Concours commun Mines-Ponts – MP – 2025 – Physique II

Mesure et caractérisation du champ de pesanteur.

I Mesure de la variation temporelle de g

❏ – **1.** On repère trois ordres temps caractéristiques. Le plus court et le plus notable est la demi-journée :

$$\boxed{\tau_1 = 0{,}5 \text{ jour}}$$

Les deux oscillations ainsi observées chaque jour ne sont pas de même amplitude :

$$\boxed{\tau_2 = 1 \text{ jour}}$$

L'ensemble est modulé sur une durée d'environ :

$$\boxed{\tau_3 = 15 \text{ jours}}$$

(par exemple, elle est maximale à 15 131 JJM et 15 146 JJM).

L'origine des deux premières oscillations est la rotation propre de la Terre sur elle-même, la dernière semble être liée à la révolution de la Lune autour de la Terre.

❏ – **2.** Un référentiel galiléen est **un référentiel où le principe d'inertie est valide** : tout point matériel qui n'est soumis à aucune force est au repos ou animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Le référentiel de Copernic $\mathscr{R}_0$ prend pour origine le centre de masse du système solaire, et les trois vecteurs de base pointent vers des étoiles très lointaines.

Le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_g$ reprend les trois vecteurs de base présentés ci-dessus mais prend comme origine le centre de la Terre.

❏ – **3.** Si $\mathscr{R}_0$ est galiléen, il faut et il suffit que $\mathscr{R}_g$ soit en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathscr{R}_0$. En effet, si M est un point matériel isolé, alors il est en translation rectiligne uniforme dans $\mathscr{R}_0$. Pour qu'il le soit dans $\mathscr{R}_g$, il faut que $\mathscr{R}_g$ soit en TRU par rapport à $\mathscr{R}_0$.

Or $\mathscr{R}_g$ est en translation circulaire (approximativement uniforme) par rapport à $\mathscr{R}_0$. D'où le résultat.

❏ – **4.** Le théorème de Gauss gravitationnel s'écrit :

$$\oint\!\!\!\oint \vec{\mathcal{G}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

L'intégrale se fait sur une surface fermée, M_{int} est la masse contenue à l'intérieur de cette dernière.

On considère que l'astre est à symétrie sphérique. On se dote des coordonnées sphériques centrées sur l'astre (`A`) et de la base $(A, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$. Commençons par l'étude des symétries et invariances.

— **Invariances.** La distribution de masse est à symétrie sphérique (invariance par toute rotation autour du centre de l'astre A) : ainsi le champ gravitationnel ne dépend pas des coordonnées angulaire θ et φ.

— **Symétries.** Tout plan contenant M et $\vec{e_r}$ est un plan de symétrie de la distribution de masses. Ainsi, comme le champ gravitationnel appartient aux plans de symétrie, il est dans le direction $\vec{e_r}$.

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r)\vec{e_r}}$$

On considère comme surface de Gauss une sphère de rayon r centrée sur A. Le flux à travers cette surface est :

$$\oiint \vec{\mathcal{G}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint \mathcal{G}(r)\vec{e_r} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_r} = \mathcal{G}(r) \oiint \mathrm{d}S = \mathcal{G}(r)4\pi r^2$$

La masse contenue dans la surface de Gauss est $m_{\mathtt{A}}$ car $r > R_{\mathtt{A}}$. D'où, d'après le théorème de Gauss :

$$\mathcal{G}(r)4\pi r^2 = -4\pi G m_{\mathtt{A}}$$

d'où :

$$\vec{\mathcal{G}}(r) = -G\frac{m_{\mathtt{A}}}{r^2}\vec{e_r}$$

que l'on peut réécrire ($r = AM$ et $\overrightarrow{AM} = r\vec{e_r}$) :

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}}(r) = -G\frac{m_{\mathtt{A}}}{AM^3}\overrightarrow{AM}}$$

❏ – **5.** T_M correspond à la durée pour que M gasse un tour complet autour de l'axe des pôles, c'est le jour sidéral :

$$\boxed{T_M \approx 1 \text{ jour}}$$

T_L correspond à la période de révolution de la Lune autour de la Terre :

$$\boxed{T_L \approx 28 \text{ jours}}$$

T_S correspond à la période de révolution de la Terre autour du Soleil :

$$\boxed{T_S \approx 365 \text{ jours}}$$

ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T_M} = \frac{6{,}3}{2{,}4 \times 3{,}6 \times 10^4} = 7{,}3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

