

# Diffraction de Fraunhofer

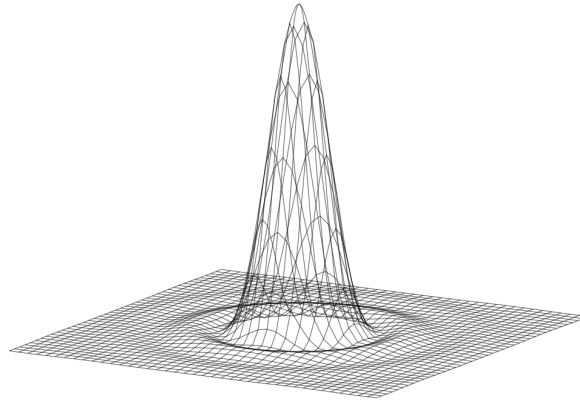


Figure 1 – Figure d’Airy

## 1 Principe d’Huygens-Fresnel (HP)

Soit une onde monochromatique incidente sur une ouverture (pupille) de surface  $S$ . D’après le principe de Huygens-Fresnel, tout élément de surface de l’ouverture peut être considéré comme une source secondaire, se propageant de proche en proche (Huygens) et l’amplitude de l’onde émise par cette source secondaire est proportionnelle à la somme de chacun des éléments de surface de l’onde incidente (Fresnel). Les ondes émises par ces différentes sources interfèrent entre elles pour donner l’onde diffractée. Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles. En un point  $M$ , en aval de l’ouverture, l’amplitude est donnée par :

$$\underline{s}(M) = \iint_S \underline{s}(P) \underline{t}(P) \frac{\exp(jkr)}{r} dS_P$$

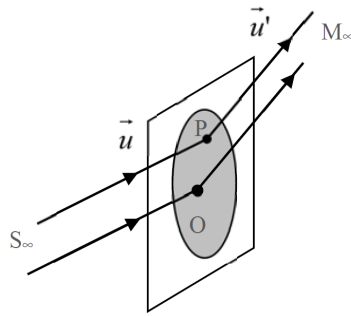
Dans cette relation :

- ✕  $r = MP$  ;  $k$  est la norme du vecteur d’onde.
- ✕  $\underline{s}(P)$  est l’amplitude complexe de la vibration lumineuse arrivant en  $P$  (Avant passage par la pupille).
- ✕  $\underline{t}(P)$  est la transmittance de la surface en  $P$

## 2 Diffraction de Fraunhofer

### 2.1 Définition

- ✕ Pour être dans les conditions de Fraunhofer, il faut que la pupille soit éclairée par une OPPM(+) et il faut étudier la figure de diffraction à l’infini, c’est à dire ne considérer uniquement les OPPM(+) après la pupille.



**Figure 2** – Conditions de Fraunhofer

- ✕ La figure ci-dessous représente la figure de diffraction d'une ouverture carrée, éclairée sous incidence normale, observée à différentes distances de la pupille : la figure de diffraction de Fraunhofer apparaît quand l'écran est suffisamment éloigné. Une fois les conditions de Fraunhofer établies, la figure de diffraction n'est plus modifiée dans sa structure quand on éloigne l'écran : elle augmente uniquement de taille.



**Figure 3** – Diffraction par une pupille carrée

- ✕ Dans les conditions de Fraunhofer, l'intégrale précédente se simplifie (HP) :

$$\underline{s}(M) = S_0 \exp(j\phi_0) \iint_S \underline{t}(P) \exp \left[ -jk \left( \vec{u}' - \vec{u} \right) \cdot \vec{OP} \right] dS_P$$

où :

- ☛  $A_0$  est l'amplitude réelle de la vibration arrivant en  $P$  (avant passage par la pupille)
- ☛  $\phi_0$  est la phase de l'OPPM incidente en un point  $O$  de la pupille (centre de la pupille),
- ☛  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire de l'OPPM incidente.
- ☛  $\vec{u}'$  est le vecteur unitaire de l'OPPM diffractée à l'infini.

