

I. Hexapôle électrostatique

1.a) L'invariance de la distribution de charges selon (Oz) assure que **le potentiel électrostatique et les composantes du champ électrique sont indépendants de la coordonnée z .**

1.b) Tout plan (Mxy) est un plan de symétrie de la distribution de charges, le champ électrostatique en M est contenu dans ce plan, en conséquence : $E_z(x, y) = 0$.

1.c) De tels plans sont des plans de symétries des charges, **en tout point de ces plans le champ électrostatique est contenu dans ces plans.** En conséquence **le champ électrique est nul au centre du piège.** (Argument $V=0$ par des considérations de symétrie ok)

1.d) Le plan (yOz) est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges. En tout point M de ce plan, le champ électrique est perpendiculaire à ce plan. Les équipotentielles étant perpendiculaires aux lignes de champ, le plan (yOz) est un plan équipotentiel. Par symétrie, il en est de même des deux autres plans.

1.e) La distribution de charges est invariante par rotation d'angle $2\pi/3$.

Le potentiel est une fonction $2\pi/3$ -périodique, elle est développable en série de Fourier selon un développement de forme générale :

$$V(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos\left(\frac{2\pi n\theta}{3}\right) \Rightarrow V(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos(3n\theta)$$

Remarque : très généralement, la série de Fourier devrait posséder des termes en $\cos(3n\theta)$ et $\sin(3n\theta)$. Le plan (xOz) étant un plan de symétrie des charges et en prenant un potentiel nul pour $\theta = 0$, il vient $V(\theta) = V(-\theta)$, le potentiel est une fonction paire de θ , les coefficients de Fourier des termes en $\sin(3n\theta)$ sont donc nécessairement nuls.

2. Considérons à ce stade une électrode de charge linéique λ centrée sur l'axe (Oz) .

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, le champ électrostatique est contenu dans ces plans et donc dans leur intersection, en conséquence $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{u}_r$.

De part l'invariance de la distribution de charges par rotation d'angle θ et translation selon (Oz) , $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$.

On applique alors le théorème de Gauss en considérant pour surface Σ fermée un cylindre de rayon $r > a$ et de hauteur h centré sur l'axe (Oz) :

$$\Phi_\Sigma = \underbrace{\Phi_{S_{\text{lat.}}}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{S_{\text{sup.}}}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{S_{\text{inf.}}}}_{=0} = \iint_{S_{\text{lat.}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r(r) \iint_{S_{\text{lat.}}} dS = E_r(r) \times 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

En conséquence $\forall r > a, \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$. Il vient alors pour le potentiel :

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + \text{cste}'$$

3. Le théorème de superposition assure que le potentiel électrostatique est la somme des potentiels créés par chacune des électrodes indépendamment, c'est-à-dire :

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^6 (-1)^i \ln(D_i) + \text{cste}' \Rightarrow V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}\right) + \text{cste}'$$

À l'origine du repère $\forall i, D_i = R$, avec un choix d'un potentiel nul à l'origine il vient :

$$V(O) = 0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(1) + \text{cste}' \Rightarrow \text{cste}' = 0$$

4. Compte tenu des coordonnées des électrodes :

$$D_1 D_3 D_5 = |(\underline{Z} - R)(\underline{Z} - jR)(\underline{Z} - j^2 R)| \\ = \left| \underline{Z}^3 - \underline{Z}^2 R \left(\underbrace{j^2 + j + 1}_{=0} \right) + \underline{Z} R^2 \left(\underbrace{j^3 + j^2 + j}_{=0} \right) - \underbrace{j^3}_{=1} R^3 \right|$$

En conséquence $D_1 D_3 D_5 = |\underline{Z}^3 - R^3|$. De la même manière, le calcul de $D_2 D_4 D_6$ revient à changer $R \rightarrow -R$, donc $D_2 D_4 D_6 = |\underline{Z}^3 - (-R)^3| = |\underline{Z}^3 + R^3|$. Finalement :