❏ – **6.** Soit M un point immobile à la surface de la Terre. Sur ce point s'applique :

— la force gravitationnelle exercée par la Terre :

$$\overrightarrow{F_{\mathtt{T}\to M}} = m\vec{\mathcal{G}}_{\mathtt{T}}(M)$$

— la force gravitationnelle exercée par l'astre ($\mathtt{A}$) :

$$\overrightarrow{F_{\mathtt{A}\to M}} = m\vec{\mathcal{G}}_{\mathtt{A}}(M)$$

— la force d'inertie d'entraînement. L'accélération d'inertie d'entraînement comprend deux termes : un lié au mouvement de translation circulaire du référentiel géocentrique dans le référentiel de Copernic, et un lié à la rotation propre du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = m\omega^2\overrightarrow{HM} - m\vec{a}\,(\mathscr{R}_g/\mathscr{R}_0)$$

H désigne le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles. On a :

$$\overrightarrow{HM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} = \overrightarrow{TM} - z\vec{e_z}$$

or $z = \overrightarrow{TM} \cdot \vec{e_z}$ et $\vec{e_z} = \vec{\omega}/\omega$ ainsi :

$$\omega^2\overrightarrow{HM} = \omega^2\overrightarrow{TM} - \left(\overrightarrow{TM} \cdot \vec{\omega}\right)\vec{\omega}$$

Ensuite, l'application du principe fondamental de la dynamique à la Terre dans le référentiel de Copernic donne :

$$M_{\mathtt{T}}\vec{a}\,(T/\mathscr{R}_0) = M_{\mathtt{T}}\vec{\mathcal{G}}_{\mathtt{A}}(T)$$

soit :

$$\vec{a}\,(\mathscr{R}_g/\mathscr{R}_0) = \vec{\mathcal{G}}_{\mathtt{A}}(T)$$

— la force d'inertie de Coriolis est nulle car le point M est fixe dans le référentiel terrestre ;
— la réaction du support exprimée d'après l'énoncé ainsi :

$$\vec{R} = -m\vec{g}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique dans ce référentiel donne :

$$\overrightarrow{F_{\mathtt{T}\to M}} + \overrightarrow{F_{\mathtt{A}\to M}} + \overrightarrow{F_{ie}} + \vec{R} = m\vec{a}\,(M/\mathscr{R}_T) = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\vec{g} = \vec{\mathcal{G}_{\mathtt{T}}}(M) + \vec{\mathcal{G}_{\mathtt{A}}}(M) - \vec{\mathcal{G}_{\mathtt{A}}}(T) + \omega^2\overrightarrow{TM} - \left(\overrightarrow{TM}\cdot\vec{\omega}\right)\vec{\omega}$$

On a bien exprimé $\vec{g}$ ainsi :

$$\boxed{\vec{g} = \vec{\mathcal{G}_{\mathtt{T}}}(M) + \vec{\gamma_0} + \vec{\gamma_1}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\vec{\gamma_0} = \omega^2\overrightarrow{TM} - \left(\overrightarrow{TM}\cdot\vec{\omega}\right)\vec{\omega}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{\gamma_1} = \vec{\mathcal{G}_{\mathtt{A}}}(M) - \vec{\mathcal{G}_{\mathtt{A}}}(T)}$$

❏ – **7.** En considérant le vecteur $\vec{\omega}$ constant dans le temps et M ne bougeant pas à la surface de la Terre (latitude approximativement constante), le vecteur $\vec{\gamma_0}$ est une cosntante : **il intervient dans** $\bar{g}$.

