I. REVISIONS DE MECANIQUE DU POINT.

OSCILLATIONS…

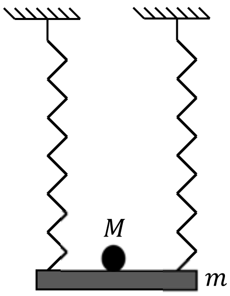
1. ATTRACTION DE FETE FORAINE.

Une attraction de fête foraine consiste en une boule retenue par deux élastiques dans laquelle deux visiteurs s'assoient et qui est lâchée vers le haut après avoir tendu les élastiques.

On modélise les élastiques par deux ressorts identiques de longueur à vide l_o et de constante de raideur k, la nacelle par un plateau de masse m, et les passagers par une masse ponctuelle M.

On note l_{eq} la longueur des ressorts lorsque l'ensemble est à l'équilibre. On descend l'ensemble $\{M, m\}$ de sorte qu'au moment du lancement sans vitesse initiale, les ressorts aient une longueur double de leur longueur à l'équilibre : $l(O) = 2l_{eq}$.

1. Déterminer l'instant où les passagers décollent de leur siège ainsi que la position de la nacelle à cet instant.
2. Les forains promettent une accélération de $6g$ aux amateurs de sensations fortes. Quelle doit être la relation entre l_{eq} et l_o pour que cette promesse soit tenue ?
3. Proposer des valeurs numériques au problème pour évaluer le temps pendant le quel les passagers restent assis.



2. PORTRAIT DE PHASE.

Un cube $(\mathcal{C})$ de masse m est accroché à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Ce mobile peut se déplacer en translation sur un plan horizontal le long de l'axe Ox. La réaction de contact entre le solide et le plan suit les lois du frottement solide : on notera f le cœfficient de frottement solide.
L'origine des abscisses correspond à la longueur à vide du ressort c'est-à-dire que l'on repère $(\mathcal{C})$ par $x(t)$ où $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ où $\ell(t)$ est la longueur du ressort. On écarte le cube jusqu'à la position x_0 et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1. Montrer qu'il existe une plage d'équilibre c'est-à-dire que la position d'équilibre finale x_{eq} appartient à un intervalle que l'on déterminera en fonction des données du texte.

2. Montrer que le mouvement du cube $(\mathcal{C})$ est une succession d'oscillations dont l'amplitude varie régulièrement. En déduire le nombre d'aller et retour effectué avant l'arrêt définitif en fonction des paramètres définis dans l'énoncé. Ce résultat est-il conforme à la courbe $t \to x(t)$ de la figure 1 obtenue par simulation informatique ?

3. La figure 2 représente la trajectoire de phase obtenue par simulation. Orienter cette trajectoire et montrer qu'il s'agit d'une succession d'arcs de courbes que l'on déterminera. Commenter.

■ Simulations

Les courbes des figures 1 et 2 ont été réalisées avec les données suivantes : $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $m = 50\ \mathrm{g}$, $k = 0,040\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $f = 3,0 \cdot 10^{-3}$ et $x_0 = 50\ \mathrm{cm}$.

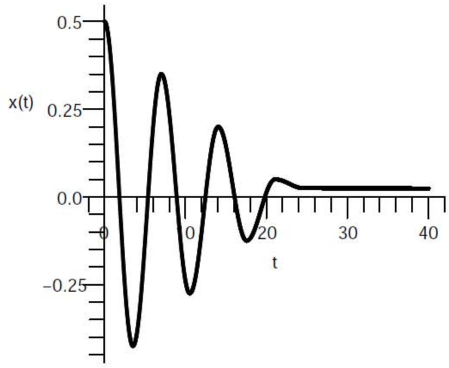


FIGURE 1: Courbe $t \to x(t)$

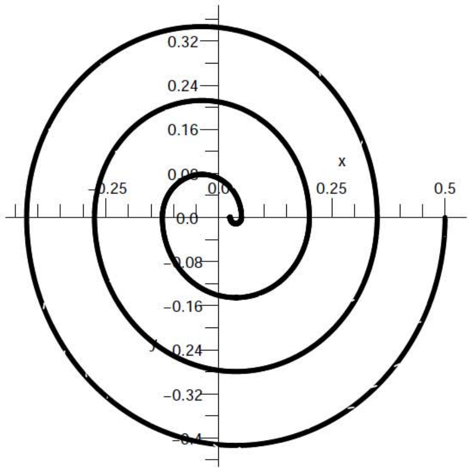


FIGURE 2: Portrait de phase

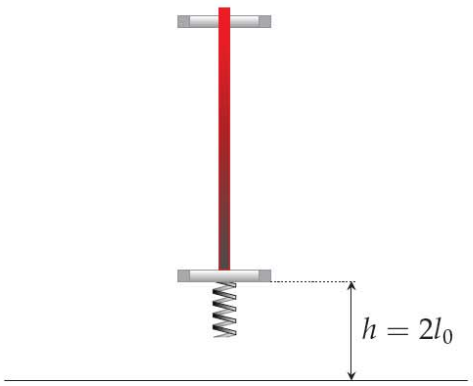
3. POGO STICK (CCS)

Le bâton sauteur (ou pogo stick) est une perche sur laquelle une personne peut se tenir debout, comprenant à son extrémité supérieure des poignées et à son extrémité inférieure un dispositif à ressort permettant des rebonds sur le sol.

Le système sera étudié dans les conditions suivantes :
- ressort de raideur k et de longueur à vide $l_0 = 20$ cm ;
- masse totale du bâton et de l'utilisateur : $m = 80$ kg ;
- accélération de la pesanteur $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Le sauteur sera considéré indéformable et fixe par rapport au bâton.

Pour mesurer la raideur du ressort, on le suspend verticalement et on accroche à son extrémité inférieure une masse de 80 kg ; on constate qu'il s'allonge de 2,0 cm.



À l'instant initial, le sommet du ressort se trouve à une hauteur initiale $h = 2l_0$ par rapport au sol et l'ensemble a une vitesse nulle.

1. Montrer que la longueur minimale l_{min} du ressort vérifie une équation algébrique qu'on résoudra numériquement.

2. Calculer la période du mouvement du sauteur (on supposera le mouvement purement vertical). Commenter au regard du résultat donné par le livre Guiness des records : le plus petit nombre de sauts en une minute est de 39 et le plus grand nombre est de 257.