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{|R^3 + \underline{Z}^3|}{|R^3 - \underline{Z}^3|}\right)$$

5. Pour $r \ll R$, et à l'ordre le plus bas non trivial :

$$\frac{|R^3 + \underline{Z}^3|}{|R^3 - \underline{Z}^3|} = \left| \frac{1 + (\underline{Z}/R)^3}{1 - (\underline{Z}/R)^3} \right| \approx \left| \left[1 + \left(\frac{\underline{Z}}{R} \right)^3 \right] \left[1 + \left(\frac{\underline{Z}}{R} \right)^3 \right] \right| \approx \left| 1 + 2 \left(\frac{\underline{Z}}{R} \right)^3 \right| \\ \approx \left| 1 + 2 \left(\frac{r^3 e^{i3\theta}}{R^3} \right) \right| \approx \sqrt{\left(1 + \frac{2r^3}{R^3} \cos(3\theta) \right)^2 + \left(\frac{2r^3}{R^3} \sin(3\theta) \right)^2} \\ \approx \sqrt{1 + 4 \frac{r^3}{R^3} \cos(3\theta)} \approx 1 + 2 \frac{r^3}{R^3} \cos(3\theta)$$

En conséquence : $\ln\left(\frac{|R^3 + \underline{Z}^3|}{|R^3 - \underline{Z}^3|}\right) \approx 2 \frac{r^3}{R^3} \cos(3\theta)$ et finalement :

$$\forall r \ll R, V(r, \theta) \approx \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \cos(3\theta)$$

On retrouve les symétries étudiées dans la première partie en particulier la parité du potentiel en θ , sa périodicité par rotation d'angle $2\pi/3$, le fait que les plans d'équation $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/2$ et $\theta = 5\pi/6$ sont des plans équipotentiels.

6. L'expression du potentiel électrostatique obtenue à la question 3 est valable en dehors des électrodes. La continuité du potentiel assure que l'expression est valable à la limite sur les électrodes.

L'électrode C_1 étant équipotentielle, l'idée est de déterminer le potentiel au point P_1 de coordonnées $(x = R - a, y = 0, z = 0) = (r = R - a, \theta = 0, z = 0)$, c'est-à-dire $\underline{Z}_1 = R - a$. Pour ce point, avec $a \ll R$:

$$\left| \frac{R^3 + \underline{Z}_1^3}{R^3 - \underline{Z}_1^3} \right| = \left| \frac{1 + (1 - a/R)^3}{1 - (1 - a/R)^3} \right| \approx \left| \frac{2 - 3a/R}{-3a/R} \right| \approx \frac{2R}{3a}$$

Donc
$$V(C_1) = V(P_1) = V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{2R}{3a}\right).$$

Le potentiel électrostatique des autres électrodes impaires est bien évidemment identique du fait de la périodicité du potentiel.

Pour les électrodes paires, on considère l'électrode C_4 et le point P_4 d'affixe $\underline{Z}_4 = -(R - a)$, il vient :

$$\left| \frac{R^3 + \underline{Z}_4^3}{R^3 - \underline{Z}_4^3} \right| = \left| \frac{1 - (1 - a/R)^3}{1 + (1 - a/R)^3} \right| \approx \left| \frac{-3a/R}{2 - 3a/R} \right| \approx \frac{3a}{2R}$$

En conséquence
$$V(C_4) = -V_0.$$

Plus simplement, on remarque que le plan (yOz) est un plan d'antisymétrie des charges, le potentiel étant nul sur ce plan, il vient nécessairement $V(C_4) = -V(C_1)$.

