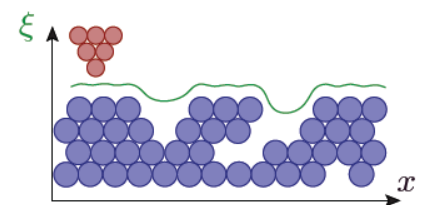


## 1. MICROSCOPE A EFFET TUNNEL .

1. Les quatre facteurs essentiels pour obtenir une image de résolution atomique avec un STM sont les suivants :
  - utilisation d'une pointe de terminaison proche d'un cône dont le sommet est un atome ;
  - positionnement de précision subatomique de la pointe par un système de céramiques piézoélectriques ;
  - bonne stabilité mécanique du microscope ;
  - système électronique d'amplification à bas bruit du courant tunnel (pour le rendre exploitable).
2. Le STM ne permet pas de voir au sens strict les atomes car l'image n'est pas formée par un système d'optique lumineuse. Il donne « seulement » une visualisation de la densité de probabilité de présence d'électrons de conduction sur la surface de l'échantillon étudié, et c'est justement ce que l'on voit dans le « nano-enclos » d'atomes de fer !
3. Il vaut mieux utiliser une pointe inoxydable (en métal noble) afin d'assurer sa stabilité dans le temps et de faciliter l'analyse des images.

Le travail sous vide permet de limiter l'oxydation éventuelle (ou la pollution) de la surface étudiée.
4. L'approche peut être grossière dans un premier temps, avec un système mécanique adapté. Toutefois, il faut réguler la fin de l'approche pour éviter toute collision pointe-échantillon et cela peut-être fait en relevant en continu l'intensité du courant tunnel (un système bloquant l'approche grossière dès que celui-ci a atteint une valeur choisie).
5. L'eau est certes un conducteur (particulièrement avec des sels dissous), mais c'est un conducteur **ionique**. Elle reste un isolant vis-à-vis des électrons qui doivent franchir ce milieu par effet tunnel.
6. En **mode à hauteur constante**, la trajectoire  $z(x)$  est rectiligne et l'allure du profil d'intensité est grosso modo celui de la figure ci-contre (en prenant  $\xi = I_t$ ). Notons que seuls les électrons de surface interviennent et on ne peut pas accéder aux informations de cavités « profondes ».



Ajoutons que le signal mesuré sera pertinent **uniquement si la pointe est vraiment de qualité**. Par exemple, si elle est écrasée ou « bosselée », cela complique nettement l'interprétation des images (et ce, pour tout mode).

7. **En mode à courant constant**, la trajectoire  $z(x)$  présente grosso modo l'allure de la figure précédente (en prenant  $\xi = z$ ) et l'intensité tunnel est constante (on n'a toujours pas accès aux informations « profondes »). En pratique, **il y a quand même des écarts possibles** entre les allures de  $I_t(x)$  à hauteur constante et  $z(x)$  à courant constant (notamment, la résolution verticale est plus élevée dans le premier mode, à hauteur constante, grâce à l'évolution exponentielle rapide de l'intensité tunnel avec la distance pointe-échantillon).
8. La résolution **verticale** du STM est liée à la **rapidité de décroissance avec  $z$  de l'intensité tunnel  $I_t$**  et la résolution **latérale** essentiellement à la **géométrie de la pointe**.

Ce n'est pas du tout la même chose en microscopie optique classique : les deux résolutions sont alors limitées par la diffraction (très grossièrement, on a dans ce cas une résolution de l'ordre de la longueur d'onde).

9. Le document fournit l'expression suivante de l'intensité tunnel

$$I_t = C^{te} V_t \frac{k}{z} e^{-2kz} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\sqrt{2m_e \Phi}}{\hbar}$$

dont le facteur exponentiel n'est pas sans rappeler celui du coefficient de probabilité de transmission  $\Gamma$  rencontré lors de l'étude antérieure de l'effet tunnel à travers une barrière de potentiel unidimensionnelle rectangulaire. La distance caractéristique de décroissance de l'exponentielle est (en prenant  $\Phi = 4 \text{ eV}$ )

$$\delta' = \frac{1}{2k} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_e \Phi}} = 0,05 \text{ nm}$$

et cela montre que l'approche de la pointe à une distance de quelques angströms de l'échantillon, comme dit dans le texte, est véritablement nécessaire pour espérer détecter un courant tunnel. De plus, cela veut dire que pour une distance  $z$  de l'ordre de  $\delta'$  (ou plus), c'est bien le facteur exponentiel dans  $I_t$  qui est déterminant pour sa variation en fonction de  $z$ .