❏ – **8.** g est la composante verticale de la pesanteur ainsi :

$$\delta g_{\mathtt{A}} = \vec{g}\cdot\vec{e_r} - \langle\vec{g}\cdot\vec{e_r}\rangle$$

les termes $\vec{\mathcal{G}_{\mathtt{T}}}(M)$ et $\vec{\gamma_0}$ étant constants dans le temps :

$$\boxed{\delta g_{\mathtt{A}} = \vec{\gamma_1}\cdot\vec{e_r} - \langle\vec{\gamma_1}\cdot\vec{e_r}\rangle}$$

❏ – **9.** On a :

$$\vec{\mathcal{G}_{\mathtt{T}}} = -G\frac{m_{\mathtt{A}}}{d_{\mathtt{A}}^3}\overrightarrow{AT} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathcal{G}_{\mathtt{A}}} = -G\frac{m_{\mathtt{A}}}{AM^3}\overrightarrow{AM}$$

Simplifions l'expression de ce second terme dans le cadre de l'hypothèse de l'énoncé. Tout d'abord :

$$AM^2 = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TM}\right)^2 = AT^2 + TM^2 + 2\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{TM}$$

Or $AT = d_{\mathtt{A}}$, $TM = R_{\mathtt{T}}$ et $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{TM} = -\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TM} = -R_{\mathtt{T}}d_{\mathtt{A}}\cos(\psi_A)$ d'où :

$$AM = \sqrt{d_{\mathtt{A}}^2 + R_{\mathtt{T}}^2 - 2R_{\mathtt{T}}d_{\mathtt{A}}\cos(\psi_A)}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{AM^3} = \left(d_{\mathtt{A}}^2 + R_{\mathtt{T}}^2 - 2R_{\mathtt{T}}d_{\mathtt{A}}\cos(\psi_A)\right)^{-3/2} = \frac{1}{d_{\mathtt{A}}^3}\left(1 + \frac{R_{\mathtt{T}}^2}{d_{\mathtt{A}}^2} - 2\frac{R_{\mathtt{T}}}{d_{\mathtt{A}}}\cos(\psi_A)\right)^{-3/2}$$

à l'ordre le plus bas en $R_{\mathtt{T}}/d_{\mathtt{A}}$:

$$\frac{1}{AM^3} = \frac{1}{d_{\mathtt{A}}^3}\left(1 + 3\frac{R_{\mathtt{T}}}{d_{\mathtt{A}}}\cos(\psi_A)\right)$$

Ainsi :

$$\vec{\gamma_1} = G\frac{m_{\mathtt{A}}}{d_{\mathtt{A}}^3}\overrightarrow{AT} - G\frac{m_{\mathtt{A}}}{d_{\mathtt{A}}^3}\overrightarrow{AM} - 3G\frac{m_{\mathtt{A}}R_{\mathtt{T}}\cos(\psi_A)}{d_{\mathtt{A}}^4}\overrightarrow{AT} - 3G\frac{m_{\mathtt{A}}R_{\mathtt{T}}\cos(\psi_A)}{d_{\mathtt{A}}^4}\overrightarrow{TM}$$

$\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{TM}$. Le dernier terme est négligeable devant le premier terme. Il reste :

$$\vec{\gamma_1} = -G\frac{m_{\mathtt{A}}}{d_{\mathtt{A}}^3}\overrightarrow{TM} - 3G\frac{m_{\mathtt{A}}R_{\mathtt{T}}\cos(\psi_A)}{d_{\mathtt{A}}^4}\overrightarrow{AT}$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\vec{\gamma_1} = -\frac{Gm_{\mathtt{A}}}{d_{\mathtt{A}}^3}\left(\overrightarrow{TM} + \mu\overrightarrow{TA}\right)} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\mu = -\frac{3R_{\mathtt{T}}}{d_{\mathtt{A}}}\cos(\psi_A)}$$

que l'on peut réécrire ainsi :

$$\boxed{\mu = -\frac{3}{d_{\mathtt{A}}^2}\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TM}}$$

$\delta g_{\mathtt{A}}$ est la partie variable de $\vec{\gamma_1}\cdot\vec{e_r}$. Il est contenu dans le deuxième terme (l'angle $\psi_{\mathtt{A}}$ entre $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{TA}$ varie à cause de la rotation propre de la Terre en particulier) :

$$-\frac{3Gm_{\mathtt{A}}R_{\mathtt{T}}}{d_{\mathtt{A}}^4}\cos(\psi_A)\,\overrightarrow{TA}\cdot\vec{e_r}$$

