Exercices : 01 - Électricité - Électronique

A. Régime linéaire

1. Modèles de Thévenin et de Norton

On considère le circuit de la figure 1. L'objectif est de montrer l'équivalence du modèle de THÉVENIN d'un générateur de tension avec le modèle de NORTON d'un générateur de courant. Dans les deux cas le circuit électrique doit faire passer la même intensité dans le circuit d'utilisation modélisé par une résistance R_u.

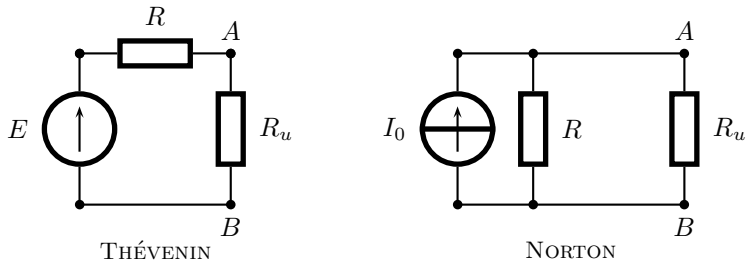


FIGURE 1 – Montage linéaire en continu

1. Dans le cas du modèle de THÉVENIN, déterminer l'expression de l'intensité traversant la résistance R_u et de la tension aux bornes de cette résistance.
2. Le générateur de courant impose l'intensité I_0 dans sa branche. Déterminer l'expression de I_0 en fonction de E et de R pour que le courant passant dans la résistance R_u soit le même que celui déterminé à la question précédente.
3. Montrer qu'il y a bien équivalence des deux montages.

Réponses : $i = \frac{E}{R+R_u}$ et $u = \frac{R_u}{R+R_u}E$; $I_0 = \frac{E}{R}$; on conserve bien les mêmes propriétés aux bornes de R_u.

2. Mesures en courant continu

La déformation d'une lame est mesurée par une jauge de contrainte, formée d'un fil conducteur. La résistance $R(z, \vartheta)$ de cette jauge du déplacement vertical z de la jauge et de la température ϑ, selon la loi générale $R = R_0\,[1 + \alpha z + \beta(\vartheta - \vartheta_0)]$, ϑ_0 étant une température de référence, et $\beta(\vartheta - \vartheta_0)$ étant du même ordre de grandeur que αz.

On dispose en fait deux jauges sous la lame, de sorte que pour celles-ci R_+ et R'_+ correspondent à $\alpha = A > 0$ (la déformation de la lame provoque un allongement de la jauge), et deux autres jauges sur la lame, de sorte que pour celles-ci R_- et R'_- correspond à $\alpha = -A < 0$ (la déformation de la lame provoque un raccourcissement de la jauge). β a la même valeur pour les quatre jauges.

1. Ces jauges sont branchées comme sur le schéma de la figure 2. Elles sont diposées dans ce montage pour avoir une tension v maximale lorsque la lame est courbée. Déterminer alors v quand une résistance ρ_1 est branchée entre A et B. Quels sont alors les effets de la température sur la mesure de z ?

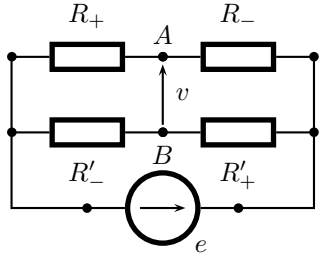


FIGURE 2 – Mesure passive de déformation

2. La déformation z est en fait mesurée par un montage utilisant trois amplificateurs opérationnels idéaux (figure 3). Exprimer v puis v' et v'' ; commenter.

Réponses : Montage en croix, $v = e\frac{Az}{1+\beta(\theta-\theta_0)} \simeq eAz(1-\beta(\theta-\theta_0))$ au premier ordre $v \simeq eAz$; $E_{Th} \simeq eAz$, $R_{Th} \simeq R_0(1-\beta(\theta-\theta_0)$, $v \simeq eAz\frac{\rho_1}{\rho_1+R_0(1-\beta(\theta-\theta_0))}$, les effets de la température se font sentir par l'intermédiaire

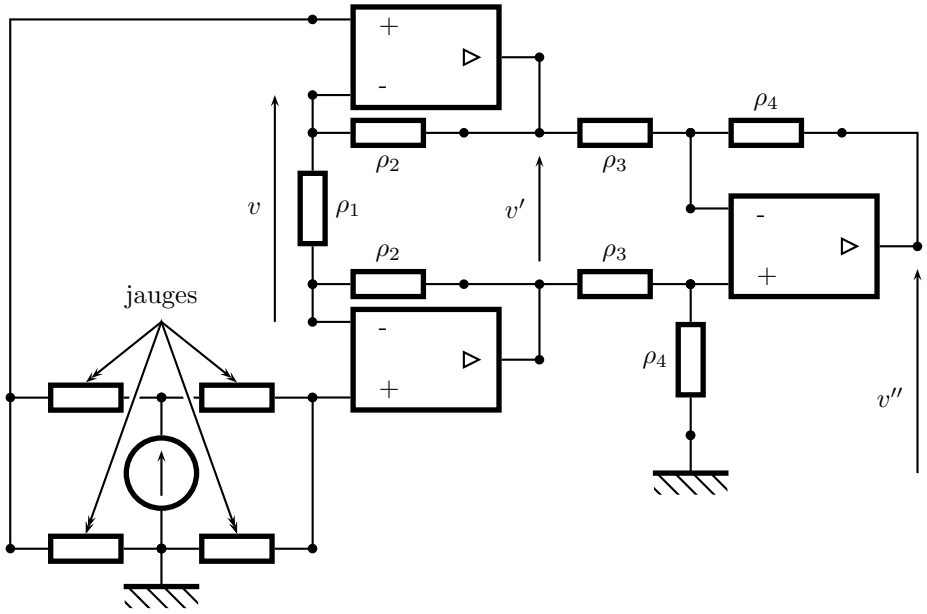


FIGURE 3 – Mesure active de déformation

du terme $R_0(1-\beta(\theta-\theta_0))$; $v \simeq eAz$, $v'' \simeq -(1+2\frac{\rho_2}{\rho_1})\frac{\rho_4}{\rho_3}eAz$, le terme évoqué précédemment n'intervient plus, on peut aussi amplifier le signal proportionnel à z.