La sensibilité sur l'intensité tunnel est (sachant que c'est le facteur exponentiel qui est déterminant)

$$\frac{\Delta I_t}{I_t} = 2k \Delta z$$

en notant  $\Delta z$  la résolution verticale en mode à hauteur constante. Ainsi,

$$\Delta z = \frac{1}{2k} \frac{\Delta I_t}{I_t} = 1 \text{ pm} = 0,01 \text{ \AA} = 1.10^{-3} \text{ nm}$$

*La résolution verticale est impressionnante et bien en-deça de la taille atomique de l'ordre de l'angström. Toutefois, il ne faut pas oublier qu'elle peut-être limitée par des défauts, notamment sur la pointe... De plus, la résolution latérale va aussi compter !*

10. Le texte dit que la résolution latérale dépend essentiellement de la forme de la pointe et que 90% du courant tunnel circule dans un « canal » d'atome à atome. On peut s'attendre à obtenir une résolution latérale à l'échelle atomique...

*On peut mener une estimation chiffrée de la résolution latérale  $\Delta x$  à partir d'une formule donnée en note de bas de page :*

Estimation chiffrée : Un modèle théorique dans un certain nombre de situations, montre que la résolution latérale est de l'ordre de  $\sqrt{\frac{2z'}{k}}$  où  $z'$  est la distance entre la « surface » de l'échantillon et le centre de courbure de l'atome à l'extrémité de la pointe. On en déduit une estimation chiffrée de  $\Delta x$  :

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2z'}{k}} = \sqrt{\frac{2(z+R)}{k}}$$

où  $R$  est le rayon de l'atome en bout de pointe. On peut l'estimer à  $R \simeq 1 \text{ \AA}$  et adopter une distance  $z = 3 \text{ \AA}$ , d'où

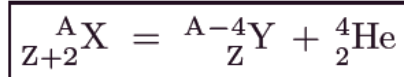
$$\Delta x \simeq 3 \text{ \AA} = 0,3 \text{ nm}$$

***La résolution latérale est inférieure à la résolution verticale mais on atteint tout de même une résolution quasi-atomique ! En pratique, on peut même obtenir un peu mieux (mais les éléments théoriques permettant de le justifier font encore l'objet de recherches...).***

*Notons au passage que le positionnement de la pointe n'est finalement pas limitant puisque les céramiques piézoélectriques permettent son ajustement à l'échelle du picomètre (ou mieux), comme dit dans le texte...*

## 2. RADIOACTIVITE $\alpha$ .

1. L'équation-bilan est la suivante (sachant que la particule  $\alpha$  est un noyau d'hélium) :



2. L'interaction forte permet la cohésion du noyau mais, plus celui-ci est lourd, plus la répulsion coulombienne entre les protons qui s'y trouvent tend à le déstabiliser.
3. L'énergie produite par la désintégration précédente correspond à la perte de masse entre l'état initial et l'état final (en exploitant la loi d'Einstein) :

$$\boxed{Q = (m_X - m_Y - m_\alpha) c^2}$$

En supposant le système isolé durant la désintégration, on peut considérer que l'énergie  $Q$  se retrouve en énergie cinétique du noyau fils et de la particule  $\alpha$ . Or, cette dernière est bien moins lourde que le noyau fils<sup>14</sup> donc

$$\boxed{E \simeq Q = 4,84 \text{ MeV}}$$

l'application numérique étant effectuée pour la désintégration du radium. Le texte donne la valeur 4,90 MeV qui est en relativement bon accord.

La vitesse classique de la particule  $\alpha$  est alors

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2Q}{m_\alpha}} = 1,53 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}}$$

ce qui est suffisamment inférieur à  $c$  pour la considérer comme non relativiste.