7. On considère des électrodes de hauteur h . Les trois électrodes impaires portent une charge totale $Q = 3\lambda h$, la différence de potentiel entre les électrodes impaires et paires est égale à $2V_0$ en conséquence pour la capacité $\mathcal{C}$ du dispositif

$$\mathcal{C} = \frac{3\lambda h}{2V_0} = \frac{3\lambda h \times 2\pi\varepsilon_0}{2\lambda \ln\left(\frac{2R}{3a}\right)} = \frac{3\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{2R}{3a}\right)} \Rightarrow C_\ell = \frac{3\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{2R}{3a}\right)}$$

La capacité linéique C_ℓ a été obtenue en divisant la capacité par la hauteur du dispositif.

Avec $V_0 C_\ell = \frac{3\lambda}{2}$, il vient :
$$\forall r \ll R, V(r, \theta) \approx \frac{2V_0 C_\ell}{3\pi\varepsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \cos(3\theta).$$

8. A.N. :
$$C_\ell = \frac{3\pi \times 8,85 \times 10^{-12}}{\ln\left(\frac{2 \times 25}{3 \times 2,5}\right)} \Rightarrow C_\ell = 4,4 \times 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

II. Mouvement de molécules polaires dans un hexapôle électrostatique

1. $\mathcal{E}_p = -\vec{d} \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{d} \cdot \vec{E}}{\|\vec{E}\|} \|\vec{E}\| \Rightarrow \mathcal{E}_p = -d_{\text{eff}} \|\vec{E}\|$ ⚠ cours

2. Avec $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$ et l'expression de $V(r, \theta)$ obtenue en I.5, il vient :

⚠ grad !
$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{3\lambda}{\pi\varepsilon_0} \frac{r^2}{R^3} [-\cos(3\theta) \vec{u}_r + \sin(3\theta) \vec{u}_\theta]$$

Il vient $\|\vec{E}\| = \frac{3\lambda}{\pi\varepsilon_0} \frac{r^2}{R^3}$ donc $\mathcal{E}_p = -\frac{3\lambda d_{\text{eff}}}{\pi\varepsilon_0} \frac{r^2}{R^3}$ et finalement pour la force :

$$\vec{f} = -\vec{\text{grad}} \mathcal{E}_p \Rightarrow \vec{f} = \frac{6\lambda d_{\text{eff}}}{\pi\varepsilon_0 R^3} r \vec{u}_r$$

3. On applique le principe fondamental de la dynamique à une molécule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \frac{6\lambda d_{\text{eff}}}{\pi\varepsilon_0 R^3} r \vec{u}_r = -K\vec{r} \text{ avec } K = -\frac{6\lambda d_{\text{eff}}}{\pi\varepsilon_0 R^3}$$

L'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique à condition que $K > 0$, c'est-à-dire $d_{\text{eff}} < 0$.

Dans ce cas de figure, on obtient un mouvement oscillant de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{K/m}$.

Pour $d_{\text{eff}} > 0$, l'équation est associée à un système instable, **les particules fuient le centre du piège**, c'est un **mouvement de diffusion**.

4. En l'absence de force selon l'axe (Oz) , le mouvement est inertiel selon cette direction, en conséquence : $z(t) = z_0 + v_{0z}t$ avec $z(t=0) = z_0$. ⚠ $z(0) \neq 0$

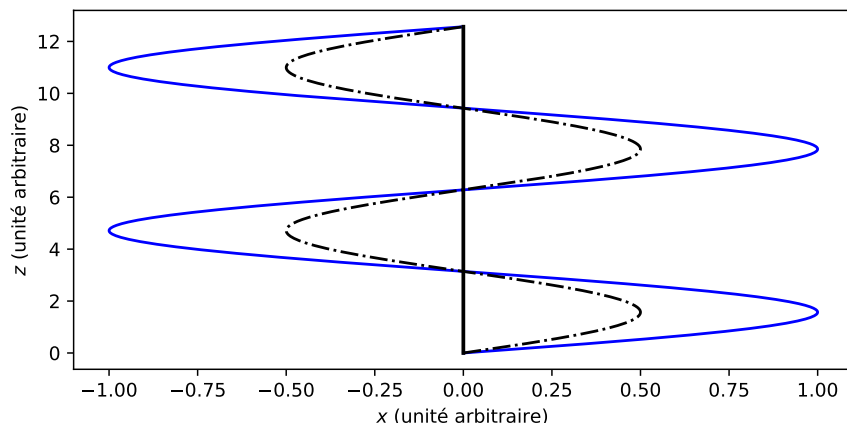
Dans le cas d'un mouvement périodique, $d_{\text{eff}} < 0$ c'est-à-dire $K > 0$. En projection sur (Ox) , $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$, la solution générale est de la forme $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. Compte tenu des conditions initiales $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_{0x}$, il vient :