Conséquence importante :

**La figure de diffraction d'une pupille est toujours centrée sur l'image géométrique de la source**

L'éclairement lumineux diffracté à l'infini étant :

$$I(M) = \frac{1}{2} \underline{s}(M) \cdot \underline{s}^*(M)$$

## 2.2 Montage dans les conditions de Fraunhofer

- ✗ On travaille en lumière monochromatique.
- ✗ Conditions de Fraunhofer en amont de la pupille : il faut envoyer une OPPM sur la pupille.
  - ☛ Un laser (sans objectif de microscope) convient parfaitement : le placer le plus proche possible de la pupille.
  - ☛ Un laser avec objectif de microscope convient également : dans ce cas là on peut soit placer la sortie de l'objectif dans le plan focal d'un lentille de grande focale (voir télescope-laser) soit placer l'écran suffisamment loin de la pupille de façon à ce que les rayons lumineux qui arrivent effectivement sur la pupille soient ceux qui sont proches de l'axe.
- ✗ Conditions de Fraunhofer en sortie : il faut que l'écran soit placé suffisamment loin de la pupille ( $D \gg \frac{(L^*)^2}{8\lambda}$ ), où  $L^*$  est une distance caractéristique de la pupille. On peut également utiliser une lentille convergente et observer la figure de diffraction dans le plan focal de la lentille.

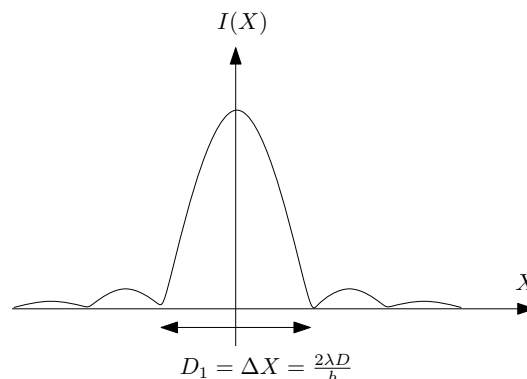
## 3 Diffraction par une fente fine (de largeur $b$ )

### 3.1 Ce qu'il faut connaître

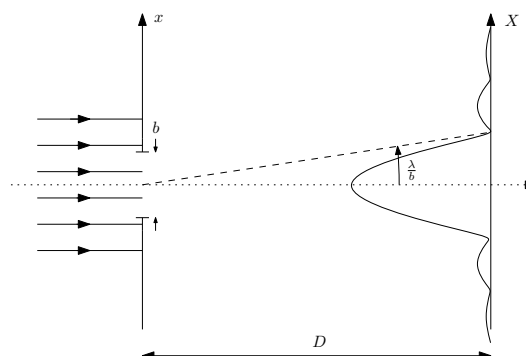
- ✗ L'angle de  $\theta_x$  de la demie-largeur de la tache centrale :

$$\theta_x = \frac{\lambda}{b}$$

L'éclairement obtenu est l'éclairement classique dû à une fente fine. La grandeur caractéristique de cet éclairement est la largeur de la frange centrale ( distance entre les premières annulations du sinus cardinal) :  $\frac{2D\lambda}{b}$ .



**Figure 4** – Grandeur caractéristique de l'éclairement obtenu



**Figure 5** – Diffraction par une fente fine

### 3.2 Ce qui doit être donné (HP)

✕ Éclairement sur l'écran :

$$I(X) = I(0) \text{sinc}^2 \left( \frac{\pi b X}{\lambda D} \right)$$

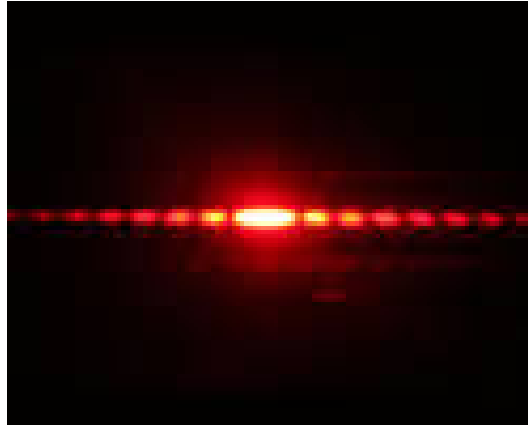


Figure 6 – Diffraction par une fente

## 4 Cas d'une ouverture circulaire (de rayon $R$ )

### 4.1 Ce qu'il faut connaître

Pour la diffraction par un **trou circulaire** de rayon  $R$  :

- ✕ La figure observée sur l'écran est appelée figure d'Airy.
- ✕ Elle est constituée d'une tache centrale (tache d'Airy) de rayon angulaire :

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{2R}$$

et d'anneaux (appelés anneaux d'Airy).