4. L'énergie cinétique  $E$  des particules  $\alpha$  libérées correspond en bonne approximation à l'énergie de la perte de masse entre l'état initial et l'état final. Il se trouve que celle-ci reste dans une gamme étroite de valeurs (peu de liaisons nucléaires étant rompues).
5. L'énergie potentielle d'interaction coulombienne entre la particule  $\alpha$  (charge  $2e$ ) et le noyau fils (charge  $Ze$ ) est

$$\boxed{V(r) = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r}}$$

6. Le texte donne la relation de détermination du rayon nucléaire

$$\boxed{R = r_0 A^{1/3}} \quad \text{où} \quad \boxed{r_0 = 1,2 \text{ fm}}$$

Concernant l'énergie maximale de barrière  $E_m$ , elle est telle que  $V(R) = E_m$  donc

$$\boxed{E_m = \frac{Z e^2}{2\pi \epsilon_0 r_0 A^{1/3}}}$$

Enfin, le rayon de sortie de barrière  $R_e$  est tel que  $V(R_e) = E$ , soit

$$\boxed{R_e = \frac{Z e^2}{2\pi \epsilon_0 E}}$$

On effectue les applications numériques demandées pour le radium sachant que  $A = 226$ ,  $Z = 86$  (noyau fils avec 2 protons de moins !) et  $E = 4,90 \text{ MeV}$  (voir texte), soit

$$\boxed{R = 7,3 \text{ fm}}$$

$$\boxed{E_m = 34 \text{ MeV}}$$

$$\boxed{R_e = 51 \text{ fm}}$$

Le rayon  $R$  est bien de l'ordre de 10 fm, la hauteur de barrière de l'ordre de 30 MeV (conformément au texte) et la largeur de barrière à franchir pour la particule  $\alpha$  est particulièrement importante relativement à la taille du noyau.

7. La particule  $\alpha$  évolue avec une énergie potentielle  $E_0 \simeq -40 \text{ MeV}$  dans le noyau (selon le texte). Si elle a une énergie cinétique  $E$  une fois libérée de celui-ci, cela veut dire que  $E$  représentait son énergie totale dans le noyau :

$$E = E_{c,n} + E_0 = \frac{1}{2} m_\alpha v^2 + E_0$$

donc elle effectue des allers et retours avec une vitesse

$$v = \sqrt{\frac{2(E - E_0)}{m_\alpha}} = 4,7 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

et il est à la limite raisonnable de la considérer non relativiste (pas très choquant vu la « simplicité » du modèle étudié). Il lui faut un temps  $\tau = 2R/v$  pour aller d'une barrière à l'autre du noyau, d'où la fréquence de collision  $f = 1/\tau$  d'expression littérale et d'application numérique (pour le radium) finales

$$f = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2(E - E_0)}{m_\alpha}} = 3,2 \cdot 10^{21} \text{ Hz}$$

L'ordre de grandeur est bien de  $10^{21}$  Hz comme annoncé par le texte.

8. Il n'y a pas de quoi être surpris car c'est un résultat connu du cours sur l'effet tunnel, dans la mesure où la largeur de barrière dépasse quelques  $\delta = 1/K$ . Dans le cas du radon, on peut calculer  $\delta = 0,42$  fm et voir que la condition est largement réalisée (largeur de barrière  $R_e - R = 43$  fm).

9. On part d'une fonction d'onde spatiale choisie pour  $r \in [R; R_e]$  de la forme

$$\varphi(r) = C e^{-\gamma(r)} + D e^{\gamma(r)}$$

pour laquelle on considère, de façon approximativement analogue à l'étude de l'effet tunnel du cours, que la probabilité de transmission est de la forme

$$T(E) \simeq \exp(-2[\gamma(R_e) - \gamma(R)])$$

(relation démontrable avec l'approximation WKB non détaillée ici car relativement complexe et trop hors-programme...).

La fonction d'onde spatiale  $\varphi(r)$  doit vérifier l'équation de Schrödinger indépendante du temps unidimensionnelle (sans considération de l'aspect sphérique du problème...)

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}(r) + \frac{2m_\alpha}{\hbar^2} [E - V(r)] \varphi(r) = 0$$

$$\text{Or,} \quad \frac{d^2\varphi}{dr^2}(r) = \left(\frac{d\gamma}{dr}(r)\right)^2 \varphi(r) + \frac{d^2\gamma}{dr^2}(r) [-C e^{-\gamma(r)} + D e^{\gamma(r)}]$$

et, dans l'approximation WKB, on néglige le dernier terme. Du coup, l'équation de Schrödinger indépendante du temps fournit (pour une solution  $\varphi$  non identiquement nulle)

$$\left(\frac{d\gamma}{dr}(r)\right)^2 = \frac{2m_\alpha}{\hbar^2} [V(r) - E]$$

On peut se contenter de retenir l'expression positive de la dérivée sans restreindre la généralité :

$$\frac{d\gamma}{dr}(r) = \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2} [V(r) - E]}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer et conclure...