Soit, comme $\overrightarrow{TA}\cdot\vec{e_r} = d_{\mathtt{A}}\cos(\psi_A)$:

$$-\frac{3Gm_{\mathtt{A}}R_{\mathtt{T}}}{d_{\mathtt{A}}^3}\cos^2(\psi_A)$$

$\delta g_{\mathtt{A}}$ est la partie variable de l'écriture ci-dessus :

$$\delta g_{\mathtt{A}} = -\frac{3Gm_{\mathtt{A}}R_{\mathtt{T}}}{d_{\mathtt{A}}^3}\left(\cos^2(\psi_A) - \frac{1}{2}\right)$$

Soit :

$$\boxed{\delta g_{\mathtt{A}} = -\frac{3Gm_{\mathtt{A}}R_{\mathtt{T}}}{2d_{\mathtt{A}}^3}\cos(2\psi_A)}$$

❏ – **10.** Dans ce cas, $\psi_A = 0$ d'où :

$$\boxed{|\delta g_{\mathtt{A}}| = \frac{3Gm_{\mathtt{A}}R_{\mathtt{T}}}{2d_{\mathtt{A}}^3}}$$

Dans le cas de la Lune :

$$\boxed{|\delta g_{\mathrm{L}}| = \frac{3Gm_{\mathrm{L}}R_{\mathrm{T}}}{2d_{\mathrm{L}}^3} = \frac{3\times 6{,}7\times 10^{-11}\times 7{,}3\times 10^{22}\times 6{,}4\times 10^{6}}{2\times(3{,}8\times 10^{8})^3} = 8{,}6\times 10^{-7}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}$$

Dans le cas du Soleil :

$$\boxed{|\delta g_{\mathrm{S}}| = \frac{3Gm_{\mathrm{S}}R_{\mathrm{T}}}{2d_{\mathrm{S}}^3} = \frac{3\times 6{,}7\times 10^{-11}\times 2{,}0\times 10^{30}\times 6{,}4\times 10^{6}}{2\times(1{,}5\times 10^{11})^3} = 3{,}8\times 10^{-7}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}$$

La rapport des deux est :

$$\boxed{K = \frac{m_{\mathrm{L}}}{m_{\mathrm{S}}}\frac{d_{\mathrm{S}}^3}{d_{\mathrm{L}}^3} = 2{,}2}$$

Les valeurs obtenues sont du même ordre de grandeur, même si l'effet de la Lune est prédominant. La correction de g par cet effet est mineure (de l'ordre de 0,1 pour un million).

❏ – **11.** On considère un mouvement circulaire de la Lune autour de la Terre, et de la Terre autour du Soleil. Faisons une approximation forte, on suppose que l'axe de rotation de la Terre est approximativement perpendiculaire au plan de l'écliptique. Dans le référentiel géocentrique :

— l'angle décrivant M est ωt ;

— l'angle décrivant S est $\Omega_S t$ (à une constante près), où Ω_S est la vitesse de rotation du Soleil dans le référentiel géocentrique, égale à la vitesse de rotation de la Terre dans le référentiel héliocentrique approximativement confondu avec le référentiel de Copernic :

$$\Omega_S = \frac{2\pi}{T_S}$$

— l'angle décrivant L est $\Omega_L t$ (à une constante près), où Ω_L est la vitesse de rotation de la Lune dans le référentiel géocentrique :