3. Prise de Terre

Afin de protéger une installation, on ajoute un fil de Terre (jaune et vert) relié à une tige très conductrice de forme cylindrique plantée sur une longueur L dans le sol ; le rayon de la tige est r_T et la tige se termine par une hémisphère. Voir le schéma de la figure 4.

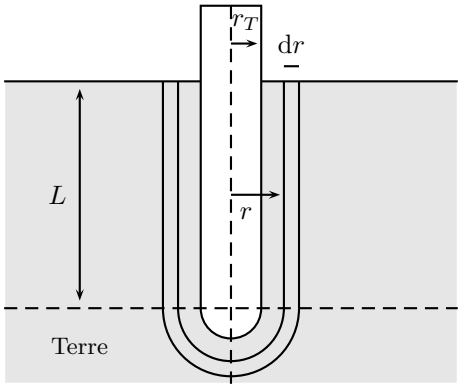


FIGURE 4 – Schéma de la prise de Terre enfoncée dans le sol

1. Rappeler l'expression de la résistance R_b d'un barreau de section S, de longueur ℓ et de résistivité ρ.
2. Justifier que la résistance du sol (de la Terre) peut s'exprimer par la relation :

$$R_s = \int_{r_T}^{\infty} \frac{\rho}{S(r)} \mathrm{d}r$$

où ρ est la résistivité du sol, $S(r)$ est l'aire latérale d'un cylindre de longueur L et de rayon r plus l'aire de l'hémisphère de rayon r. Préciser l'expression de $S(r)$.

3. Déterminer l'expression littérale de la résistance R_s. Effectuer l'application numérique avec $L = 3\,\mathrm{m}$, $\rho = 100\,\Omega \cdot \mathrm{m}$ et $r_T = 1\,\mathrm{cm}$.
4. Le code de l'électricité demande que la résistance de mise à la Terre soit inférieure à $25\,\Omega$. La solution consiste à placer plusieurs tiges en parallèle toutes reliées par un câble électrique de résistance R_c. On obtient finalement le schéma de la figure 5.

   Le câble possède un diamètre $D = 8\,\mathrm{mm}$, une conductivité $\sigma = 6 \times 10^7\,\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ et une longueur $d = 5\,\mathrm{m}$. Déterminer la valeur de R_c et comparer à R_s.

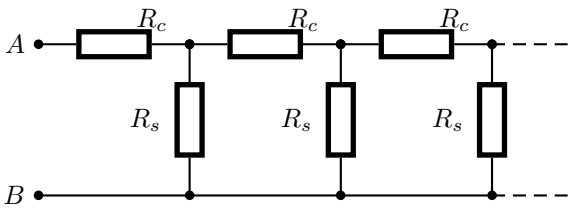


FIGURE 5 – Schéma équivalent aux diverses prises de Terre

5. Si R_n est la résistance de n blocs (R_c, R_s), établir une relation de récurrence entre R_{n+1} et R_n. Lorsque $n \to \infty$, la résistance AB tend vers une limite finie. Déterminer l'expression de cette limite en fonction de R_c et R_s. Commenter.

Réponses : $R_b = \rho\frac{\ell}{S}$; $S(r) = 2\pi(r^2 + rL)$; $R_s = \frac{\rho}{2\pi}\int_{r_T}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{(L+r)r}$, après réduction en éléments simples on a $R_s = \frac{\rho}{2\pi L}\ln(1+\frac{L}{r_T}) = 30,3\,\Omega$; $R_c = \frac{1}{\sigma}\frac{4d}{\pi D^2} = 1,7\times10^{-3}\,\Omega$ résistance très petite devant R_s ; $R_{n+1} = \frac{R_nR_s}{R_n+R_s}+R_c$, à la limite $R_\infty = \frac{R_\infty R_s}{R_\infty+R_s}+R_c$ d'où $R_\infty = \frac{1}{2}(R_c+\sqrt{R_c^2+4R_cR_s})$ avec $R_c \ll R_s$ on a $R_\infty \simeq \sqrt{R_cR_s}$, la résistance infinie tend est $R_\infty \simeq 0,23\,\Omega$, si l'on néglige la résistance du câble on peut considérer que les résistances R_s sont en parallèles, deux suffisent pour passer en dessous de $25\,\Omega$ puisque $Rs \parallel R_s = R_s/2 \simeq 15\,\Omega$.

4. Charge la plus rapide

On dispose d'un générateur de tension continue idéal, de deux résistances identiques et de deux condensateurs identiques. Indiquer le circuit, parmi ceux proposés à la figure 6, qui permet de charger le plus rapidement les condensateurs.

Proposition de réponses à la figure 6.