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \text{ De même } y(t) = \frac{v_{0y}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

5. Les molécules telles que $d_{\text{eff}} < 0$ restent localisées au voisinage de l'axe (Oz) tandis que les molécules telles que $d_{\text{eff}} > 0$ s'éloignent irrémédiablement de l'axe.

Pour les molécules qui restent localisées au voisinage de l'axe (Oz) , l'isochronisme des

oscillations de l'oscillateur harmonique assure que les particules coupent à nouveau l'axe (Oz) à chaque demi-période et ceci quelle que soit la composante de vitesse latérale comme représenté sur la figure suivante.



La première refocalisation se produit pour $\omega_0 t_1 = \pi$, c'est-à-dire pour la distance parcourue $\Delta z = \frac{\pi v_{0z}}{\omega_0}$. La distance de refocalisation dépend de d_{eff} via la pulsation propre.

Remarque : à ce stade, on a supposé la même vitesse v_{0z} pour toutes les molécules.

6. La probabilité qu'une molécule ait une vitesse en norme égale à v à dv près est donnée par :

$$\delta P(v) = \frac{\delta N(v)}{dv} = A v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

Erreur énoncé
→ le barème en
tient compte
(voir cc TH1)

On considère $f : v \mapsto v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$. La vitesse la plus probable est donnée par $f'(v) = 0$, c'est-à-dire :

$$0 = \left[3v^2 + v^3 \times \left(\frac{-2mv}{2k_B T}\right)\right] \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

En associant $k_B T/2$ à l'énergie moyenne pour chaque degré de liberté énergétique quadratique, il vient :

$$\frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{2} \Rightarrow v_q = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \Rightarrow v_q = v_p$$

7.a. Avec $\omega_0 = \sqrt{K/m}$, $K = \frac{6\lambda |d_{\text{eff}}|}{\pi \varepsilon_0 R^3}$ et $V_0 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{2R}{3a}\right)$, il vient :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12V_0 |d_{\text{eff}}|}{mR^3 \ln\left(\frac{2R}{3a}\right)}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12 \times 50 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-30}}{34 \times 1,66 \times 10^{-27} \times (2,5 \times 10^{-2})^3 \times \ln(20/3)}} \Rightarrow \omega_0 = 1,04 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

7.b. Avec $v_p = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 140}{34 \times 1,66 \times 10^{-27}}} \Rightarrow v_p = 320 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, il vient (en assimilant v_{0z} à v_p) :

$$\Delta z = \frac{\pi \times 320,46}{1037} \Rightarrow \Delta z = 0,97 \text{ m}$$

III. Un anneau de stockage pour les molécules polaires

1. À la question II.2, on a obtenu $\vec{F} = -K\vec{r}$ avec $\vec{r}$ le vecteur des coordonnées polaires, l'origine étant définie au centre du piège. Il suffit d'adapter l'expression avec une origine centrée sur le cercle de rayon ρ_T du tore, en conséquence on opère la transformation $\vec{r} \rightarrow (\rho - \rho_T)\vec{e}_\rho + x\vec{e}_x$ qui donne le résultat attendu.