$$\Omega_L = \frac{2\pi}{T_L}$$

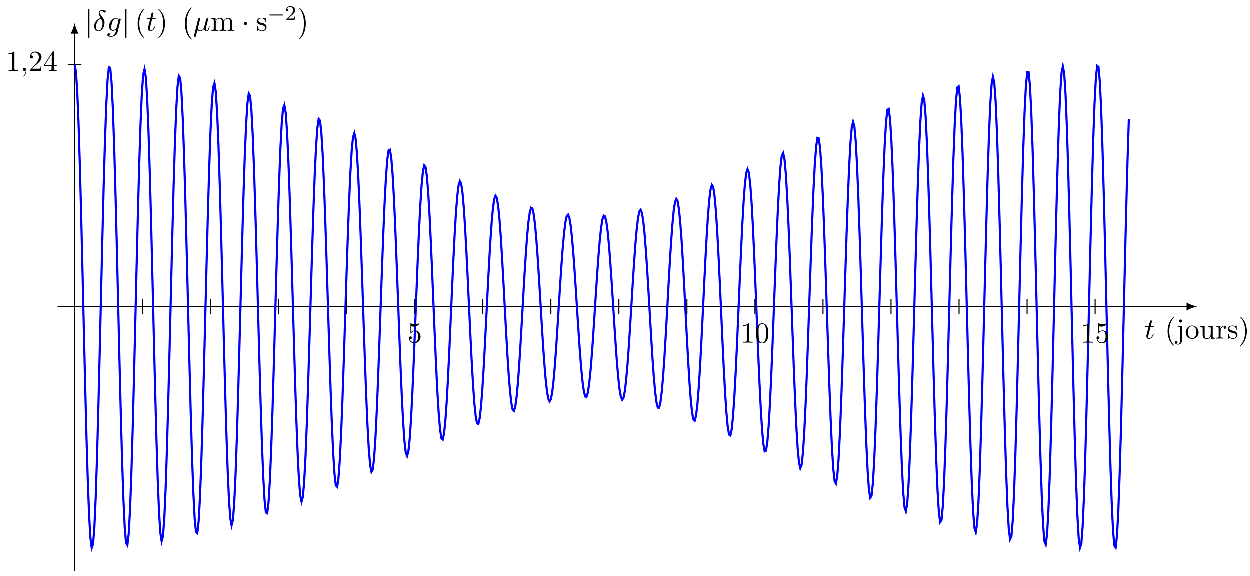
Ainsi :

$$\psi_L = \omega t - \Omega_L t + \psi_{L0} \qquad \text{et} \qquad \psi_S = \omega t - \Omega_S t + \psi_{S0}$$

D'où :

$$\boxed{|\delta g|(t) = |\delta g_{\mathrm{S}}| \cos\left(2\omega t - 2\Omega_S t + 2\psi_{S0}\right) + |\delta g_{\mathrm{L}}| \cos\left(2\omega t - 2\Omega_L t + 2\psi_{L0}\right)}$$

Le graphique est, en omettant $2\psi_{S0}$ et $2\psi_{L0}$ – ce qui revient à faire un bon choix d'origine des temps :



On ne perçoit pas la différence d'amplitude entre les deux oscillations quotidiennes car on n'a pas pris en compte l'inclinaison de l'axe de la rotation terrestre. On retrouve les deux autres périodes. L'ordre de grandeur de δg est le bon.

II Gravimètre à atomes froids

❏ – **12.** On utilise la formule de la température cinétique :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T_0 \qquad \text{donc} \qquad v = \sqrt{\frac{3k_B T_0}{m}}$$

Ainsi, comme $p_0 = mv$ avec $m = 85u$:

$$\boxed{p_0 = \sqrt{3 \times 85 u k_B T_0} = \sqrt{3 \times 85 \times 1{,}7 \times 10^{-27} \times 1{,}3 \times 10^{-23} \times 10^{-6}} = 2{,}4 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

La quantité de mouvement p_γ est la quantité de mouvement d'un photon de longueur d'onde λ_0 :

$$p_\gamma = \hbar k = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda}$$

Ainsi :

$$\boxed{p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}6 \times 10^{-34}}{7{,}8 \times 10^{-7}} = 8{,}5 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

Les deux quantités de mouvement sont du presque du même ordre de grandeur, néanmoins p_γ est bien supérieure à p_0 (d'un facteur 35). Le photon modifie significativement la quantité de mouvement de l'atome de rubidium.

❏ – **13.** Dans cette vision classique, on considère $p_1\left(0^+\right) = p_0$ soit :

$$v_1\left(0^+\right) = \frac{p_0}{m}$$

L'accélération est $+g$ car on considère une particule en chute libre, et que z est orienté vers le bas. Ainsi :

$$v_1(t) = gt + C$$

La condition initiale impose donc $C = p_0/m$. Ainsi :

$$z_1(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{p_0}{m}t + C'$$

La distance parcourue par la particule 1 sur la phase $\boxed{\text{a}}$ est $z_1(\tau) - z_1(0)$ soit :