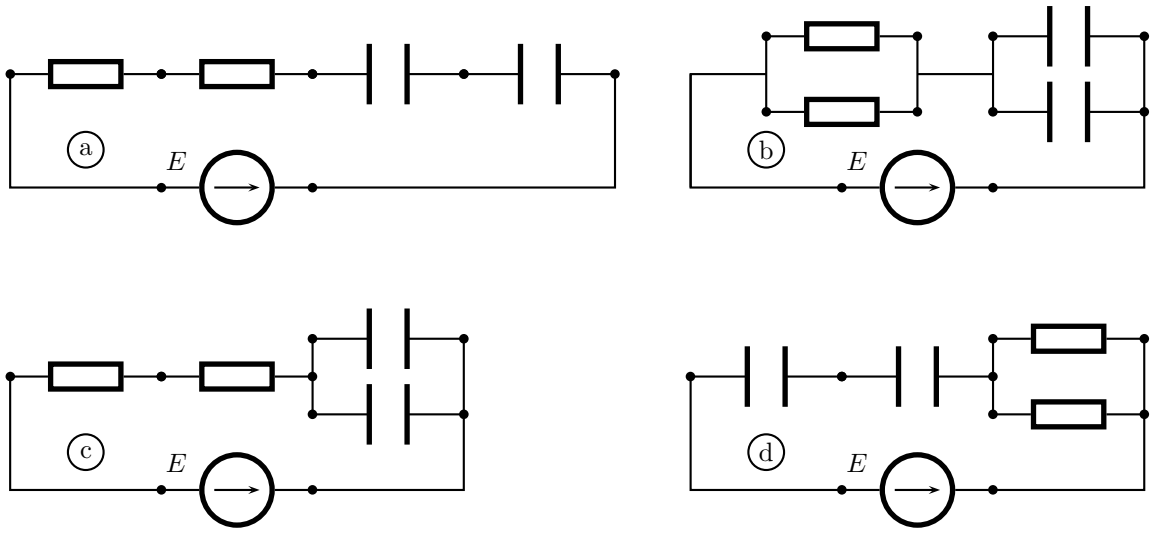


FIGURE 6 – Charge la plus rapide

Réponses : Le temps caractéristique de charge ou de décharge d'un circuit de type RC est $\tau = R_{eq}C_{eq}$. Il faut donc minimiser le produit de la résistance par la capacité. En série, les résistances s'additionnent, pour les capacités c'est en parallèle. Pour une association parallèle de deux résistances, on a $R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Si l'on met deux résistances en parallèle, on a $R_{eq} = R/2$. C'est la plus petite des valeurs de résistances. Pour les condensateurs, c'est l'association en série qui va être importante pour minimiser la capacité puisque $C_{eq} = \frac{C_1+C_2}{C_1C_2}$. On a $C_{eq} = C/2$. Le circuit le plus rapide possède donc un temps caractéristique de charge $\tau_r = \frac{RC}{4}$. La bonne réponse est d).

5. Circuit $R-L$ et régime transitoire

On étudie le circuit représenté à la figure 7. L'interrupteur est fermé à la date $t = 0$. On donne $R = 30\,\Omega$, $L = 300\,\mathrm{mH}$ et $E = 15\,\mathrm{V}$. Quelle est l'allure de la tension aux bornes de la bobine ?

Proposition de réponses à la figure 8.

Réponses : L'intensité est continue dans le circuit. Comme elle est nulle à $t = 0^-$, elle l'est aussi à $t = 0^+$. À la date $t = 0^+$, la tension aux bornes de la résistance est donc nulle, la tension aux bornes de la bobine est donc

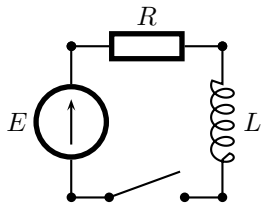


FIGURE 7 – Circuit $R-L$ étudié

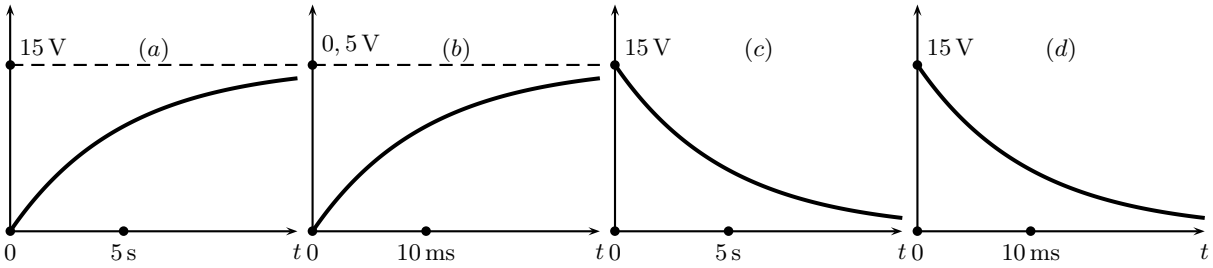


FIGURE 8 – Régime transitoire de la tension aux bornes de la bobine

nécessairement de 15 V. Par analyse dimensionnelle, Ri et $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ont la même dimension, par conséquent L/R est la durée caractéristique du régime transitoire. On a donc $\tau = \frac{L}{R} = 10\,\mathrm{ms}$. La bonne réponse est donc la courbe (d).

6. Régime critique

On considère le circuit représenté sur la figure 9.

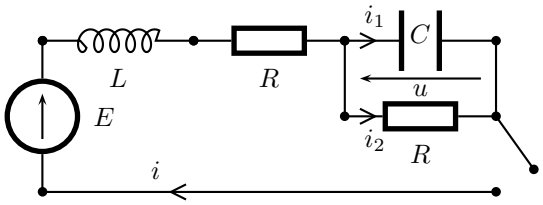


FIGURE 9 – Recherche du régime critique

L'interrupteur étant ouvert, les intensités i_1 et i_2 sont nulles et le condensateur est déchargé. On le ferme dans de telles conditions.

1. Déterminer, presque sans calculs et en les justifiant, les valeurs de i_1, i_2, i et u juste après la fermeture de l'interrupteur.
2. Même question lorsqu'au bout d'un temps suffisamment long, le régime permanent est établi.
3. Écrire, sans le résoudre, le système d'équations permettant d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par la tension u.
4. Voici quatre propositions pour l'équation différentielle vérifiée par la tension u dont une seule est correcte. Toujours sans résoudre le système précédent, expliquer pourquoi trois équations sont fausses et déterminer la bonne équation.

   a) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \left[\dfrac{1}{RC} + \dfrac{R}{L}\right]\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2u}{LC} = \dfrac{E}{LC}$ b) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left[\dfrac{1}{RC} + \dfrac{R}{L}\right]\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2u}{LC} = \dfrac{E}{LC}$

   c) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left[\dfrac{1}{RC} + \dfrac{R}{L}\right]\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{LC} = \dfrac{E}{LC}$ d) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left[\dfrac{1}{C} + \dfrac{R^2}{L}\right]\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2u}{LC} = \dfrac{E}{LC}$

5. Quelle relation doit-il exister entre R, C et L pour que la solution de l'équation différentielle corresponde à un régime critique ?