Compte tenu des composantes de l'accélération en coordonnées cylindriques, l'application du principe fondamental de la dynamique à une molécule conduit à :

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) &= -K(\rho - \rho_T) \\ m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) &= 0 \\ m\ddot{x} &= -Kx \end{cases} \quad \text{! } \vec{a} \text{ en cylindrique}$$

2. L'application du théorème du moment cinétique à la molécule en projection selon $\vec{e}_x$ conduit à :

$$\frac{dL_x}{dt} = (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_x$$

Avec $\overrightarrow{OP} = \rho\vec{e}_\rho + x\vec{e}_x$ et $\vec{F} = F_\rho\vec{e}_\rho + F_x\vec{e}_x$, il vient $(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}) \perp \vec{e}_x$, en conséquence $\frac{dL_x}{dt} = 0$ et L_x est une constante du mouvement.

On commence par déterminer, à une constante additive près, l'énergie potentielle associée à la force électrostatique :

$$\vec{F} = -K(\rho - \rho_T)\vec{e}_\rho - Kx\vec{e}_x = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \Rightarrow E_p = \frac{K}{2} [(\rho - \rho_T)^2 + x^2]$$

La force étant conservative, l'énergie mécanique de la molécule se conserve, avec :

$$E_M = E_c + E_p = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2] + \frac{K}{2} [(\rho - \rho_T)^2 + x^2]$$

$$\Rightarrow E_M = \underbrace{\frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2]}_{\text{mvt radial et angulaire}} + \underbrace{\frac{K}{2} (\rho - \rho_T)^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{K}{2} x^2}_{\text{mvt selon } (Ox)}$$

Trop d'erreurs
de signe ! $E_{p,\rho} \geq 0$ (+1/2 kx^2)

Les équations différentielles montrent que le mouvement radial/angular et le mouvement selon (Ox) sont découplés.

Par ailleurs, en multipliant l'équation du mouvement selon $\vec{e}_x$ par $\dot{x}$, il vient :

$$m\ddot{x}\dot{x} = -Kx\dot{x} \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{K}{2}x^2 = \text{cste}_1$$

L'énergie mécanique du mouvement selon (Ox) est une constante, comme l'énergie mécanique totale se conserve, il en est donc de même de l'énergie mécanique associée au mouvement radial/angularaire.

Remarque : le mouvement selon (Ox) n'étant stable que pour $K > 0$, on se limite pour la suite à ce cas de figure.

3.a. Avec $\rho(t) = \rho_0$, l'équation projetée sur la direction radiale se simplifie selon :

$$-m\rho_0\dot{\varphi}^2 = -K(\rho_0 - \rho_T) \Rightarrow \boxed{\rho_0\dot{\varphi}^2 = \frac{K}{m}(\rho_0 - \rho_T)}$$

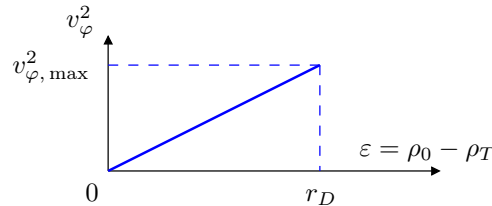
Le membre de gauche étant positif, cela impose $K(\rho_0 - \rho_T) \geq 0$ et donc $\boxed{\rho_0 \geq \rho_T}$.

3.b. Avec $v_\varphi^2 = \rho_0^2\dot{\varphi}^2$, la relation précédente donne : $\boxed{v_\varphi^2 = \frac{K}{m}(\rho_0 - \rho_T)\rho_0}$

3.c. La vitesse v_φ s'annule pour $\rho_0 = \rho_T$ et augmente quand on s'éloigne du centre du tore. Considérons des particules injectées avec $v_\varphi > 0$. Compte tenu des valeurs proposées pour r_D et ρ_T , on pose $\rho_0 = \rho_T + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll \rho_T$ et finalement :

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{K}{m}\varepsilon(\rho_T + \varepsilon)} \approx \sqrt{\frac{K}{m}\rho_T\varepsilon}$$

Il est sans doute alors plus simple de représenter $v_\varphi^2 = v_\varphi^2(\varepsilon)$ plutôt que la fonction proposée par l'énoncé.