4. Le salaire de la peur

□ La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, et constitués chacun :

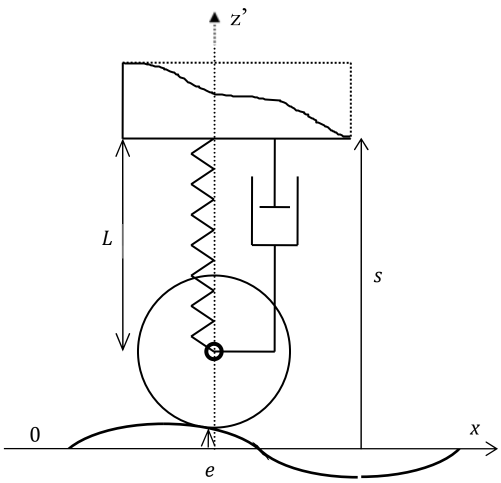
- d'un ressort métallique hélicoïdal de longueur L, de constante de raideur k et de longueur à vide L_0 ;

- d'un amortisseur tubulaire à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux : $\vec{f} = -a\frac{dL}{dt}\overrightarrow{u_z}$.

□ On note M la masse s'appuyant sur une suspension. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$.

□ Les pneus de rayon extérieur R sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude. On repère le châssis par sa position s(t) par rapport à la cote de référence 0 liée au référentiel terrestre (xz') galiléen. On néglige le décalage angulaire du point de contact pneu/route par rapport à la verticale.

□ On modélise la route rectiligne dans la direction x par un sol ondulé sinusoïdalement autour de la cote de référence horizontale 0 suivant la relation : $e(x) = e_m \cos\left(\frac{2\pi}{d}x\right)$. Le véhicule roule avec une vitesse dont la composante **horizontale** V est constante.



Déterminer l'amplitude des oscillations du châssis et expliquer la scène du film « le salaire de la peur » où un camion chargé de nitroglycérine (ce composé instable explose lorsqu'il est secoué) doit franchir une portion de route bosselée et où le conducteur du camion explique à son coéquipier qu'il faut rouler soit très lentement, soit très rapidement.

Energétique du point…

5. Freinage d'un navire

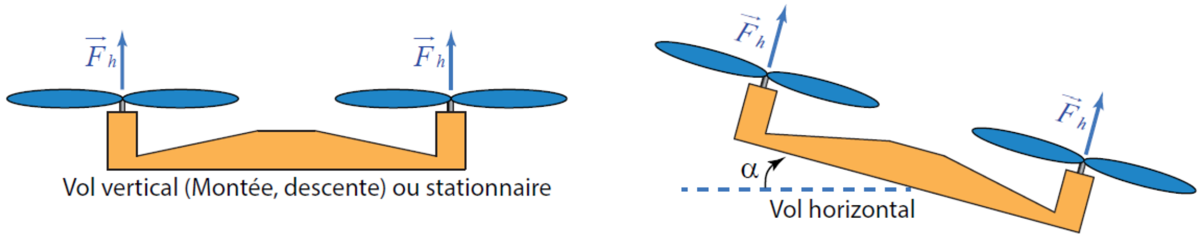
Un navire de masse $M = 10^7$ kg progressant sur l'eau à une vitesse v de l'ordre de 10 à 20 km/h subit une force de freinage qui est fonction de la vitesse selon une loi du type $f = -kv^2$.

1. Sachant que le moteur reçoit une puissance $P = 5$ MW et possède un rendement ρ de 80%, calculer k lorsque la vitesse limite atteinte vaut $v_L = 19\ km/h$.
2. Quelle est la durée de la phase de ralentissement quand le navire lancé moteur à l'arrêt, voit sa vitesse passer de $v_1 = 17\ km/h$ à $v_2 = 14\ km/h$? Quelle est la distance parcourue pendant ce temps ?

6. VOL D'UN DRONE (CCS)

Un «quadricoptère» (hélicoptère à 4 hélices) radiocommandé, à moteurs électriques, de masse m=1280g, est doté d'une batterie délivrant une tension de 11V et de capacité 4400mAh [1]. Pour avancer horizontalement, l'appareil s'incline et adapte son régime moteur pour maintenir son altitude. On réalise les tests suivants :

- Vol horizontal rectiligne sans vent, à pleine puissance : inclnaison α=30°. La vitesse finit par atteindre $V_{max.}$=15 m.s^{-1}.
- Vol stationnaire (appareil immobile par rapport au sol) : la batterie est totalement déchargée au bout de 22 min.



1. Au niveau de chaque hélice, l'air exerce une force $\overrightarrow{F}_h$ (cf.schéma). On modélise la force de frottement de l'air («traînée») par la formule $\overrightarrow{T} = -kv^2\overrightarrow{u}$ (avec $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u}$=vitesse du quadricoptère par rapport à l'air) supposée indépendante de l'inclinaison. Calculer k.

2. On modélise la puissance consommée par les moteurs avec la formule $P = P_0 + P_1$ où P_0 est la puissance (supposée constante) nécessaire à la sustentation et P_1 la puissance permettant d'entretenir le mouvement. A quelle distance du point de départ peut-on faire voler l'appareil et le ramener, avec un régime moteur constant pendant tout le trajet :
   - Lors d'un vol horizontal rectiligne sans vent ?
   - Lors d'un vol horizontal rectiligne avec un vent de vitesse V_0=10m.s^{-1} suivant l'axe de la trajectoire ?

   On négligera la durée et les distances parcourues lors des phases d'accélération et de freinage au départ, à l'arrivée et lors du demi tour à mi parcours.

3. A quelle hauteur maximale peut-on faire monter le quadricoptère (un parachute pouvant assurer une descente sans casse, moteurs éteints). *Résolution numérique autorisée.*

7. DEPLACEMENT D'UN POINT A LA SURFACE D'UN CONE.

Un point matériel M de masse m peut se déplacer sans frottements à l'intérieur d'un cône d'origine O, d'axe vertical ascendant (Oz) et de demi-angle au sommet α. On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1. Le moment cinétique $\vec{L}_O$ du point M par rapport à l'origine se conserve-t-il ? Même question pour le moment cinétique $L_{O,\vec{u}_z}$ par rapport à l'axe $(O,\vec{u}_z)$.
2. On note z l'altitude du point M. Montrer que z est solution de l'équation suivante :

$$m(1+\tan^2\alpha)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + E_{p,eff}(z) = 2E_o$$

La fonction $E_{p,eff}(z)$ est une fonction à déterminer en fonction des paramètres introduits dans l'énoncé. La constante E_o dépend de la vitesse initiale v_o et de l'altitude initiale z_o du point M.