   Pour la suite, on prendra $C = 1,0\,\mu\mathrm{F}$ et $L = 20\,\mathrm{mH}$.
6. Déterminer la (les) valeur(s) de R correspondant au régime critique.
7. Déterminer, en fonction du temps, l'expression complète de la tension u.

8. Donner une estimation du temps nécessaire pour que le régime permanent soit établi dans le circuit (c'est à dire pour que la valeur de u diffère de moins de 1% de sa valeur finale).

7. Ouverture d'un interrupteur

On considère le circuit de la figure 10 qui comporte deux résistances $R_1 = 2\,\text{k}\Omega$ et $R_2 = 5\,\text{k}\Omega$, un condensateur de capacité $C = 200\,\text{nF}$, une bobine idéale d'inductance $L = 10\,\text{mH}$ et un générateur idéal de tension continue $E = 12\,\text{V}$. Un interrupteur idéal initialement fermé K relie le générateur au reste du circuit.

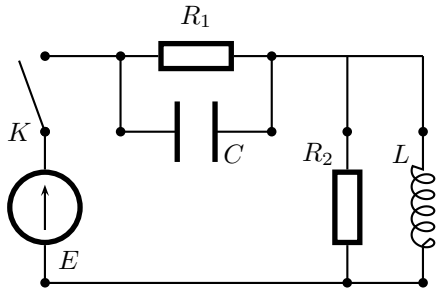


FIGURE 10 – Régime après l'ouverture de K

1. En régime établi alors que l'interrupteur K est toujours fermé, déterminer la tension u_1 aux bornes de la résistance R_1.
2. Toujours dans les mêmes conditions qu'à la question précédente, déterminer la puissance P_2 reçue par la résistance R_2.
3. À une date qu'on note $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par u_L, tension aux bornes de la bobine ?
4. Déterminer la condition initiale sur la tension $u_L(t = 0^+)$. Quelle est la solution de l'équation différentielle à laquelle obéit la tension u_L ?
5. Déterminer la variation d'énergie du condensateur entre $t = 0$ et $t \to \infty$.

Réponses : $u_1 = E = 12\,\text{V}$ car le condensateur est un interrupteur ouvert et la bobine un fil ; $P_2 = 0$ car la tension aux bornes de R_2 est nulle ; $\frac{\text{d}u_L}{\text{d}t} + \frac{R}{L}u_L = 0$; le courant dans la bobine est continu donc $i_L(0^+) = \frac{E}{R_1}$ mais $i_L + i_{R_2} = 0$ puisque l'interrupteur est ouvert, donc $i_{R_2}(0^+) = -\frac{E}{R_1}$ et donc $u_{R_2}(0^+) = U_L(0^+) = -\frac{R_2}{R_1}E = -30\,\text{V}$, la solution est $u_L = -\frac{R_2}{R_1}E\exp-\frac{Rt}{L}$; l'énergie initiale dans le condensateur va se dissiper en énergie interne pour la résistance $\Delta E_C = -\frac{1}{2}CE^2$.

8. Antirésonance

On considère le circuit de la figure 11 composé d'un générateur de tension alternative de fem $e(t) = E_0\cos\omega t$, d'une bobine idéale d'inductance $L = 0,1\,\text{H}$, d'une résistance $R = 10\,\Omega$ et d'un condensateur de capacité $C = 1\,\text{nF}$.

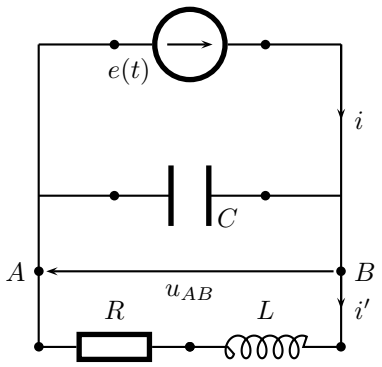


FIGURE 11 – Circuit d'étude d'une antirésonance

1. Déterminer l'expression complexe de l'impédance $\underline{Z}$ équivalente au dipôle AB. Montrer que :

$$Z^2(\omega) = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}$$

2. Montrer que l'impédance équivalente passe par un maximum pour une pulsation ω_m telle que $\omega_m^2 = \omega_0^2(\sqrt{1+2\alpha}-\alpha)$ où ω_0 est la pulsation de résonance du circuit RLC série et $\alpha = \dfrac{R^2C}{L}$. Vérifier que $\alpha \ll 1$. Montrer que finalement $\omega_m \simeq \omega_0$.
3. Étudier les limites de $\underline{Z}$ lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$. Justifier le fait qu'on parle d'antirésonance.
4. Établir une relation entre i, i', R, L, C et ω.
5. Montrer qu'à l'antirésonance l'amplitude I' du courant i' est beaucoup plus grande que celle I du courant i.

Réponses : $\underline{Z} = \frac{R+jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega}$ et $Z^2(\omega) = \dfrac{R^2+L^2\omega^2}{(1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2}$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, en dérivant $Z^2(\omega)$ on trouve bien l'expression appropriée, on a $\alpha = 10^{-6}$ d'où $\omega_m \simeq \omega_0$; $\underline{Z} = R$ pour $\omega = 0$ et $\underline{Z} = 0$ pour $\omega \to \infty$, $|\underline{Z}|$ passe forcément par un maximum donc $|\underline{i}|$ par un minimum d'où le terme d'antirésonance ; on a $\underline{Z}i = (R+jL\omega)i'$ d'où $i' = \frac{i}{(1-LC\omega^2)+jRC\omega}$; $I' \simeq \frac{I}{RC\omega_0} = I\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ d'où $I' = 10^3 I$.

