^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( (kU)^2 - 2\omega' kU \right) \quad \text{équation (1)}$$

- La partie imaginaire de cette équation est :

$$\Rightarrow \omega' = \frac{\rho_2}{\rho_1} kU \quad \text{équation (2)}$$

- En remplaçant  $\omega'$  par sa valeur (équ 2) dans l'équation (1), et tenant compte du fait que  $\frac{\rho_2}{\rho_1} \ll 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \omega''^2 &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( (kU)^2 - 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} (kU)^2 \right) - gk + \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} kU \right)^2 \\ &\approx \frac{\rho_2}{\rho_1} (kU)^2 - gk \end{aligned}$$

- Il est curieux que la condition ne porte pas sur le signe de  $\omega''$ , il y a probablement un autre calcul possible, toutefois on doit avoir :

$$\omega''^2 > 0$$

qui donne bien :

$$U^2 > \frac{\rho_1 g}{\rho_2 k}$$

Q41.

- On calcule facilement avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda < \frac{\rho_2 2\pi}{\rho_1 g} U^2$   $\lambda < \frac{1,2}{1000} \frac{2\pi}{9,8} \left( \frac{100}{3,6} \right)^2$

$$\lambda < 0,59 \text{ m}$$

- Si on choisit  $\tanh(kh) = 1 - 0,01 = 0,99$ , on obtient  $kh = 2,65$ , soit pour la valeur limite de  $\lambda$  :  
 $h = 4.49 \text{ m}$ .
- On constate donc que l'approximation de profondeur infinie n'est pas très contraignante.

Q42.

- La relation V1 s'écrit avec les hypothèses proposées :

$$\left( gk - \frac{\omega^2}{\tanh(kh)} + \right) = \frac{\rho_2}{\rho_1} (\omega^2 + gk)$$

- Soit puisque  $\tanh(kh) < 1$  :

$$gk - \frac{\omega^2}{\tanh(kh)} = 0$$

Q43.

- En eau profonde, la relation se simplifie en :

$$\omega^2 = gk$$

- On calcule :

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{g}{k}}; v_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

- La vitesse de phase dépend de  $k$  : la propagation est dispersive.
- La vitesse de groupe dépend de  $k$  : l'enveloppe du paquet d'onde se déforme au cours de la propagation

Q44.

- Les deux figures correspondent à un phénomène de propagation dispersive puisque le paquet d'onde se déforme.
- Pour la houle,  $v_\varphi$  augmente avec  $\lambda$  : les grandes longueurs d'onde se propagent plus vite et sont donc à l'avant du paquet d'onde : c'est la figure b.

Q45.

- Pour  $kh \ll 1$ , on a  $\tanh(kh) = kh$  à l'ordre le plus bas.
- La relation de dispersion s'écrit donc :

$$\omega^2 = ghk^2$$

- On calcule alors :

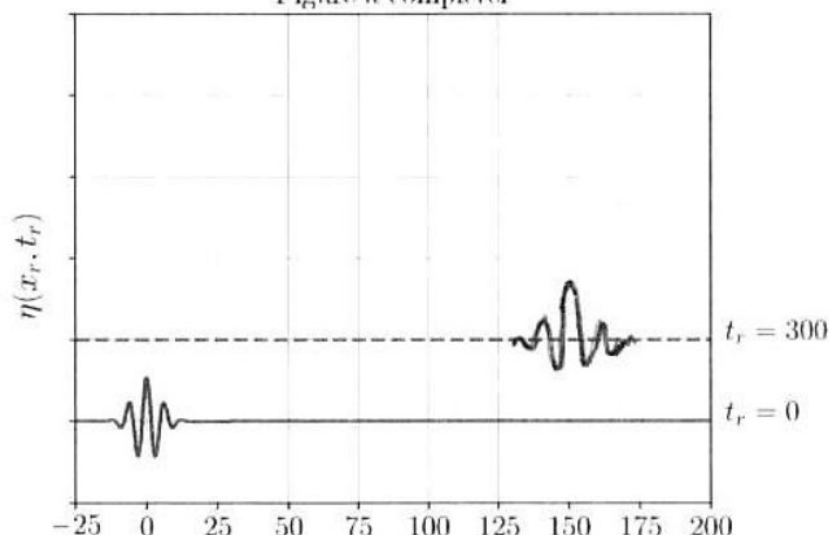
$$v_\varphi = v_g = \sqrt{gh}$$

Q46.

- La propagation n'est plus dispersive. Le profil spatial du paquet d'onde à  $t_r$  est donc strictement identique au profil à  $t = 0$ , mais décalé autour de  $x_r$ .

## doc réponse 6

Figure à compléter



Q47.

- On calcule :

$$c = \sqrt{gh} = \sqrt{gh_0} \sqrt{\frac{h}{h_0}} = \frac{c_0}{n(h)} \text{ avec } n(h) = \sqrt{\frac{h_0}{h}}$$

Q48.

$$n(x) = \sqrt{\frac{h_0}{h_0 - \beta x}}$$

Q49.

- En  $x = 0$ , on a  $n(0)=1$ , d'où :

$$\begin{aligned} \sin(\theta_0) &= n(x) \cdot \sin(\theta(x)) \\ \Leftrightarrow \sin(\theta(x)) &= \sin(\theta_0) \sqrt{1 - \frac{\beta x}{h_0}} \end{aligned}$$

Q50.

- On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \tan(\theta(x)) &= \frac{\sin(\theta(x))}{\sqrt{1 - (\sin(\theta(x)))^2}} = \frac{\sin(\theta_0) \sqrt{1 - \frac{\beta x}{h_0}}}{\sqrt{1 - (\sin(\theta_0))^2 \left(1 - \frac{\beta x}{h_0}\right)}} \\ \frac{dy}{dx} = f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sin(\theta_0))^2 \left(1 - \frac{\beta x}{h_0}\right)} - 1}} \end{aligned}$$

Q51.

- La relation de récurrence s'écrit :

$$y_{N+1} = y_N + f(x) * p$$

- Lines de code :

Ligne 13 : `return (1/mt.sin(theta0)**2/(1-beta*x/h0)-1)**(-.5)`

Ligne 20 : `y=Y[n]+f(x)*p`

Q52.

- On a obtenu l'équivalent de rayons lumineux : un rayon houleux.
- Les surfaces équiphasés sont perpendiculaires aux rayons d'après le théorème de Malus.
- On constate que le RL arrive perpendiculairement à la côte et donc que les vagues arrivent parallèlement