1. Montrer que le mouvement de M à lieu entre deux plans horizontaux dont on ne cherchera pas à déterminer les cotes. La rotation de M se fait-elle toujours dans le même sens ?
2. La valeur de v_o étant fixée, à quelle(s) condition(s) le mouvement de M est-il circulaire ?

3. FORCES CENTRALES…

8. INTERACTION INTERMOLECULAIRE.

On considère deux molécules de masse *M* et *m* distantes de *r*. On suppose que la molécule de masse M reste immobile. L'énergie potentielle d'interaction du système est assez bien représentée par la fonction :

$$E_p = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$; A et B étant des constantes positives.

1- Calculer la force qui dérive de cette énergie potentielle.

2- Déterminer la valeur r_0 pour laquelle le système est en équilibre. Discuter la stabilité de cet équilibre.

3- Tracer le graphe de $E_p(r)$.

4- Etude des petits mouvements autour de la position d'équilibre.

   a. On pose : $r - r_o = x$. Exprimer E_p en fonction de *x*. En donner une expression approchée au voisinage de $x = 0$ à l'aide d'un développement limité d'ordre 2.

   b. En déduire l'expression correspondante de la force au voisinage de $x = 0$ et l'équation différentielle du mouvement de la masse m.

   c. Donner la solution générale de cette équation et calculer la période T du mouvement.

9. ENERGIE POTENTIELLE ET TRAJECTOIRE BORNEE (X)

Une particule de masse m est soumise à un champ de force centrale de centre O associé à l'énergie potentielle :

$$U = m\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}\right)$$; (a et b non nuls).

Les conditions initiales sont : $r = r_o$ et $\vec{V} = \vec{V_o}$.

A quelles conditions portant sur r_o, $\vec{V_o}$, a et b la trajectoire de la particule reste-t-elle bornée ?

10. FORCE CENTRALE NON NEWTONIENNE (HP)

Une particule de masse m est mobile dans le champ de force : $\vec{F}(r) = \dfrac{-km\vec{r}}{r^5}$ où k est une constante positive.

Soit le repère cartésien (O, $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$) tel que : à l'instant t = 0, la particule est sur l'axe (Ox) au point d'abscisse a et sa vitesse est dirigée selon l'axe (Oy) et vaut : $V_o = \sqrt{\dfrac{2k}{3a^3}}$

Soit $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ le repère cylindrique associé au repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et soient *(r, θ, z)* les coordonnées de la particule dans ce repère.

1. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_o}$ de la particule calculé en O est constant. En déduire que : $\overrightarrow{L_o} = L_o \overrightarrow{e_z}$. Exprimer L_o en fonction de V_o, m et a.
2. En déduire que le mouvement de la particule est plan.
3. Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{L_o}$ dans le repère cylindrique $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. En déduire que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.
4. Montrer que l'accélération de la particule s'écrit : $\vec{a} = -C^2u^2(u'' + u)\vec{e}_r$ où $u = \dfrac{1}{r}$ *et* $u'' = \dfrac{d^2u}{d\theta^2}$
5. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par r est : $u'' + u = \dfrac{3}{2}a.u^2$
6. Montrer que $u = \dfrac{2}{a(1+\cos\theta)}$ est solution de l'équation.
7. En déduire l'expression de *r(θ)*. A l'aide d'un outil informatique, donner l'allure de la trajectoire de la particule.

INTERACTION NEWTONIENNE…

11. SATELLITES TERRESTRES.

Nous nous plaçons ici dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Le référentiel terrestre est en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique, avec la période T_0 = 86164 s. La Terre est supposée sphérique et homogène de centre O, de masse $M = 6.10^{24}$ kg et de rayon R = 6380 km.

1. Un satellite est dit géostationnaire s'il reste en permanence immobile dans le référentiel terrestre. Montrer que cette condition détermine entièrement les éléments de l'orbite (période, nature de la trajectoire, altitude, plan de l'orbite). Effectuer toutes les applications numériques.
   Un tel satellite, utilisé pour les communications, est adapté pour des points du globe dont les latitudes ne sont pas trop élevées. De tels satellites sont alors inadaptés pour des pays comme la Russie.

2. La Russie utilise depuis 1964 une famille de satellites appelée *Molniya* qui possèdent les caractéristiques communes suivantes :
   - ✓ période de révolution $T = T_0/2$ (satellites dits semi-synchrones);
   - ✓ plan de l'orbite incliné d'un angle λ par rapport au plan équatorial;
   - ✓ apogée *A* de la trajectoire passant une fois par révolution au dessus d'un point *M* de la Terre dont λ représente la latitude Nord. Au point *A*, le satellite est immobile par rapport à la Terre.

A l'aide de la dernière condition, établir une relation entre la valeur de la vitesse v_A du satellite au passage en *A*, la latitude λ, la période *T* du satellite et la distance r_{max} séparant le centre de la Terre à l'apogée *A*. En déduire une relation entre λ et l'excentricité *e* de l'orbite.

Déterminer numériquement les valeurs de e, et des altitudes du périgée et de l'apogée pour $\lambda = 63°$. Quel est le problème soulevé par l'altitude du périgée.

3. Montrer que le plan de l'orbite des satellites *Molniya* ne peut pas être trop incliné par rapport au plan équatorial. Déterminer l'angle d'inclinaison maximal.

12. Satellite de surveillance

Un satellite de masse m=1,0 tonne doit être placé en orbite circulaire dans le plan équatorial terrestre à l'altitude h, supposée faible par rapport au rayon de la Terre. Il possède une caméra destinée à prendre des photos à haute résolution de la surface terrestre, à la verticale du satellite. L'objectif de la caméra est assimilé à une lentille mince, convergente, de focale f'=50 cm. Les images sont saisies par un capteur rectangulaire, de longueur L=36 mm et de largeur ℓ=24 mm, qui compte 10 millions de pixels. Le temps d'exposition est τ=5,0.10^{-4} s. Dans ces conditions, on souhaite obtenir sur les clichés les détails les plus fins possibles, sans que le mouvement du satellite n'ait un effet décelable sur la résolution des images. La Terre est modélisée par une sphère de rayon R=6400 km, tournant sur elle même en 24 h, présentant une distribution de masse à symétrie sphérique et un champ gravitationnel de norme g_0=9,83 m.s^{-2} à sa surface.

1. Déterminer les caractéristiques de l'orbite répondant à ces exigences. Quelle est alors la résolution obtenue (taille des détails les plus fins visibles sur les images) ?