9. Filtrage par un pont de Wien

On étudie le filtre de la figure 12 constitué à partir de deux résistances $R_1 = 90\,\text{k}\Omega$ et R_2 et à partir de deux condensateurs de capacité $C_1 = 10\,\text{nF}$ et C_2. On fournit aussi le diagramme de Bode de son amplitude toujours à la figure 12. L'abscisse fournie est $\log f/f_0$ où f est le fréquence et $f_0 = 10\,\text{Hz}$. Dans cette étude, on ne se préoccupera pas de la phase mais uniquement de l'amplitude des signaux. On se contentera de raisonner sur le diagramme asymptotique de la figure 12.

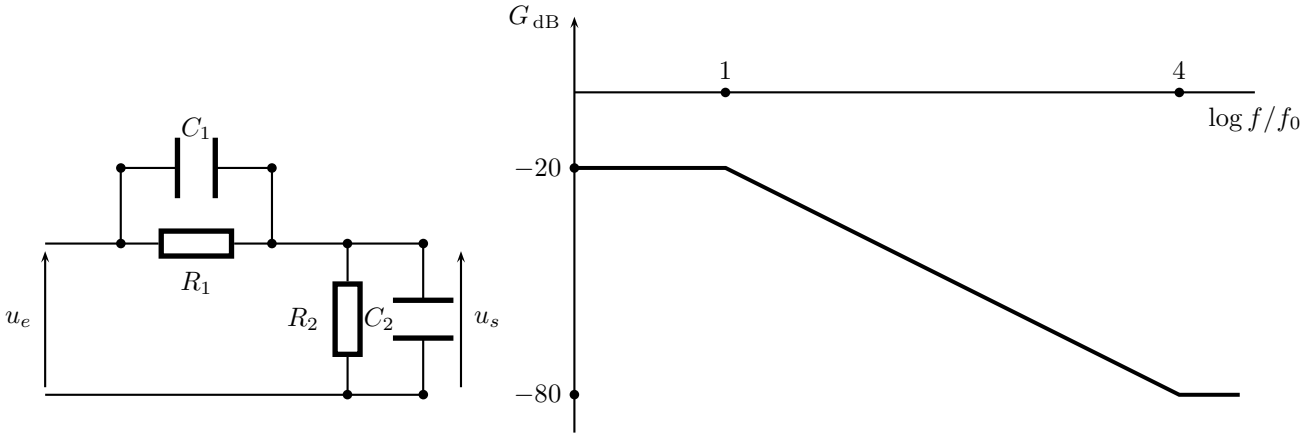
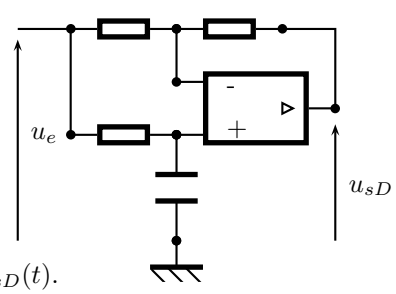


Figure 12 – Filtrage par un pont de Wien

1. En utilisant le comportement du filtre en basse et en haute fréquence, déterminer R_2 et C_2.
2. On met en entrée un signal de fréquence 10 kHz constitué des deux premières harmoniques d'amplitudes respectives 6 V et 4 V. Déterminer le signal en sortie.
3. On donne cette fois $u_e(t) = 10\cos(2\pi f_1 t) + 10\cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_1 = 10\,\text{Hz}$ et $f_2 = 100\,\text{kHz}$. Déterminer le signal en sortie.

Réponses : en basse fréquence les dipôles sont équivalents à des résistances le pont diviseur donne $\frac{u_s}{u_e} = \frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{1}{10}$ puisque le gain est de $-20\,\text{dB}$, en haute fréquence, c'est le contraire les dipôles sont équivalents à des condensateurs, $\frac{u_s}{u_e} = \frac{C_1}{C_1+C_2} = \frac{1}{10^4}$ puisque le gain est de $-80\,\text{dB}$, on trouve $R_1 = 9R_2$ d'où $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$ et $C_2 \simeq 10^4 C_1$ d'où $C_1 = 100\,\mu\text{F}$, pour $f_1 = 10\,\text{kHz}$ on a par la linéarité un gain de $-60\,\text{dB}$ donc une division par 10^3 de l'amplitude, la seconde harmonique est $f = 20\,\text{kHz}$ et $\log\frac{f}{f_0} = 3+\log 2$, le gain par linéarité est $-66\,\text{dB}$ ce qui correspond à une multiplication par 5×10^{-4}, on obtient donc une amplitude de 6 mV pour le fondamental et 2 mV pour la première harmonique, pour le signal de fréquence 10 Hz, on a un gain de $-20\,\text{dB}$ donc une division par 10 de l'amplitude qui sera de 1 V, pour 100 kHz, on aura un gain de $-80\,\text{dB}$ donc une division par 10^4 de l'amplitude qui ne sera plus que de 1 mV, on a filtré très nettement le signal basse fréquence pour le débarrasser de la haute fréquence qu'il comportait.

10. Démodulation de fréquence



Pour réaliser un démodulateur de fréquence, on utilise le circuit de la figure ci-contre. La tension u_e est sinusoïdale.
Les trois résistances ont même valeur R_D, la capacité a pour valeur C_D et la pulsation ω du signal u_e est voisine de ω_0, avec $\omega_0 R_D C_D = 1$.
On posera $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$; on notera $\varphi(\omega)$ la phase de u_{sD} relativement à u_e.

1. Déterminer la fonction de transfert du réseau.
2. Donner une expression approchée de la phase $\varphi(\Delta\omega)$.
3. Proposer un montage permettant d'obtenir la tension $u(t) = u_e(t) - u_{sD}(t)$.
4. Montrer que l'application d'un montage « détecteur de crête » (c'est-à-dire fournissant la valeur instantanée de l'amplitude d'un signal rapidement variable) à la tension $u(t)$ réalise une mesure de $\Delta\omega$.