$$\boxed{d_{1,a} = \frac{1}{2}g\tau^2 + \frac{p_0}{m}\tau}$$

De même, pour le paquet 2, la situation est identique à la différence que $p_2\left(0^+\right) = p_0 + p_\gamma$ d'où :

$$\boxed{d_{2,a} = \frac{1}{2}g\tau^2 + \frac{(p_0 + p_\gamma)}{m}\tau}$$

❏ – **14.** Dans la phase $\boxed{\text{b}}$, le paquet 1 arrive avec une quantité de mouvement :

$$p_1\left(\tau^-\right) = mv_1\left(\tau^-\right) = p_0 + mg\tau$$

On ajoute p_γ à p_1 ainsi :

$$p_1\left(\tau^+\right) = p_0 + p_\gamma + mg\tau$$

Soit :

$$v_1\left(\tau^+\right) = \frac{p_0 + p_\gamma}{m} + g\tau$$

On a toujours $a_1 = g$ donc :

$$v_1(t) = gt + C$$

Pour correspondre à la condition initiale :

$$v_1(t) = g\left(t - \tau\right) + \frac{p_0 + p_\gamma}{m} + g\tau = gt + \frac{p_0 + p_\gamma}{m}$$

On intègre une seconde fois :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{p_0 + p_\gamma}{m}t + D$$

La distance parcourue pendant la seconde phase est $x_1\left(2\tau\right) - x_1(\tau)$ ainsi :

$$\boxed{d_{1,b} = \frac{3}{2}g\tau^2 + \frac{(p_0 + p_\gamma)}{m}\tau}$$

On utilise la même démarche pour avoir $d_{2,b}$:

$$p_2\left(\tau^-\right) = mv_2\left(\tau^-\right) = p_0 + p_\gamma + mg\tau$$

On retire p_γ à p_2 ainsi :

$$p_2\left(\tau^+\right) = p_0 + mg\tau$$

On obtient alors :

$$\boxed{d_{2,b} = \frac{3}{2}g\tau^2 + \frac{p_0}{m}\tau}$$

On a :

$$\boxed{z_0 = d_{1,a} + d_{1,b} = 2g\tau^2 + \frac{(2p_0 + p_\gamma)}{m}\tau = d_{2,a} + d_{2,b}}$$

Les centres des paquets d'ondes occupent la même position l'instant $t = 2\tau$.

❏ – **15.** On a :

$$\vec{P} = mg\vec{e_z} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V(z)$$

donc :

$$V(z) = -mgz + C$$

or $V(0) = 0$ d'après l'énoncé donc $C = 0$ d'où :

$$\boxed{V(z) = -mgz}$$

L'énergie mécanique se conservant :

$$\boxed{\frac{p(z)^2}{2m} - mgz = E}$$

❏ – **16.** On considère un état stationnaire $\psi(x,t)=\phi(z)\zeta(t)$. On injecte dans l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\zeta(t)\phi''(z)+V\zeta(t)\phi(z)=\mathrm{i}\hbar\zeta'(t)\phi(z)= \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{i}\hbar\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\phi''(z)}{\phi(z)}+V$$

Ce que l'on obtient est indépendant à la fois du temps et de z. Notons cette constante, homogène à une énergie, E. Ainsi, en particulier :

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)}=E \qquad \text{soit} \qquad \zeta(t)=\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t\right)$$

On inclut la constante dans $\phi(z)$. Ainsi :

$$\boxed{\psi(x,t)=\phi(z)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t\right)}$$

❏ – **17.** On injecte :

$$\phi(z)=\phi_0\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sigma(z)\right)$$

dans l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\phi''(z)}{\phi(z)}+V=E$$

On a :

$$\phi'(z)=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sigma'(z)\phi_0\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sigma(z)\right)$$

donc :

$$\phi''(z)=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sigma''(z)\phi_0\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sigma(z)\right)-\frac{\sigma'(z)^2}{\hbar^2}\phi_0\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sigma(z)\right)$$

Ainsi :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\phi''(z)}{\phi(z)}=\frac{-\mathrm{i}\hbar}{2m}\sigma''(z)+\frac{\sigma'(z)^2}{2m}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\sigma''+\left(\sigma'\right)^2=2m\left[E-V(z)\right]}$$

On a, à l'ordre 1 en $\hbar/\mathrm{i}$:

