Correction exercice 4

Exercice II : Dynamique de l'inversion de population dans un système à trois niveaux

1. Équations d'évolution temporelle des populations :

$$\begin{cases} (1) & \frac{dN_1}{dt} = -W_P\, N_1 + A\, N_2 + W_P\, N_3 \\ (2) & \frac{dN_2}{dt} = -A\, N_2 + \gamma\, N_3 \\ (3) & \frac{dN_3}{dt} = W_P\, N_1 - W_P\, N_3 - \gamma\, N_3 \end{cases}$$

γ est grand alors que N_3 est petit, donc on ne sait rien de la valeur de γN_3 par rapport à AN_2.

2. N_3 négligeable devant N_2 et N_1 donc $N_1 + N_2 = N$

$$\begin{cases} N_2 + N_1 = N \\ N_2 - N_1 = \Delta N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{N-\Delta N}{2} \\ N_2 = \frac{N+\Delta N}{2} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \frac{d\Delta N}{dt} = -2\frac{dN_1}{dt} = 2\, W_P(N_1 - N_3) - 2AN_2 \text{ avec } N_3 \ll N_1$$
$$= -(W_P + A)\, \Delta N + (W_P - A)\, N$$

Équation différentielle régissant l'évolution temporelle de $\Delta N(t)$:

$$\frac{d\Delta N}{dt} + (W_P + A)\, \Delta N = (W_P - A)\, N$$

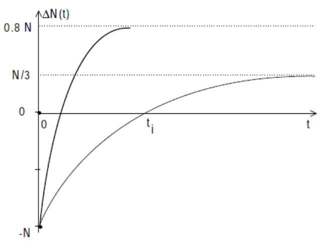
3. À t = 0, tous les atomes sont sur **1** donc $N_1 = N$, $N_2 = N_3 = 0$ et $\Delta N = -N$. En régime stationnaire, $\frac{d\Delta N}{dt} = 0$ et $\Delta N = \frac{(W_P - A)}{(W_P + A)}N \equiv \Delta N^0$ (solution particulière de l'équation différentielle). La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est $C \exp -(W_P + A)\, t$. La solution de l'équation différentielle est $\Delta N^0 + C \exp -(W_P + A)t$ avec à $t = 0$ $\Delta N(0) = -N = \Delta N^0 + C$ d'où $C = -\frac{2W_P}{W_P + A}N$ et

$$\Delta N(t) = \Delta N^0 - \frac{2W_P}{W_P + A}\, N\, \exp -(A + W_P)t = \Delta N^0 \left[1 - \frac{2W_P}{W_P - A} \exp -(A + W_P)t\right]$$

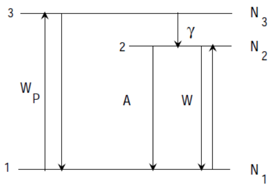
Attention : il faut calculer la constante d'intégration C à partir des conditions initiales pour la somme sol. part. + sol. générale de l'équation sans second membre.

Autre méthode : séparation des variables : $\int_{-N}^{\Delta N(t)} \frac{dN}{\Delta N - \Delta N^0} = -\int_0^t (A + W)\, dt$.

4. On obtient l'inversion de population s'il existe un temps t_i après lequel $\Delta N(t)$ est positif, donc si $\Delta N^0 > 0 \Leftrightarrow W_P > A$. $\Delta N(t_i) = 0 \Leftrightarrow t_i = -\frac{1}{W_P + A} \ln \frac{W_P - A}{2W_P}$. Interprétation : les atomes ne font que passer très rapidement par le niveau **3** donc le nombre de transitions **1** →**2** vaut $W_P N_1$, celui des transitions **2** →**1** vaut AN_2. En régime stationnaire, ces deux nombres sont égaux. Si l'on souhaite avoir $W_P N_1 = AN_2$ avec $N_2 > N_1$, cela impose $W_P > A$.



5. $W_P = 2A$: $t_i = 9{,}2\ 10^{-4}$ s, $\Delta N^0 = N/3$; $\Delta N(t) = \Delta N^0\, [1 - 4 \exp -1,5\ 10^3\, t]$
$W_P = 9A$: $t_i = 1{,}6\ 10^{-4}$ s, $\Delta N^0 = 0{,}8\ N$; $\Delta N(t) = \Delta N^0\, [1 - 2,25 \exp -5\ 10^3\, t]$ (courbe de gauche).
Un pompage plus fort permet d'obtenir une différence de population plus importante, et de l'atteindre plus vite.



7. (a)

$$
\left\{
\begin{array}{llllllll}
(1) & \frac{dN_1}{dt} & = & -W_P\ N_1 & +W_P\ N_3 & +A\ N_2 & & +W\ N_2 \quad -W N_1 \\
(2) & \frac{dN_2}{dt} & = & & & -A\ N_2 & +\gamma\ N_3 & -W\ N_2 \quad +W N_1 \\
(3) & \frac{dN_3}{dt} & = & W_P\ N_1 & -W_P\ N_3 & & -\gamma\ N_3 &
\end{array}
\right.
$$

7. (b) En régime stationnaire, $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = 0$. Pour $W_P(N_3 - N_1) \simeq -W_P N_1$, la première équation ne dépend que de N_1 et N_2 qu'on remplace par $\frac{N-\Delta N}{2}$ et $\frac{N+\Delta N}{2}$ d'où $\Delta N\ (W_P + A + 2W) = N(W_P - A)$ et $\Delta N = N\frac{(W_P-A)}{(W_P+A+2W)} = N\frac{(W_P-A)}{(W_P+A)}\ \frac{1}{1+\frac{2W}{W_P+A}} = \frac{\Delta N^0}{1+\frac{2W}{W_P+A}}$.