Réponses : $H = \frac{1-j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0}$; $\varphi(\omega) = -2\arctan(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0})$; en remplaçant C_D par R_D et en supprimant le fil court-circuit qui ramène l'entrée + sur la tension d'entrée du montage précédent, on obtient un soustracteur ; $\underline{u} = (1 - \underline{H})\underline{u_e}$, au voisinage de $\omega = \omega_0$ amplitude proportionnelle à $\sqrt{2}(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0})$.

11. Comparaison de trois filtres actifs

On étudie ici les trois circuits de la figure 13. Dans chaque cas, le montage est réalisé avec $R = 1\,\text{k}\Omega$ et $k > 0$; l'amplificateur opérationnel utilisé est supposé idéal.

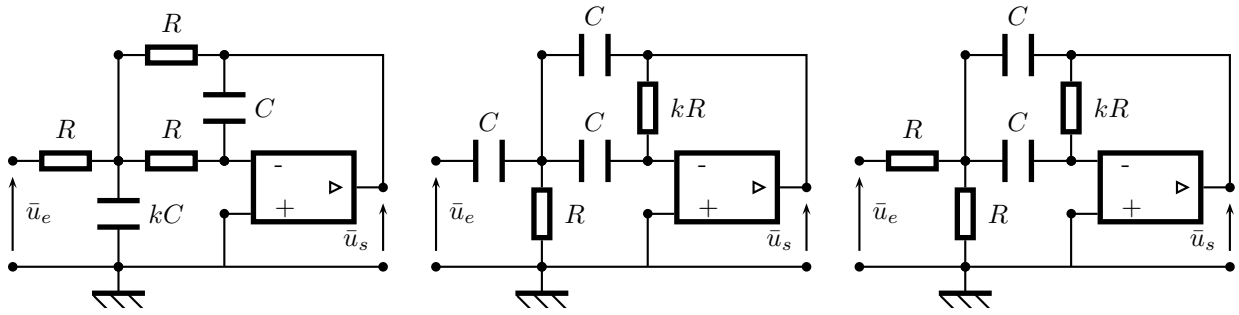


FIGURE 13 – Filtres actifs

L'étude du diagramme de Bode en gain de ces trois circuits montre qu'il s'agit respectivement (mais pas nécessairement dans l'ordre du schéma de la figure 13 !) :

— d'un filtre passe-bas du second ordre, non résonant, correspondant au régime critique d'oscillations libres, de fréquence propre $f_0 = 1,5\,\text{kHz}$;
— d'un filtre passe-bande du second ordre, de fréquence de résonance $f_0 = 1,5\,\text{kHz}$, de facteur de qualité $Q = 10$;
— d'un filtre passe-haut du second ordre, avec pour régime transitoire associé des oscillations pseudo-périodiques de fréquence $f_0 = 1,5\,\text{kHz}$ et une constante de temps d'amortissement de la tension de sortie $\tau = 15\,\text{ms}$.

1. Procédez, sans calcul, à une analyse qualitative du comportement de chacun des circuits de la figure 13 en haute et basse fréquence. En déduire dans chaque cas la nature du filtre réalisé.
2. Pour chacun des trois circuits, déterminez numériquement k et C.
   Tracer les diagrammes de Bode correspondants.
3. Pour chacun des trois circuits, décrire l'allure de la tension de sortie au cours du temps si le circuit est alimenté au moyen d'une tension d'entrée en créneau, périodique de fréquence f ; on distinguera les cas $f \ll f_0$ et $f \gg f_0$.

Réponses : Passe-bas, Passe-haut, Passe-bande ; $H_1 = \frac{-1}{1+3RC(j\omega)+kR^2C^2(j\omega)^2}$, $k = \frac{9}{4}$, $f_0 = \frac{1}{3\pi RC}$, $C = 71\,\text{nF}$; $H_2 = \frac{-1}{1+\frac{3}{kRC(j\omega)}+\frac{1}{kR^2C^2(j\omega)^2}}$, $\tau = \frac{2kRC}{3}$, $f_0 = \frac{\sqrt{4k-9}}{6\pi kRC}$, $k = 44925$, $C = 50\,\text{pF}$; $H_3 = \frac{-k/2}{1+j\sqrt{\frac{k}{2}}(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$ avec $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{k}}\frac{1}{RC}$ et $Q = \sqrt{\frac{k}{2}}$, $k = 200$, $C = 11\,\text{nF}$; (créneau, arches paraboles), (pics, créneau), (pics, triangle).

12. Filtre et oscillateur

On considère le montage de la figure 14 où l'amplificateur opérationnel utilisé est idéal et fonctionne en régime linéaire.

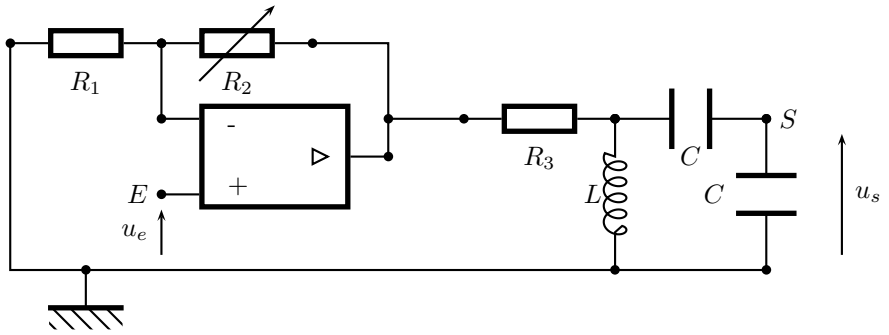


FIGURE 14 – Filtre et oscillateur

1. Établir la fonction de transfert $H(j\omega) = u_s/u_e$. En déduire qualitativement la nature du filtre.
2. On relie par un fil les points E et S. Établir l'équation différentielle vérifiée par u_s.
3. Que peut-on prévoir ? Dans quelles conditions ?