2. Combien de fois survole t-on la même zone en 24 h ?

3. Quelle énergie minimale faut-il dépenser pour mettre ce satellite sur orbite ?

4. Quel ordre de grandeur doit avoir le diamètre de l'objectif pour que ce paramètre ne soit pas le facteur limitant de la résolution des clichés ?

13. Etude d'un satellite lunaire.

On étudie, dans le référentiel de Copernic (supposé galiléen), le mouvement d'une comète dont la trajectoire est coplanaire avec celle de la Terre. Son périhélie est situé à la distance $r_o/2$ du Soleil, r_o désignant le rayon de l'orbite terrestre (supposée circulaire). On note M_S la masse du Soleil et G la constante universelle de gravitation. La Terre et la comète ne sont soumises qu'à la seule force gravitationnelle exercée par le Soleil.

1. Exprimer en fonction de G, M_S et r_o, la vitesse v_o de révolution de la Terre.

2. Sachant que la vitesse de la comète à son périhélie est égale à $2v_o$, déterminer la nature de sa trajectoire.

3. L'orbite de la comète coupe l'orbite terrestre en deux points A et B. Montrer que les points A et B sont situés sur un même diamètre de l'orbite terrestre.

4. Exprimer τ, le temps passé par la comète à l'intérieur de l'orbite terrestre, en fonction de r_o et v_o. On donne $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{4}{3}$

On donne l'équation d'une trajectoire parabolique en coordonnées polaire (l'axe focal coïncidant avec l'axe des abscisses) :

$$r = \frac{p}{1+cos\theta}$$ Où p est le paramètre de la conique.

14. FRONDE GRAVITATIONNELLE.

On considère un vaisseau supposé ponctuel de masse m, mobile par rapport à un astre de masse M, de centre O et de rayon R. L'astre est homogène et à symétrie sphérique. La constante de gravitation est notée G. La distance entre le vaisseau et le centre de l'astre est r, $r>R$. On se placera dans le référentiel (supposé galiléen) lié à l'astre. Sauf mention contraire, le moteur fusée est éteint, c'est-à-dire que le vaisseau est en vol balistique.

1- Le vaisseau est initialement sur une orbite circulaire de rayon r_o décrite à la vitesse V_o. On allume le moteur pendant un temps court, de sorte que la vitesse varie mais pas la distance au centre de l'astre. Évaluer la vitesse V_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe « à l'attraction de l'astre » en fonction de G, M et r_o.

2 - Le commandant de bord dispose en fait d'un « budget de vitesse » ΔV égal à $4V_o$; cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau, en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesses n'excède pas $4V_o$.

Option 1 : le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant sa vitesse initiale à $5V_o$. Évaluer sa vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de V_o.

Option 2 : on utilise un huitième du budget pour ralentir le vaisseau de V_o à $V_o/2$ en un temps très court devant la période, le vecteur vitesse gardant la même direction. Décrire la nouvelle trajectoire : nature et valeur maximale de la norme de la vitesse. Quelle condition doit être vérifiée pour que le vaisseau n'entre pas en collision avec l'astre ?

On utilise ensuite le reste du « budget vitesse » au passage au périgée pour augmenter au maximum la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de V_o.

3 - Comparer les deux options et commenter.

DIVERS…

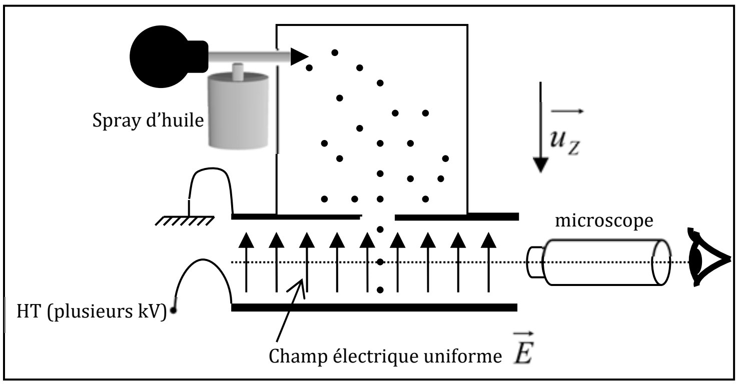
15. EXPERIENCE DE MILLIKAN.

L'expérience de la goutte d'huile de Millikan avait pour but de mesure la charge élémentaire de l'électron, ou pour être plus précis, de montrer que les charges sont discrètes. Elle fut menée par Robert Millikan en 1909.

Le principe est de pulvériser des gouttes d'huiles entre deux électrodes. Entre ces dernières s'exerce un potentiel connu que l'on peut faire varier. Les gouttes, qui ont été au préalable chargées par frottement ou ionisation subiront donc plusieurs forces :

- ✓ Leur poids : $\vec{P} = m\vec{g}$ où m est la masse de la goutte et $\vec{g} = g\vec{u}_z$ le champ de pesanteur.
- ✓ La force électrostatique : $\vec{F} = q\vec{E}$ où q est la charge de la goutte et $\vec{E} = -E\vec{u}_z$ est le champ appliqué entre les deux électrodes.
- ✓ La poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -m^*\vec{g}$ où m^* est la masse d'air déplacée par la goutte.
- ✓ Le frottement avec l'air (traînée) : $\vec{f} = -6\pi\mu r\vec{V}$ où $\mu = 1{,}8.10^{-5}$ *S.I* est le coefficient de viscosité de l'air, r est le rayon de la goutte et $\vec{V} = V\vec{u}_z$ est la vitesse de la goutte.

En agissant sur le potentiel, il est possible de faire « remonter » les gouttes. La détermination de la vitesse limite de remontée permettant alors de déterminer la charge de chaque goutte. Millikan, après de nombreuses expériences avait fini par trouver que les charges étaient toutes multiples de $1{,}592.10^{-19}$C, constante que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de charge élémentaire que l'on note traditionnellement e. (Notons qu'à l'époque la viscosité de l'air n'était pas connue avec beaucoup de précision et que la valeur trouvée par Millikan est plus basse que la valeur utilisée aujourd'hui : e = 1,602176462.10^{-19}C).