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\sigma''=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\sigma_0''$$

$$\left(\sigma'\right)^2=\left(\sigma_0'\right)^2+2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\sigma_0'\sigma_1'$$

Ainsi, on obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\boxed{\sigma_0''=2\sigma_0'\sigma_1'} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\left(\sigma_0'\right)^2=\hbar^2k^2}$$

On en déduit :

$$\sigma_0'=\pm\hbar k \qquad \text{soit} \qquad \sigma_0=\pm\hbar\int_0^z k(u)\mathrm{d}u$$

puis :

$$\sigma_1'=-\frac{\sigma_0''}{2\sigma_0'}=-\frac{k'}{2k} \qquad \text{soit} \qquad \sigma_1=-\frac{1}{2}\ln(k)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

Il nous reste plus qu'à réinjecter ces deux expression dans $\phi(z)$:

$$\phi_\pm(z)=\phi_0\exp\left[\pm\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hbar\int_0^z k(u)\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right]$$

On a bien :

$$\boxed{\phi_\pm(z)=\frac{\phi_0}{\sqrt{k(z)}}\exp\left[\pm\mathrm{i}\int_0^z k(u)\mathrm{d}u\right]}$$

La solution physique acceptable correspond à une onde se déplaçant dans le sens des z croissants, c'est la solution $\phi_+(z)$.
Dans le cas particulier d'un potentiel uniforme $V = V_0$:

$$\phi_(z) = \frac{\phi_0}{\sqrt{k}} \exp\left(\mathrm{i}kz\right) \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\sqrt{2m\left(E - V_0\right)}}{\hbar}$$

D'où :

$$\boxed{\psi_(z,t) = \frac{\phi_0}{\sqrt{k}} \exp\left[\mathrm{i}\left(kz - \frac{E}{\hbar}t\right)\right] \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\sqrt{2m\left(E - V_0\right)}}{\hbar}}$$

On retrouve la fonction d'onde pour un paquet d'onde se déplaçant sans déformation.

❏ – **18.** La longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} est :

$$\boxed{\lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{p}}$$

L'approximation est valide (comme $\eta \ll 1$) si :

$$\left|\frac{m\hbar}{4p^3(z)}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right| \ll 1$$

Or $p^2 + 2mV = 2mE$ donc :

$$2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + 2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = 0 \qquad \text{d'où :} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = -\frac{p}{m}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

Ainsi, la condition se réécrit ($\hbar = h/(2\pi)$) :

$$\left|\frac{h}{8\pi p^2(z)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right| \ll 1$$

Or $\lambda_{\mathrm{dB}} = h/p$ donc :

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{dB}}}{\mathrm{d}z} = -\frac{h}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

La condition est donc :

$$\boxed{\left|\frac{\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{dB}}}{\mathrm{d}z}\right| \ll 8\pi}$$

❏ – **19.** Au début de l'étape $\boxed{\text{a}}$, la quantité de mouvement du paquet 1 est p_0 et celle du paquet 2 est $p_0 + p_\gamma$ ainsi :

$$\boxed{k_{1a} = \frac{p_0}{\hbar}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{k_{2a} = \frac{p_0 + p_\gamma}{\hbar}}$$

Au début de l'étape $\boxed{\text{b}}$, la quantité de mouvement du paquet 1 est $p_0 + p_\gamma + mg\tau$ et celle du paquet 2 est $p_0 + mg\tau$ ainsi :

$$\boxed{k_{1b} = \frac{p_0 + p_\gamma + mg\tau}{\hbar}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{k_{2b} = \frac{p_0 + mg\tau}{\hbar}}$$

On a :

$$\varphi^0_{1,a} = \int_0^{d_{1,a}} k(z)\mathrm{d}z = k_1 d_{1,a}$$

Ainsi, de même :

$$\boxed{\varphi^0_1 = \varphi^0_{1,a} + \varphi^0_{1,b} = \frac{p_0}{\hbar}d_{1,a} + \frac{p_0 + p_\gamma + mg\tau}{\hbar}d_{1,b}}$$

$$\boxed{\varphi^0_2 = \varphi^0_{2,a} + \varphi^0_{2,b} = \frac{p_0 + p_\gamma}{\hbar}d_{1,a} + \frac{p_0 + mg\tau}{\hbar}d_{1,b}}$$