Figure 7 – Diffraction par une ouverture circulaire

## 4.2 Ce qui doit être donné (HP)

✕ Éclairement :

$$I(\theta) = I(0) \left( \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta\right)}{\left(\frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta\right)} \right)^2$$

Où  $J_1$  est la fonction de Bessel d'ordre 1 : Le premier zéro de  $J_1(x)$  est atteint pour  $x_1 = 3,83$  et donc le premier zéro de la figure de diffraction correspond à :

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda x_1}{2\pi R} \approx \frac{1,22\lambda}{D}$$

où  $D$  est le diamètre du trou.

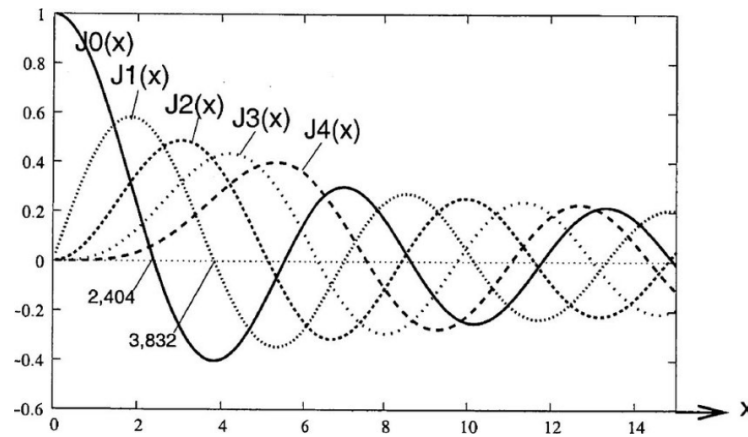


Figure 8 – Fonctions de Bessel

## 5 Diffraction par un cheveux : théorème de Babinet

Pour la diffraction par un cheveux, on utilise le théorème de Babinet : le figure de diffraction obtenue avec un cheveux de diamètre  $b$  est la même que celle obtenue avec une fente fine de largeur  $b$  (sauf en ce qui concerne l'éclairement au niveau de l'image géométrique) :

On mesure la taille  $\Delta X$  de la tache centrale de diffraction obtenue sur un écran placé à la distance  $D$  du cheveux, on en déduit le diamètre du cheveux :

$$\Delta X = \frac{2\lambda D}{b} \Rightarrow b = \frac{2\lambda D}{\Delta X}$$

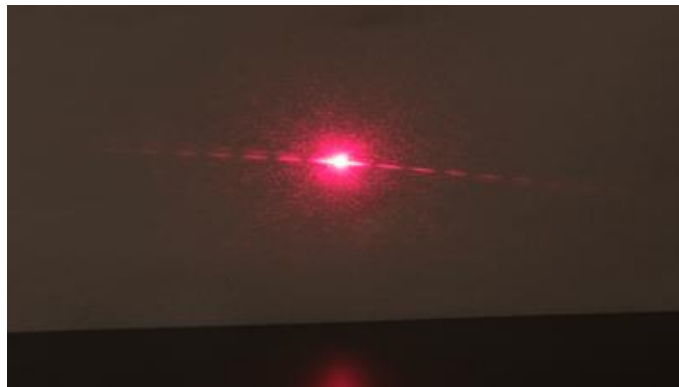
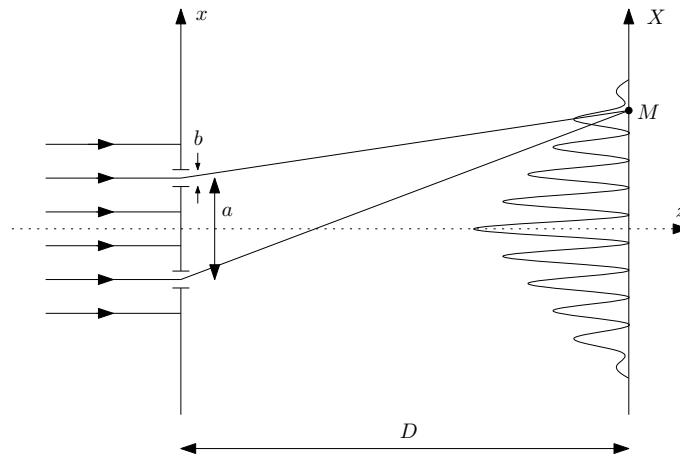