1. En notant ρ=*810 kg/m³* et ρ^*=*1,2 kg/m³* respectivement les masses volumiques de l'huile et de l'air, exprimer littéralement les masses *m* et m^* en fonction de ρ, ρ^* et *r*.
2. Chute des gouttes en l'absence de champ électrique :
    a. Etablir, dans ce cas, l'équation différentielle vérifiée par la vitesse *V* d'une goutte.
    b. Montrer que la vitesse *V* tend vers une vitesse limite. (notée V_o)
    c. Sachant qu'en l'absence de champ électrique, les gouttes tombent à la vitesse constante V_o= *0,392 mm/s.* En déduire la valeur numérique de *r*.
3. En présence d'un champ électrique uniforme et constant $\vec{E}$, de direction verticale ascendante, de norme $E = 4\,kV\cdot cm^{-1}$, les gouttes remontent avec différentes vitesses limites.
    a. Que devient l'équation différentielle vérifiée par la vitesse *V* en présence de $\vec{E}$?
    b. En déduire la nouvelle expression de la vitesse limite (notée V_i)
    c. Une observation prolongée montre que la vitesse prend des valeurs discrètes. On mesure en particulier, les valeurs algébriques suivantes exprimées en *mm/s* :

    V_1 = - *0,270* V_2 = - *0,080* V_3 = - *0,175* V_4 = - *0,363* V_5 = - *0,458*

        i. Déterminer dans chaque cas la charge de la goutte.
        ii. Montrer que ces mesures permettent de conclure à l'existence d'une charge élémentaire.
        iii. Calculer cette charge (résultat à 3 chiffres significatifs).

II. REFERENTIELS NON GALILEENS.

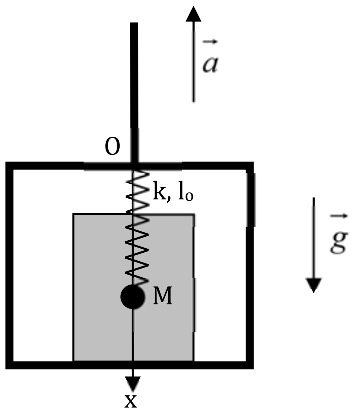
DYNAMIQUE NON GALILÉENNE…

16. ASCENSEUR.

On considère un système masse-ressort fixé au plafond d'un ascenseur tel que la masse m, une sphère de rayon r, plonge dans un liquide de masse volumique ρ.On suppose que l'ascenseur à une accélération constante $\vec{a} = -a\vec{u}_x$.

1. Donner l'expression de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ s'exerçant sur m.

2. Déterminer l'allongement du ressort lorsque que la masse m est à l'équilibre dans le référentiel de l'ascenseur (R).
3. Le fluide exerce, en plus de la force $\overrightarrow{\Pi}$, une force de frottements fluides : $\vec{f} = -\alpha\vec{V}$ où $\vec{V}$ est la vitesse de la masse m dans le référentiel (R) . Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x = OM.
4. Intégrer cette équation différentielle en supposant l'oscillateur faiblement amorti (on ne cherchera pas les constantes d'intégration).
5. Les câbles de l'ascenseur lâchent alors que la masse m est au repos dans le référentiel de l'ascenseur. Quel est alors son mouvement ? Quelle est la nouvelle longueur à l'équilibre ?



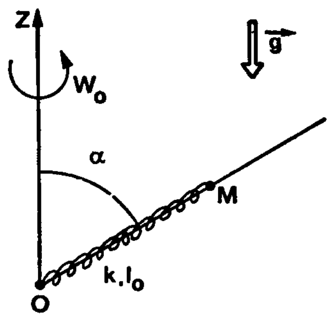
17. EQUILIBRE RELATIF.

Une masse m peut glisser sans frottement sur la tige (O, X) inclinée d'un angle α sur la verticale.

(O, X) tourne à la vitesse angulaire constante ω_0 autour de Oz.

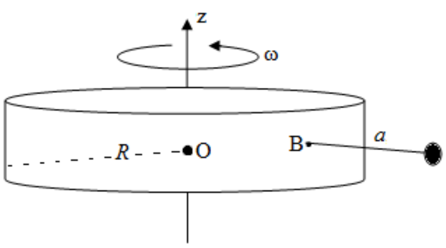
On suppose $l_0 > mg/k$. (l_0 longueur à vide du ressort de raideur k).

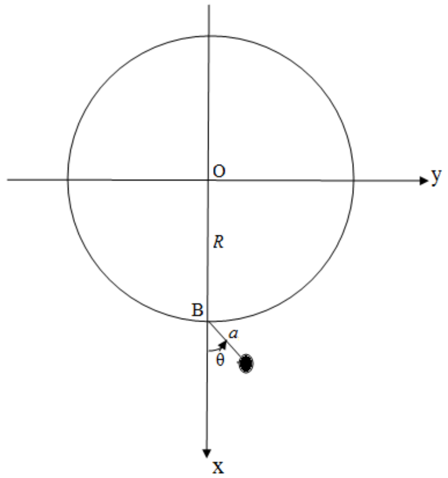
1. Etudier les conditions d'équilibre de la masse m.
2. Quelle est la nature des petits mouvements autour de la position d'équilibre lorsqu'elle existe



18. PENDULE ABSORBEUR.

Soit le système constitué d'un cylindre mince horizontal de rayon R en rotation autour de son axe Oz à la vitesse angulaire constante ω dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen associé au repère cartésien (Oxyz). En un point B de ce disque est accroché un pendule simple de longueur a, inextensible.





1. On suppose dans toute la suite que le pendule est astreint à se déplacer dans un plan horizontal normal à l'axe (Oz). A quelle condition cela est-il possible (répondre sans calcul)?
2. On repère la position du pendule par l'angle θ, angle que fait la direction du pendule avec l'axe Ox. Déterminer la pulsation ω_0 des petites oscillations du pendule.
3. En sachant qu'il peut y avoir des défauts d'ajustement pour le cylindre tournant, expliquer l'intérêt de ce dispositif.

19. PHOBOS

Phobos est l'un des deux satellites naturels de la planète Mars. Des données numériques sur ces deux astres sont regroupées à la fin de l'énoncé. On se place dans un référentiel « marsocentrique », supposé galiléen, d'origine le centre d'inertie de Mars et d'axes pointant vers des étoiles réputées fixes. Dans ce référentiel :

Mars a une rotation propre autour d'un axe (Oz), à la vitesse angulaire Ω_M ; on notera J_M le moment d'inertie de Mars par rapport à (Oz) ;

Le centre d'inertie de Phobos décrit une orbite quasi-circulaire, de rayon r et d'axe (Oz), à la vitesse angulaire ω_p ;

Phobos a une rotation propre autour d'un axe parallèle à (Oz) et à la vitesse angulaire $\Omega_p \approx \omega_p$; on notera J_p le moment d'inertie de Phobos par rapport à son axe de rotation propre ;

On souhaite expliquer la diminution au cours du temps, de l'ordre de 1,8 m par siècle, du rayon de l'orbite de Phobos.