On remplace $d_{1,a}$ et $d_{1,b}$ par leurs expressions pour conclure. Le calcul est un peu lourd et on obtient :

$$\boxed{\varphi^0 = -2g\frac{p_\gamma}{\hbar}\tau^2}$$

Or $p_\gamma/\hbar = k = 2\pi/\lambda_0$ d'où :

$$\boxed{\mu = -\frac{4\pi}{\lambda_0}\tau^2 = \frac{2 \times 6{,}3 \times \left(5{,}0 \times 10^{-2}\right)^2}{7{,}8 \times 10^{-7}} = 4{,}0 \times 10^4 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}}$$

❏ – **20.** On observe les interférences de deux ondes de matière, on peut utiliser la formule de Fresnel :

$$\boxed{s = \frac{s_0}{2}\left(1 + \cos\varphi\right)}$$

On a :

$$\boxed{f : \varphi \mapsto \frac{1 + \cos\varphi}{2}}$$

❏ – **21.** On attend une précision relative sur g de l'ordre de 10^{-9}. Ainsi, la précision relative sur φ doit être de la même valeur, car g et φ sont proportionnels. Ainsi :

$$\boxed{\delta\varphi = 10^{-9}\mu g = 4{,}0 \times 10^{-4} \text{ rad}}$$

La mesure de φ sera la plus précise là où la variation de s est la plus grande, c'est-à-dire pour des valeurs autour de $\pi/2 + n\pi$ où n est un entier relatif.

❏ – **22.** On considère k variable :

$$k(z) = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE - 2mV(z)} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE + 2m^2gz}$$

Or $k(z=0) = p_0/\hbar = \sqrt{2mE}/\hbar$: on substitue $2mE$ par p_0^2. D'où :

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,a} &= \frac{1}{\hbar}\int_0^{d_{1,a}} \left(p_0^2 + 2m^2gz\right)^{1/2} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\hbar}\left[\frac{1}{2m^2g}\frac{2}{3}\left(p_0^2 + 2m^2gz\right)^{3/2}\right]_0^{d_{1,a}} \\
&= \frac{1}{3m^2g\hbar}\left[\left(p_0^2 + 2m^2gd_{1,a}\right)^{3/2} - p_0^3\right]
\end{aligned}$$

De même :

$$\varphi_{2,a} = \frac{1}{3m^2g\hbar}\left[\left((p_0 + p_\gamma)^2 + 2m^2gd_{1,a}\right)^{3/2} - (p_0 + p_\gamma)^3\right]$$

On note $K = 1/(3m^2gh)$ et $\nu = 2m^2g$. On a bien :

$$\boxed{\varphi_a = F\left(p_0 + p_\gamma, d_{2,a}\right) - F\left(p_0, d_{1,a}\right) \qquad \text{avec} \qquad F(x,y) = K\left[\left(x^2 + \nu y\right)^{3/2} - x^3\right]}$$

❏ – **23.** On a :

$$d_{1,a} = \frac{2{,}4 \times 10^{-27}}{85 \times 1{,}7 \times 10^{-27}} \times 5 \times 10^{-2} + \frac{10 \times \left(5 \times 10^{-2}\right)^2}{2} \approx 1{,}3 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\boxed{\frac{m^2gd_{1,a}}{p_0^2} = \frac{\left(85 \times 1{,}7 \times 10^{-27}\right)^2 \times 9{,}8 \times 1{,}3 \times 10^{-2}}{\left(2{,}4 \times 10^{-27}\right)^2} = 4{,}6 \times 10^2}$$

Si on se restreint à l'ordre 1 :

$$F(x,y) = K\left(x^3\left(1 + \frac{\nu y}{x^2}\right)^{3/2} - x^3\right) \approx \frac{3}{2}K\nu yx = \frac{d_{1,a}p_0}{\hbar}$$

On retrouve le résultat de la question **19.** Se limiter à l'ordre 1 consiste à considérer le rapport $\nu y/x^2$ petit. Or :

$$\frac{\nu y}{x^2} = \frac{2m^2gd_{1,a}}{p_0^2}$$

L'approximation $\mathscr{A}_0$ n'est donc pas légitime.