Figure 9 – Diffraction par un cheveu

## 6 Diffraction par des fentes de Young

### 6.1 Ce qu'il faut connaître



**Figure 10** – Diffraction par une fente fine

L'éclairement obtenu est l'éclairement classique dû à des fentes de Young. Les grandeurs caractéristiques de cet éclairement sont :

✕ La formule de Fresnel :

$$I(X) = 2I_0(X)(1 + \cos \phi)$$

Avec :

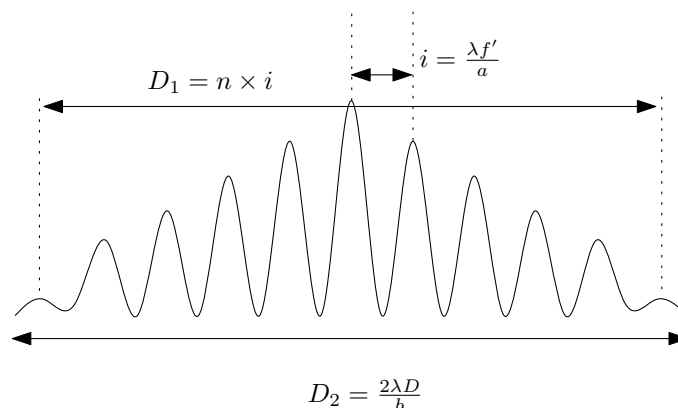
$$\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

$$\delta = \frac{aX}{D}$$

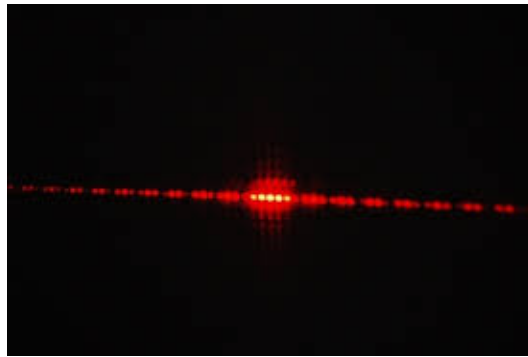
Ici  $I_0(X)$  dépend de  $X$  à cause de la largeur des fentes

✕ L'interfrange (ou la période du cosinus) :  $i = \frac{\lambda D}{a}$ .

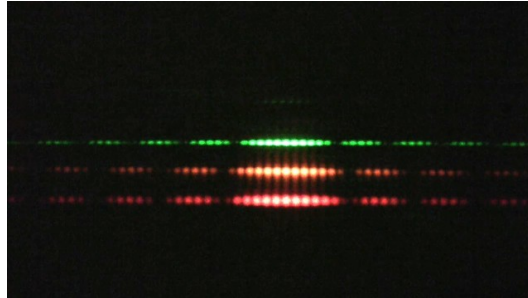
✕ La largeur de la frange centrale ( distance entre les premières annulations du sinus cardinal) :  $\frac{2D\lambda}{b}$ .



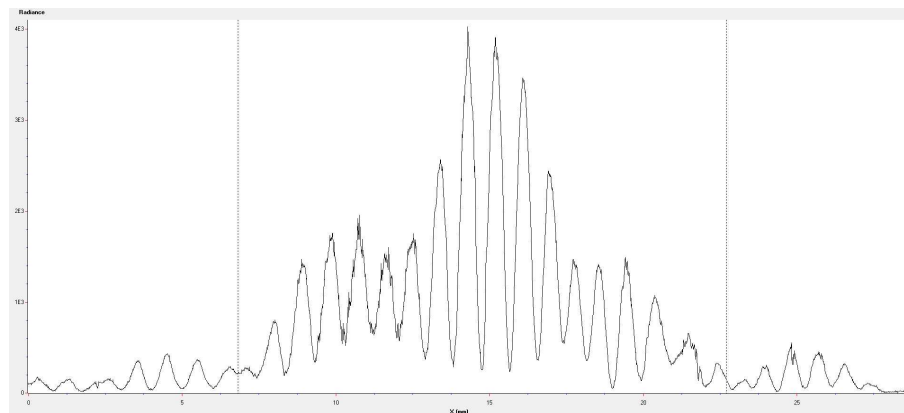
**Figure 11** – Les deux grandeurs caractéristiques de l'éclairement obtenu