1) Exprimer ω_p en fonction de la masse M_m de Mars, de r et d'une constante.

2) Ecrire l'expression de l'énergie mécanique totale du système {Mars, Phobos}. Justifier que l'un des termes est négligeable.

3) Le moment cinétique total du système {Mars, Phobos} est selon (Oz) et on le note $L\overrightarrow{u_z}$ Ecrire l'expression de L sous la forme d'une somme de trois termes. Justifier que l'un des termes est négligeable.

4) En considérant que le moment cinétique total est conservé et que l'énergie mécanique du système {Mars, Phobos} diminue au cours du temps, montrer que le rayon de l'orbite de Phobos diminue au cours du temps.

Données

Phobos		Mars	
Masse	$m_p = 1{,}07.10^{16}\,kg$	**Masse**	$M_m = 6{,}4.10^{23}\,kg$
Dimensions	$\approx 27km \times 22km \times 18km$	**Rayon moyen**	$R_M = 3390km$
Rayon orbital autour de Mars	$r = 9377km$	**Période de rotation**	$T_M = 24h36mn$
Période de révolution	$T_p = 7h39mn$		

DYNAMIQUE TERRESTRE…

20. EQUILIBRE RELATIF.

Nous nous plaçons ici dans le référentiel terrestre supposé non-galiléen.

Un train à grande vitesse se dirige de Marseille à Lyon (on considère que le mouvement se fait le long d'un méridien Nord-Sud de la Terre) à la vitesse v constante de module 300 km/h en un lieu de latitude moyenne λ = 43°N où l'accélération de la pesanteur est g = 9,81 m/s^{-2}. Quelle doit-être l'inclinaison α des rails par rapport à l'horizontale (sol) pour que la réaction soit perpendiculaire au plan des rails? Commenter la valeur numérique obtenue.

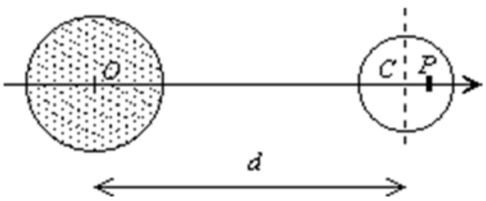
21. BALLE DE FUSIL.

Une balle de fusil est tirée, horizontalement, dans la direction du nord, depuis un point de la Terre, de latitude $\lambda = 43°$. Sa vitesse initiale est v = 1000 m/s.

1. Donner les équations différentielles complètes du mouvement dans le référentiel terrestre en négligeant la résistance de l'air.
2. Proposer certaines hypothèses simplificatrices.
3. Déterminer la position du point d'impact sur une cible située à une distance l = 100 m.

22. LIMITE DE ROCHE

On considère un satellite sphérique homogène, de masse m, de rayon a, de centre C qui gravite à proximité d'une planète sphérique, homogène de masse M, de rayon R et de centre O. Un point P du satellite est soumis à un champ de marée dû à la planète : $\vec{C}(P) = \vec{G}(P) - \vec{G}(C)$
Le champ de gravité de la planète étant noté $\vec{G}$.
On pose $d = OC$.



On suppose que la cohésion du satellite est uniquement assurée par les forces gravitationnelles.
On admettra que le champ de pesanteur créé par le satellite en un P intérieur tel que $CP = r$ est :

$$\vec{G}_{satellite}(P) = -\frac{Kmr}{a^3}\vec{u} \ \ avec \ \ \vec{u} = \frac{\overrightarrow{CP}}{CP}$$

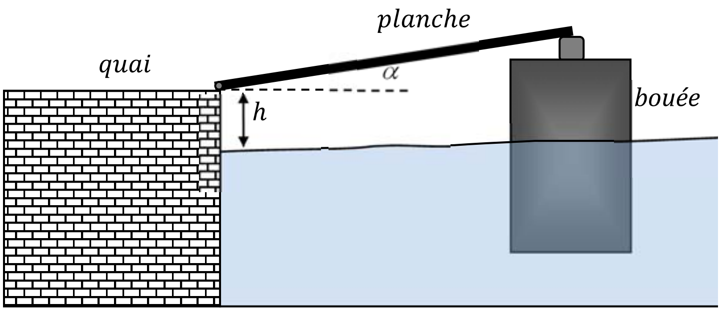
Montrer que si la distance séparant la planète du satellite devient inférieure à une valeur critique d_o, appelée limite de Roche, le satellite se brise sous l'effet des forces de marées.

III. MECANIQUE DU SOLIDE

OSCILLATIONS…

23. BOUEE.

L'extrémité d'une planche, de longueur $L = 2\ m$, est posée sur une bouée cylindrique de section $S = 10^3\ cm^2$. L'autre extrémité est liée au bord d'un quai (liaison pivot parfaite). La planche fait un angle $\alpha_o = 15°$ avec l'horizontale. L'eau du port est à $h = 10\ cm$ du haut du quai.



1. Un homme de masse m_h décide d'aller sur la bouée en passant sur la planche. A quelle condition arrivera-t-il sur la bouée en gardant les pieds secs ? Commenter.
2. Un enfant, de masse $m_e = 35\ kg$, tout content d'être arrivé sur la bouée, s'amuse en exerçant une poussée verticale et périodique sur la bouée (période $1s$). L'enfant peut-il raisonnablement garder les pieds au sec ?

On supposera dans tout l'exercice que les mouvements de la bouée sont verticaux et on considèrera l'angle α, que fait la planche avec l'horizontal, petit.

Données :

Masse de la planche $m = 5\ kg$.

Masse de la bouée : $m' = 50\ kg$.

ROULEMENTS…

24. SPHERES DE DIFFERENTES MASSES VOLUMIQUE (≈HP)

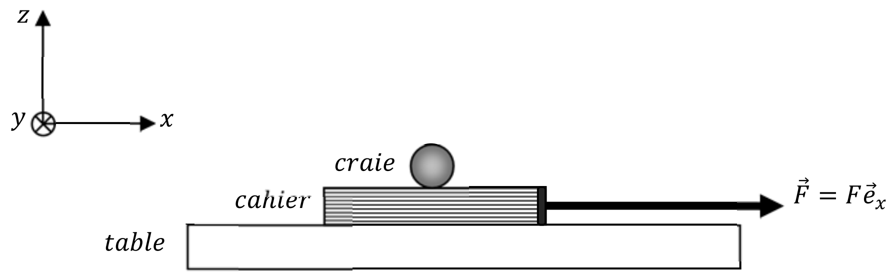
On dispose de sphères de même masse, de même rayon, de même aspect extérieur. L'une est pleine en aluminium et l'autre creuse en plomb. Montrer qu'en les faisant rouler sans glisser sur un plan incliné, on peut les reconnaitre.