Réponses : $H(j\omega) = \frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{2+jR_3(C\omega-\frac{2}{L\omega})}$, filtre passe-bande centré en $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$; $\frac{\mathrm{d}^2u_s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R_3C}(1-\frac{R_2}{R_1})\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{LC}u_s = 0$; le coefficient de la dérivée première s'annule lorsque $R_1 = R_2$, on a un oscillateur à ω_0.

13. Caractérisation d'une impédance

On cherche à déterminer une impédance inconnue $\underline{Z} = A(\omega) + jB(\omega)$. Le circuit de la figure 15 est alimenté par le signal $e(t) = E_0\cos\omega t$. L'amplificateur opérationnel utilisé est supposé idéal et fonctionne de manière linéaire. Dans ces conditions, les courants des entrées inverseuse − et non inverseuse + sont nuls, et les potentiels de ces entrées sont égaux. Le courant de sortie inconnu est non nul.

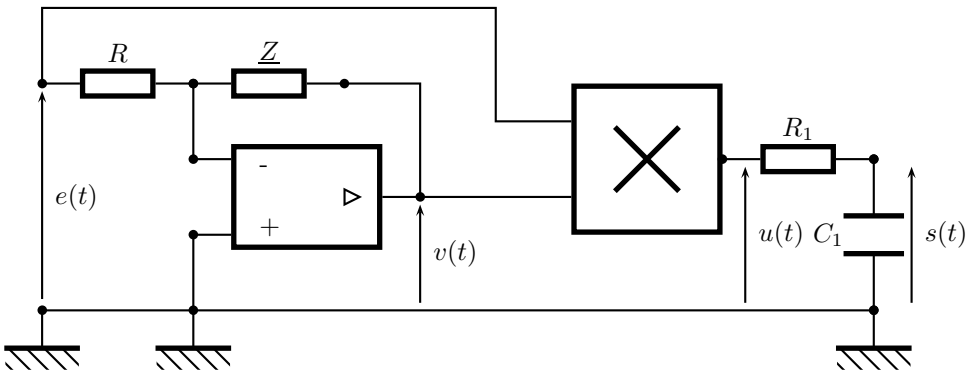


FIGURE 15 – Montage permettant la caractérisation de la partie réelle de $\underline{Z}$

1. Déterminer l'expression réelle de la tension $v(t)$.
2. Le multiplieur reçoit deux tension $e_1(t)$ et $e_2(t)$ et renvoie une tension $m(t) = ke_1(t)e_2(t)$. Déterminer l'expression de la tension $u(t)$, les calculs seront conduits en réels.
3. Déterminer une condition sur R_1 et C_1 pour déterminer $A(\omega)$ grâce au signal de sortie $s(t)$. On donnera l'expression de $s(t)$ dans ces conditions.
4. Que peut-on envisager de faire pour déterminer $B(\omega)$?

Réponses : on a $\underline{v} = -\frac{\underline{Z}}{R}\underline{e}$ d'où $v(t) = -\frac{\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}}{R}E_0\cos(\omega t+\varphi)$ avec $\tan\varphi = \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$; $u(t) = ke(t)v(t) = -kE_0^2\frac{\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}}{R}\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi)$ que l'on peut écrire $u(t) = -k\frac{E_0^2\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}}{2R}(\cos(2\omega t+\varphi)+\cos\varphi)$; $\frac{\underline{s}}{\underline{u}} = \frac{1}{1+jR_1C_1\omega}$ est intégrateur pour $R_1C_1\omega \gg 1$, intégrer revient à calculer la moyenne de $u(t)$ et donc à obtenir en sortie $s = -k\frac{E_0^2\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}}{2R}\cos\varphi$, or $\cos\varphi = \frac{A(\omega)}{\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}}$ d'où $s = -kE_0^2\frac{A(\omega)}{2R}$; pour accéder à la partie

imaginaire de $\underline{Z}$, on peut envisager de déphaser $v(t)$ de $\pi/2$ pour gérer $\varphi - \frac{\pi}{2}$ plutôt que φ ensuite, un circuit déphaseur est réalisable avec un amplificateur opérationnel.

B. Puissance

14. Adaptation d'impédance

Un générateur d'impédance interne $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$, délivrant une fem sinusoïdale $e(t) = E_0\sqrt{2}\cos\omega t$ est connecté aux bornes d'une charge d'impédance $\underline{Z}_u = R_u + jX_u$. L'admittance $\underline{Y}_u$ correspondant à l'impédance $\underline{Z}_u$ est notée $\underline{Y}_u = G_u + jH_u$.

1. Calculer l'intensité efficace I qui circule dans le circuit.
2. Calculer la puissance moyenne P_u absorbée sur une période par l'impédance de charge Z_u.
3. Exprimer la puissance moyenne P_u en fonction de R_u et I.
4. Déterminer les relations qui existent entre R_u, X_u, R_g et X_g pour que P_u soit maximale. On dit alors qu'il y a *adaptation d'impédance*.

Réponses : $I = \frac{E_0}{\sqrt{(R_u+R_g)^2+(X_u+X_g)^2}}$; $P_u = R_u I^2$; $R_u = R_g$ et $X_u = -X_g$.

15. Alimentation d'un moteur

On considère un générateur de tension sinusoïdale de valeur efficace $E_0 = 12\,\text{V}$ et de résistance interne $R_g = 50\,\Omega$. Ce générateur fonctionne à la fréquence $f = 50\,\text{Hz}$. Il alimente un petit moteur électrique dont le modèle est constitué d'une résistance interne $r = 10\,\Omega$ en série avec une bobine idéale de coefficient d'autoinductance L tel que $L\omega = L2\pi f = 30\,\Omega$.