**Figure 12** – Diffraction par des fentes de Young



**Figure 13** – Variation de la figure de diffraction en fonction de  $\lambda$



**Figure 14** – Exemple de figure obtenue pour des fentes de Young avec le logiciel CALIENS : la figure manque de symétrie et elle est légèrement bruitée, mais surtout le sinus cardinal n'en n'est pas un... On distingue par contre assez clairement l'interfrange et les bords du sinus cardinal pour pouvoir faire des mesures

## 6.2 Ce qui doit être donné (HP)

✕ Éclairement sur l'écran :

$$I(X) = 2I(0)\text{sinc}^2\left(\frac{\pi bX}{\lambda D}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi aX}{\lambda D}\right)\right)$$

## 7 Diffraction par des trous de Young

### 7.1 Ce qu'il faut connaître

Le dispositif des trous de Young comprend deux ouvertures circulaires, distantes de  $a$ , de rayon  $R$ .

Sachant que la figure d'interférences est maintenant modulée par une figure d'Airy, on doit donc mesurer l'interfrange et la diamètre de la tache d'Airy pour remonter aux valeurs de  $a$  et  $R$ .

Les caractéristiques de la figure de diffraction sont :

✕ La formule de Fresnel :

$$I(X, Y) = 2I_0(X, Y)(1 + \cos \phi)$$

Avec :

$$\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

$$\delta = \frac{aX}{D}$$

Ici  $I_0(X, Y)$  dépend de  $(X, Y)$  à cause de la largeur des trous

✕ L'interfrange (ou la période du cosinus) :  $i = \frac{\lambda D}{a}$ .

✕ La largeur de la frange centrale ( distance entre les premières annulations du sinus cardinal) :

$$\Delta X = \frac{2 \times 1.22\lambda D}{2R}$$

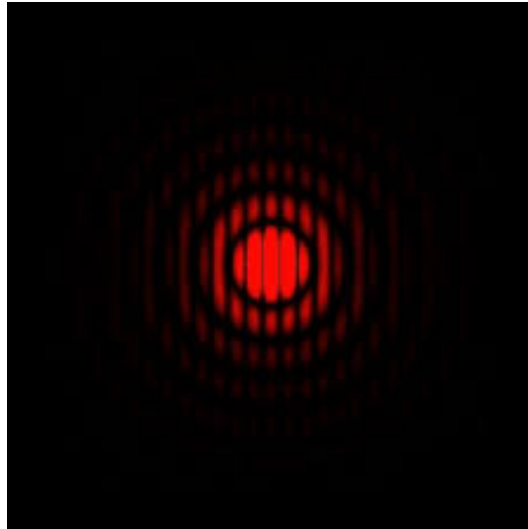


Figure 15 – Diffraction par des trous de young

## 7.2 Ce qui doit être donné (HP)

Éclairement sur l'écran :

$$I(X) = 2I(0) \left( \frac{2J_1 \left( \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left( \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta \right)} \right)^2 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi a X}{\lambda D} \right) \right)$$

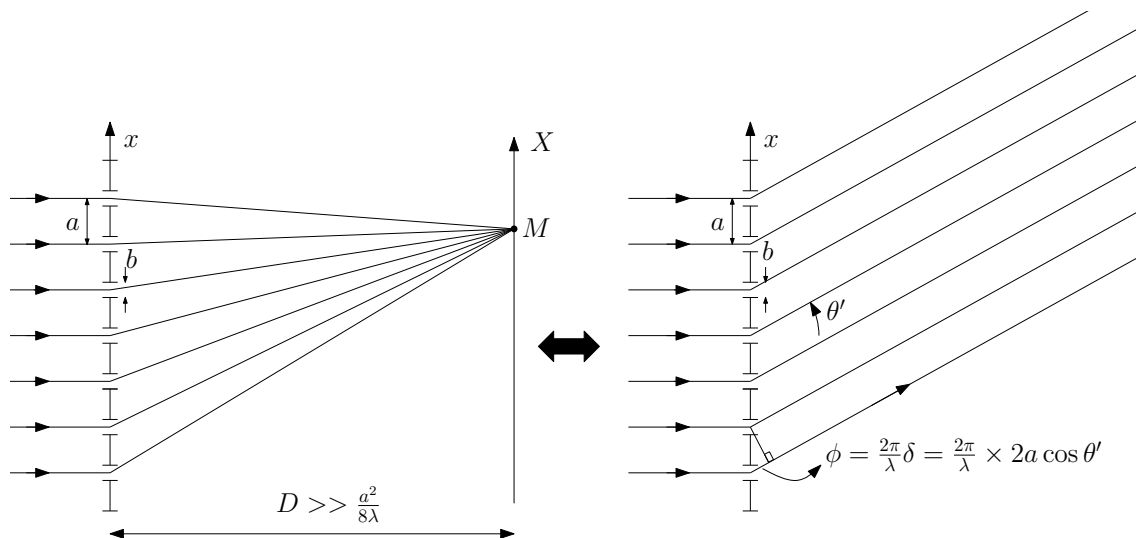
## 8 Diffraction par un réseau de fentes