10. La formule  $t_{1/2} = (\ln 2)/\lambda$  est caractéristique des lois des désintégrations radioactives (loi cinétique d'ordre 1). Détaillons un peu...

Un noyau radioactif a une certaine probabilité, constante, de se désintégrer par unité de temps  $\lambda$  (ici relative à la désintégration  $\alpha$ ). Pendant un intervalle de temps  $dt$  se désintègrent  $N(t) \lambda dt$  noyaux parmi un nombre  $N(t)$  de noyaux pères à l'instant  $t$ . Par conséquent,

$$dN(t) = -\lambda N(t) dt$$

est analogue à une loi cinétique d'ordre 1. Par intégration, il vient la loi de décroissance exponentielle du nombre de noyaux pères

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}$$

La période radioactive (demi-vie) est telle que

pour tout choix d'instant initial. Compte-tenu de la loi  $N(t)$  précédente, on trouve bien

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Pour culture,  $a(t) = |dN/dt| = \lambda N(t)$  représente l'activité de la source radioactive...

11. En notant  $f$  la fréquence des collisions, on a la loi (qui suppose  $R \ll R_e$ , ce qui est relativement satisfaisant pour le radium)

$$t_{1/2}(E) = \frac{\ln 2}{f} \exp \left[ 4\pi Z \sqrt{\frac{E_\ell}{E}} - 8 \sqrt{\frac{ZR}{r_\ell}} \right]$$

où 
$$r_\ell = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_\alpha e^2} \quad \text{et} \quad E_\ell = \frac{e^2}{8\pi \varepsilon_0 r_\ell}$$

Pour le radium, on trouve  $r_\ell = 7,3 \text{ fm}$ ,  $E_\ell = 0,10 \text{ MeV}$  et

$$t_{1/2} = 6,3 \cdot 10^{12} \text{ s} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ années}$$

Le texte fournit une valeur expérimentale de  $1,6 \cdot 10^3$  années. On a donc un écart de deux ordres de grandeur qui peut sembler important, mais celui-ci est à relativiser compte-tenu de la simplicité du modèle et de la grande étendue des ordres de grandeur des demi-vies observées expérimentalement...

12. La loi de Geiger-Nuttall est de la forme

$$t_{1/2}(E) = C_1 e^{C_2/\sqrt{E}}$$

La formule de Gamow est cohérente et permet de proposer les relations

$$C_1 = \frac{\ln 2}{f} e^{-8\sqrt{Z R/r_\ell}} \quad \text{et} \quad C_2 = 4\pi Z \sqrt{E_\ell}$$

13. L'énoncé suppose que  $C_1$  est une constante : l'intérêt du modèle de Gamow réside surtout au niveau du coefficient  $C_2$ ...

Pour effectuer la validation demandée, on peut représenter  $\log t_{1/2}$  avec  $t_{1/2}$  en secondes en fonction de  $Z/\sqrt{E}$  (pour les espèces des tableaux de l'énoncé) ou effectuer une régression linéaire. On doit en effet avoir une évolution affine (avec deux constantes  $\chi_1$  et  $\chi_2$ ) :

$$\log t_{1/2}(\text{s}) = \chi_1 + \chi_2 \frac{Z}{\sqrt{E}(\text{MeV})}$$

L'évolution affine est assez bien validée avec  $\chi_1 = -48,0$  et  $\chi_2 = 1,44 \text{ MeV}^{1/2}$  et avec un coefficient de corrélation de 0,98 (mais bon, ce n'est pas forcément un coefficient très révélateur...). Toutefois, puisque  $C_2 = 4\pi Z \sqrt{E_\ell}$ , on se serait attendu plutôt à  $\chi_2 \simeq 4 \text{ MeV}^{1/2}$ ... Le modèle de Gamow n'est pas pleinement satisfaisant mais fut un point de départ pour d'autres approches plus élaborées (et que l'on cherche encore à faire progresser...).