25. ROULEMENT D'UNE CRAIE (≈HP)

Sur une table horizontale, on pose à plat un cahier et sur le cahier, une craie cylindrique d'axe (Oy). On tire horizontalement sur le cahier dans une direction perpendiculaire à l'axe de la craie.

On admettra que les coefficients de frottement table/cahier et cahier/craie sont égaux et on ne fera pas de distinction entre coefficient statique et dynamique.

Le moment d'inertie d'un cylindre de masse M et de rayon R par rapport à son axe est $J = \frac{1}{2}mR^2$



Il peut se passer différentes choses classées ci-dessous selon les valeurs croissantes de F :

1. Rien ne bouge.
2. Le cahier avance et la craie reste immobile par rapport au cahier.
3. Le cahier avance et la craie roule sans glisser sur le cahier.
4. Le cahier avance et la craie glisse sur le cahier.

a. Déterminer l'intervalle de F compatible pour chacun des comportements 1, 3 et 4.
b. Comment expliquer que les comportements 1, 3 et 4 couvrent l'ensemble des valeurs de F et ce en dépit du fait que le comportement 2 n'ait pas été étudié ?

26. Petite voiture (≈HP)

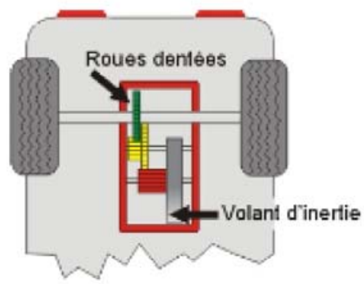
Un enfant dépose sa petite voiture sur un sol horizontal après avoir fait tourner les roues de celle-ci en les frottant par terre.

Les roues, de rayon $R = 1$ cm, tournent toutes initialement à la même vitesse angulaire $\omega_0 = 100$ rad.s^{-1}.

La voiture possède une masse $m = 200$ g et on suppose que le centre de gravité de la voiture est centré par rapport aux roues et initialement immobile par rapport au sol. Chaque roue possède un moment d'inertie $J = 1/2\ m'\ R^2$ avec $m' = 25$ g.

Le coefficient de frottement des roues sur le sol vaut f = 0,1.

Modèle de base



Train d'engrenages et roue d'inertie du modèle à friction

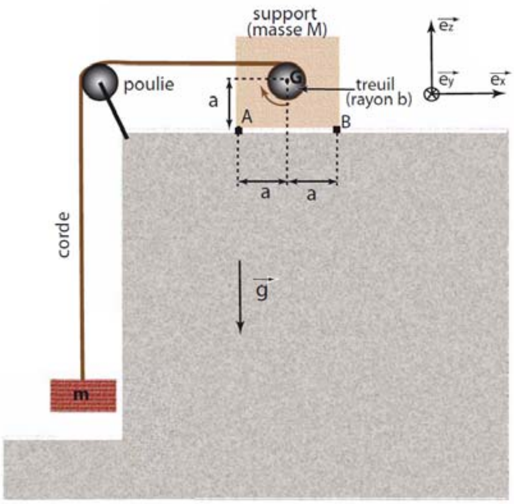
1. Quelle est la vitesse atteinte par la petite voiture. Effectuer un bilan énergétique.
2. En réalité, la voiture s'arrête au bout de 5 s. On modélise les frottements sur l'axe de chaque roue par un couple de type $\Gamma_{frott} = -\alpha$. Déterminer α.
3. Devant les piètres résultats obtenus, l'année suivante, l'enfant demande au Père Noël une voiture à friction. Les roues arrière et avant de la voiture sont reliées à un train d'engrenages puis à un "volant d'inertie", disque métallique de rayon comparable

à celui des roues et de masse m'' = 100g (on supposera que chaque paire de roues est équipé de façon identique). On considèrera que les autres caractéristiques de la voiture restent identiques à celle de la voiture précédente. Les engrenages ayant un rendement de 100%, déterminer la durée de course de la voiture ainsi équipée.

Roue 1 **:** N_v = 40 dents ; Roue 2 **:** N_J = 20 dents ; Roue 3 **:** N_R = 10 dents.

POULIES…

27. PUISSANCE D'UN TREUIL.



- L'axe de la poulie est rigidement lié au sol ; axe du treuil : (Gy) ou G est le centre d'inertie de l'ensemble treuil-support ; $a = 2b$.
- En A : frottements negligeables.
- En B : frottement suivant la loi de Coulomb avec un coefficient de frottement f=0,5.
- La corde est inextensible, de masse et d'épaisseur negligeables. Elle roule sans glisser sur la poulie et le treuil.
- Les moments d'inertie du treuil et de la poulie sont negligeables.

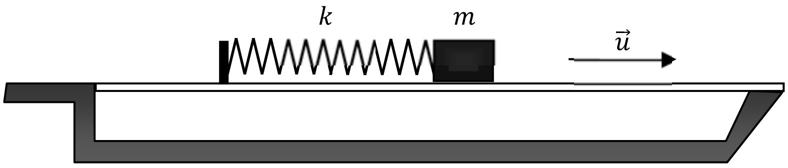
Le treuil est actionné par un moteur solidaire du support. Il exerce un couple $\vec{\Gamma}$ suivant (Gy) . Ce couple peut être choisi *a priori*, mais demeure constant pendant la traction. La norme du champ de pesanteur vaut g=9,8 m.s^{-2}.

1. Pour quelle valeur minimale M_s de M peut-on de hisser m sans déplacement du support ?

2. On choisit $M = 1,1M_s$. Calculer la durée nécessaire pour hisser m (toujours avec un support immobile). Quelle puissance le moteur doit-il pouvoir fournir ?