### 8.1 Ce qu'il faut connaître (voir OP3)

On éclaire le réseau sous incidence **normale** et on regarde la figure de diffraction dans les conditions de Fraunhofer :

✕ Soit on place l'écran dans le plan focal d'un lentille convergente.

- ✕ Soit on place l'écran, à une distance  $D$  suffisamment grande pour pouvoir considérer que l'onde après la pupille est une onde plane  $\left(D \gg \frac{a^2}{8\lambda}\right)$ .



**Figure 16** – Diffraction par un réseau de fentes

Attention : en général, sans l'utilisation de lentille, des angles ne sont pas petits devant 1 !! On utilisera donc  $\sin \theta' \approx \theta'$  avec précaution.

- ✕ Éclairement obtenu, dans les conditions de Fraunhofer, pour une incidence quelconque, en négligeant la largeur des fentes :

$$I(\theta') = \frac{I(0)}{N^2} \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

Avec :

$$\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

$$\delta = a(\sin \theta' - \sin \theta)$$

$$\sin \theta' \approx \tan \theta' \approx \theta' \approx \frac{X}{D} \text{ si autorisé}$$

- ✕ Position des maxima de diffraction pour un réseau éclairé sous incidence quelconque :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta \Rightarrow \sin \theta' - \sin \theta = \frac{p}{\lambda}$$

- ✕ La figure de diffraction présente des pics principaux pour :

$$\sin \theta'_k = \sin \theta + \frac{k\lambda}{a}$$

On rappelle que l'on trouve ce résultat par différentes approches<sup>1</sup> :

- ☛ Soit on raisonne avec la fonction réseau  $f(\phi) = \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ , en considérant que les maxima principaux sont obtenus lorsque  $\sin \phi/2 = 0$  (**on annule de dénominateur**)  $\Rightarrow \phi = 2k\pi$ .

1. Voir OP3

- ☛ Soit on détermine directement le déphasage entre deux rayons lumineux successifs :  $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$  et on considère que sur les maxima principaux, les rayons lumineux qui interfèrent sont en phase :  $\phi = 2\pi k$ .
- ☛ Soit on considère que la somme des vecteur de Fresnel est maximale lorsqu'ils sont tous alignés.
- ✕ La largeur angulaire d'un pic de diffraction est :

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{N}$$

On rappelle que l'on trouve ce résultat par différentes approches<sup>2</sup> :

- ☛ Soit on raisonne avec la fonction réseau  $f(\phi) = \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ , en se plaçant sur le **pic principal d'ordre zéro** et en considérant que le premier minimum nul est obtenu lorsque  $\sin \frac{N\phi}{2} = 0$  (**annuler le numérateur**).  $\Rightarrow \phi = 2\pi/N \Rightarrow \Delta\phi = \frac{4\pi}{N}$ .
- ☛ Soit on considère que la somme des vecteur de Fresnel s'annule pour la première fois :  $N\phi = 2\pi \Rightarrow \Delta\phi = \frac{4\pi}{N}$ .
- ✕ Influence de la largeur des fentes : L'amplitude des pics principaux est modulée par la fonction sinus cardinal provenant de la diffraction par une pupille de largeur  $b$ . La première annulation du sinus cardinal est pour :

$$\sin \theta'_b = \frac{\lambda}{b}$$

## 8.2 Ce qui doit être donné (HP)

- ✕ L'éclairement sur l'écran vaut :

$$I(\theta') = \frac{I(0)}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b (\sin \theta' - \sin \theta)}{\lambda}\right) \times \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi a (\sin \theta' - \sin \theta)}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a (\sin \theta' - \sin \theta)}{\lambda}\right)}$$

Avec  $\sin \theta' \approx \tan \theta' \approx \theta' \approx \frac{X}{D}$

---

2. Voir OP3