La vitesse est donc maximale à la limite du domaine, c'est-à-dire pour $\varepsilon = r_D$:

$$\boxed{v_\varphi^{\max} = \sqrt{\frac{K\rho_T r_D}{m}}}$$

Avec $K = \frac{12|d_{\text{eff}}|V_0}{R^3 \ln\left(\frac{2R}{3a}\right)}$, il vient : $v_\varphi^{\max} = \sqrt{\frac{12|d_{\text{eff}}|\rho_T V_0 r_D}{mR^3 \ln\left(\frac{2R}{3a}\right)}}$.

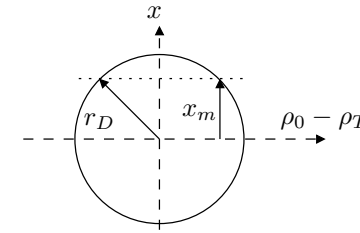
$$v_\varphi^{\max} = \sqrt{\frac{12 \times 3 \times 10^{-30} \times 0,5 \times 50 \times 10^3 \times 2,5 \times 10^{-3}}{34 \times 1,66 \times 10^{-27} \times (2,5 \times 10^{-2})^3 \ln(20/3)}} \Rightarrow \boxed{v_\varphi^{\max} \approx 37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

4.a. L'équation différentielle se réécrit : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ qui admet pour solution générale :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

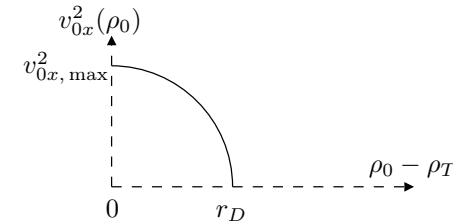
Compte tenu des conditions initiales, il vient : $\boxed{x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$

4.b. L'amplitude du mouvement selon (Ox) est $x_m = \frac{v_{0x}}{\omega_0}$. On souhaite que le mouvement reste à l'intérieur du tube torique de rayon r_D . Lorsqu'on se rapproche du bord du piège, le déplacement selon (Ox) est plus limité comme le montre le schéma suivant :



Plus précisément : $x_m^{\max} = \sqrt{r_D^2 - (\rho_0 - \rho_T)^2}$. *Limite domaine !*

Et donc pour la vitesse maximale : $\boxed{v_{0x}^{\max}(\rho_0) = \omega_0 \sqrt{r_D^2 - (\rho_0 - \rho_T)^2}}$



La vitesse est maximale pour $\rho_0 = \rho_T$ et donc $\boxed{v_{0x}^{\max} = \omega_0 r_D}$.

A.N. : $v_{0x}^{\max} = 1,04 \times 10^3 \times 2,5 \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{v_{0x}^{\max} = 2,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

5.a. On commence par exprimer L_x :

$$L_x = m[\rho \vec{e}_\rho \wedge (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)] \cdot \vec{e}_x \Rightarrow L_x = m\rho^2 \dot{\varphi}$$

À l'instant initial, $L_x = m\rho_T \times \rho_T \dot{\varphi}(t=0) = m\rho_T \times v_{\varphi 0}$, on en déduit :

$$\dot{\varphi} = \frac{\rho_T v_{\varphi 0}}{\rho^2}$$

Et donc pour l'énergie mécanique du mouvement radial et angulaire :

$$E_{\rho,\varphi} = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2] + \frac{K}{2} (\rho - \rho_T)^2$$

$$\Rightarrow E_{\rho,\varphi} = \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \underbrace{\frac{m}{2} \frac{\rho_T^2 v_{\varphi 0}^2}{\rho^2} + \frac{K}{2} (\rho - \rho_T)^2}_{U_{\text{eff}}(\rho)}$$

5.b. Avec $\dot{\rho}^2 \geq 0$, il vient nécessairement $U_{\text{eff}}(\rho) \leq E_0 = \frac{1}{2} m [v_{\rho 0}^2 + v_{\varphi 0}^2]$.