COLLE GLISSE…

28. ARCHET D'UN VIOLON

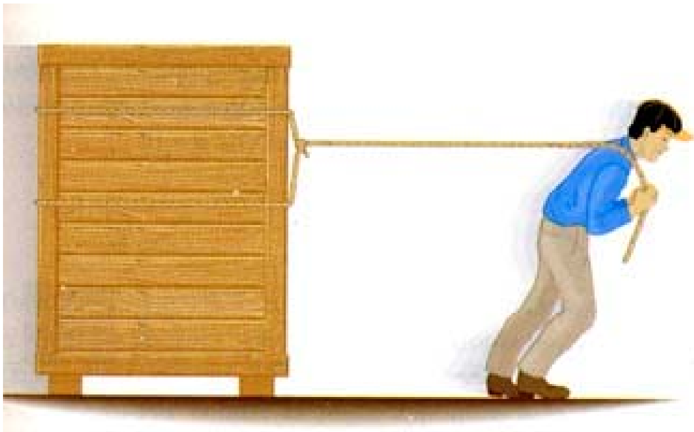


On modélise l'action d'un archet sur la corde d'un violon par le modèle « collé- glissé » : Un solide de masse m est posé sur un support animé d'une vitesse uniforme de module u et accroché à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixe. A l'instant initial, le ressort n'est pas tendu et le solide est solidaire du support mobile. On appelle f_s le coefficient de frottement statique et f_d le coefficient de frottement dynamique $(f_d < f_s)$. A quel moment le solide commence-t-il à glisser ? Quel est ensuite son mouvement ? Montrer que le glissement cesse à son tour. Que se passe-t-il ensuite ?

29. DEMENAGEUR

Tant les crissements d'une craie sur un tableau que les frottements d'un archer sur une corde de violon résultent de la combinaison de frottements solides et d'élasticité.

Un homme, avançant à vitesse constante $\overrightarrow{v_0}$ par rapport au référentiel lié au sol supposé galiléen, traîne derrière lui une caisse de masse m à l'aide d'un tendeur (corde élastique de longueur au repos l_0) possédant une constante de raideur k *lorsqu'il est tendu*. Le coefficient de frottement statique de la caisse sur le sol sera noté f_s et le coefficient de frottement dynamique f_d.



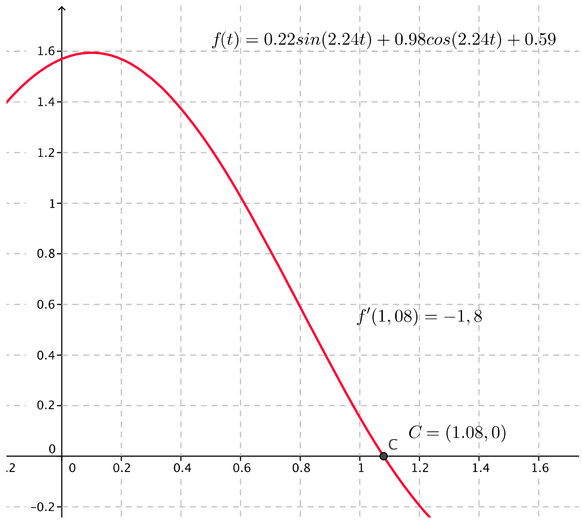
1°) On part de la situation où le tendeur n'exerce aucune force sur la caisse. À partir de quel allongement du tendeur la caisse commence-elle à bouger ?

2°) Quelle est la phase de mouvement ultérieur de la caisse et combien de temps dure-t-elle ? On pourra, pour cette question et pour la suite de l'exercice, utiliser le document ci-contre.

3°) Décrire la suite du mouvement.

4°) Représenter l'allure de $X(t)$, défini par $X(t)=l(t)-l_0$ où $l(t)$ est la longueur du tendeur, sur les différentes phases du mouvement de la caisse et en déterminer numériquement la période.

Données numériques :
$m = 100$ kg ; $f_d = 0,3$; $f_s = 0,8$; $v_0 = 0,5$ m.s^{-1} ;
$l_0 = 10$ m ; $k = 500$ N.m^{-1} ; $g = 9.8$ m.s^{-1}



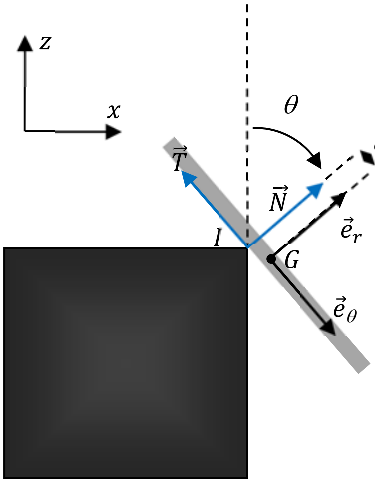
Représentation graphique de f(t), de son point d'intersection C avec l'origine et de la valeur de la tangente en ce point

BASCULEMENTS…

30. La tartine

Une tartine parallélipédique est posée en porte-à-faux sur le coin d'une table (centre de gravité G, masse m, moment d'inertie J par rapport à (Gy), épaisseur $2e$, valeur du porte-à-faux a). L'action de la table se décomposer en une composante normale de module N et une tangentielle de module T, le coefficient de frottement est f. On note θ l'angle dont tourne la tartine par rapport à sa position initiale horizontale supposée sans vitesse.

Déterminer $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ en fonction de θ et des constantes du problème. Même question pour $\vec{N}$ et $\vec{T}$. Tracer les graphes donnant T et N en fonction de θ. La tartine décolle-t-elle de la table avant de glisser ou est-ce l'inverse ?

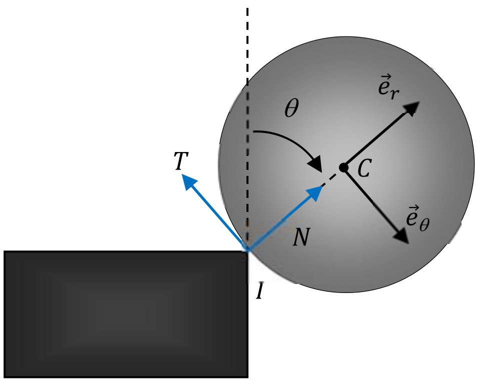


31. Le rouleau

Un cylindre plein homogène, de rayon R, de masse m, est lâché sans vitesse initiale à partir de la position caractérisée par l'angle $\theta = 0$, sur l'arête rectiligne d'une table.

Le contact cylindre-arête de la table au point I est caractérisé par le coefficient de frottement de glissement μ. On néglige tout phénomène de frottement de roulement.

1. Déterminer les composantes normales et tangentielles de la réaction de l'arête sur le cylindre en fonction de g, m et θ.
2. A partir d'une étude graphique, déterminer si le mouvement de glissement s'amorce toujours avant la rupture de contact entre le cylindre et la table.



On prendra : $\mu = \frac{2}{3} SI$ et $\frac{1}{3} mg = 1\ SI$