Si à ce stade on oublie les limites imposées par le piège, la fonction d'énergie potentielle effective vérifie $U_{\text{eff}}(\rho) \rightarrow +\infty$ pour $\rho \rightarrow 0$ et $\rho \rightarrow +\infty$. Il existe nécessairement $\rho_{\min}$ et $\rho_{\max}$ qui vérifient $U_{\text{eff}}(\rho_{\min}) = U_{\text{eff}}(\rho_{\max}) = E_0$.

5.c. Partant de : $\frac{m}{2} [v_{\rho 0}^2 + v_{\varphi 0}^2] = \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{m}{2} \frac{\rho_T^2 v_{\varphi 0}^2}{\rho^2} + \frac{K}{2} (\rho - \rho_T)^2$, on se place dans le cas limite pour lequel la vitesse radiale s'annule en $\rho = \rho_T \pm r_D$ ce qui impose :

*Limite
domaine*

$$v_{\rho 0}^2 = v_{\varphi 0}^2 \left(\frac{1}{(1 \pm r_D / \rho_T)^2} - 1 \right) + \frac{K r_D^2}{m}$$

Avec $r_D \ll \rho_T$, il vient : $v_{\rho 0}^2 \approx \frac{K r_D^2}{m} \pm \frac{2 r_D}{\rho_T} v_{\varphi 0}^2$. Les deux conditions devant être vérifiées, on impose la plus contraignante et finalement :

$$v_{\rho 0, \max}^2 \approx \frac{K r_D^2}{m} - \frac{2 r_D}{\rho_T} v_{\varphi 0}^2$$

Avec $v_{\rho 0, \max}^2 \geq 0$, cela impose pour $v_{\varphi 0}$: $v_{\varphi 0}^2 \leq \frac{K \rho_T r_D}{2m}$, valeur à comparer au résultat

$v_{\varphi}^2 \leq \frac{K \rho_T r_D}{m}$ obtenu à la question III.3.c. La contrainte est plus forte.

6.a) le diaphragme r_D qui limite le faisceau (se refocalisant) sélectionne les molécules de basse vitesse ($v_{0x} < v_{0x}^{\max}$ et $v_{0y} < v_{0y}^{\max}$)

6.b) la probabilité pour qu'une molécule soit stockée dans leanneau est : $\mathcal{P} = \frac{N_{\max}}{N}$ où $N_{\max} = \int_0^{v_{\max}} dN_v$
 $N = \int_0^{\infty} dN_v$

Sachant que :

*on utilise
cette expression
malgré l'erreur
d'ordre !*

$$\int v^3 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{1}{2\alpha} v^2 e^{-\alpha v^2} - \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\alpha v^2} \quad (\alpha = \frac{m}{2k_B T})$$

on trouve :

$$N = \frac{1}{2\alpha^2} \text{ et } N_{\max} = \frac{1}{2\alpha^2} \left\{ 1 - e^{-\alpha v_{\max}^2} - \alpha v_{\max}^2 e^{-\alpha v_{\max}^2} \right\}$$

D'où :

$$\mathcal{P} = \frac{1 - e^{-\alpha v_{\max}^2} (1 + \alpha v_{\max}^2)}{1}$$

$$\text{Exemple : } \begin{cases} v_{\max}^2 = v_{\rho 0}^2 + v_{\varphi 0}^2 \approx v_{\varphi 0}^2 \sim (37 \text{ m/s})^2 \\ \alpha v_{\max}^2 \approx 2 \times 10^{-2} \ll 1 \\ e^{-\alpha v_{\max}^2} \approx 1 - \alpha v_{\max}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} \approx (\alpha v_{\max}^2)^2 = 4 \times 10^{-4} \ll 1$$

$\Rightarrow$ très peu de molécules piégées !!

Pour améliorer le procédé on peut diminuer la température