1. Représenter le circuit électrique correspondant au montage décrit.
2. Déterminer littéralement et numériquement l'impédance $\underline{Z}_m$ du moteur. En déduire le déphasage entre le courant traversant le moteur et la tension à ses bornes.
3. Déterminer la puissance moyenne consommée par le moteur.
4. Déterminer la puissance moyenne délivrée par la source idéale de tension. En déduire le rendement du transfert de puissance entre le générateur idéal de tension et le moteur.

Réponses :$\underline{Z}_m = r + jL\omega$ et $|\underline{Z}_m| = \sqrt{r^2+L^2\omega^2} = 31,6\,\Omega$, le déphasage est $\cos\varphi = \frac{r}{|\underline{Z}_m|}$ ou $\tan\varphi = \frac{L\omega}{R} = 3$ d'où $\varphi = 71,6\,^\circ$; $P_m = rI^2$ avec $I = \frac{E_0}{\sqrt{(R_g+r)^2+L^2\omega^2}} = 0,18\,\text{A}$ d'où $P_m = 0,32\,\text{W}$; $P_{gen} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} E_0\sqrt{2}\cos\omega t\, I\sqrt{2}\cos(\omega t+\psi)\text{d}t = E_0 I\cos\psi$ avec $\cos\psi = \frac{R_g+r}{\sqrt{(R_g+r)^2+L^2\omega^2}} = 0,89$, on trouve $P_{gen} = 1,92\,\text{W}$, le rendement du transfert de puissance est $\eta = \frac{P_m}{P_{gen}} = 17\%$.

C. Régime non linéaire

16. Détecteur de crête

On considère le montage de la figure 16 composé d'une diode supposée idéale et d'un condensateur parfait de capacité $C = 1\,\mu\text{F}$.

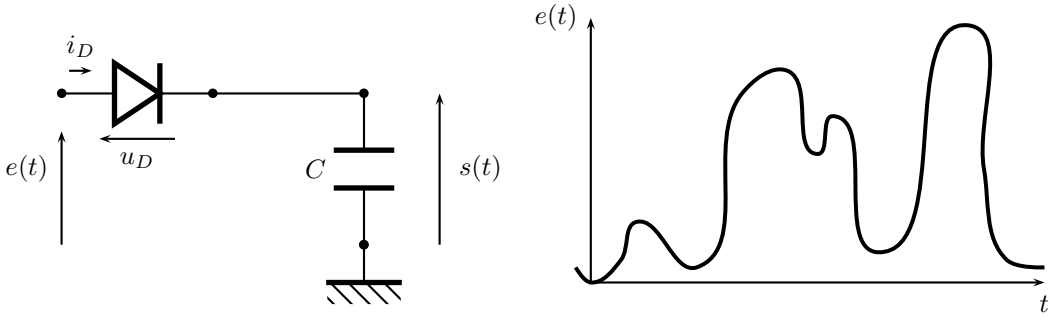


FIGURE 16 – Détecteur de crête

1. À la date $t = 0$, le condensateur est déchargé, il reçoit alors le signal $e(t)$ représenté sur la figure 16. Représenter le signal $s(t)$ que l'on obtient en sortie du montage.
   On apporte une petite modification au circuit de la figure 16. On obtient alors celui de la figure 17.
2. Comment est modifié le comportement du circuit ? Discuter en fonction de la valeur de R.
3. Le signal $e(t)$ est maintenant une tension sinusoïdale de fréquence 500 Hz dont on souhaite mesurer la tension efficace. Représenter ce que l'on peut obtenir pour $s(t)$. Quelle valeur de R faut-il prendre afin que le circuit de la figure 17 se comporte comme un détecteur de crête ? Quel montage électrique simple proposeriez-vous afin de mesurer à la sortie de celui-ci directement la tension efficace ?

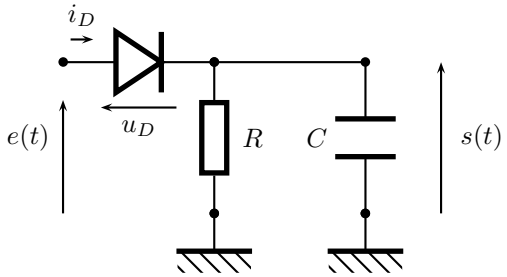


FIGURE 17 – Détecteur de crête pratique

Réponses : Voir la figure 18, décroissance exponentielle après une crête plus ou moins rapide en fonction de R, $RC \gg \frac{1}{f}$ $R100\,\mathrm{k}\Omega$ possible, amplificateur inverseur à AO de gain $-\frac{R_2}{R_1}$ avec $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

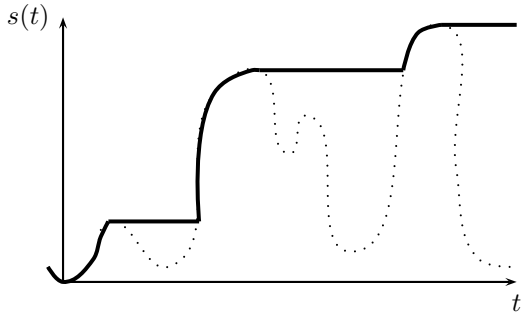


FIGURE 18 – Détecteur de crête pratique - Solution

17. Détecteur de crête et modulation

Le montage de la figure 19 porte le nom de *détecteur de crête*. Dans ce montage, la diode est idéale, sans seuil : elle est soir « passante » ($i_D \geqslant 0$ et $u_D = 0$), soit « bloquante » ($i_D = 0$ et $u_D \leqslant 0$). On pose $\tau = RC$.

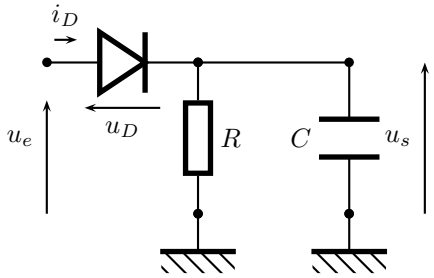


FIGURE 19 – Détecteur de crête

1. La tension d'alimentation $u_e(t)$ est sinusoïdale, de pulsation ω : $u_e(t) = u_{e0} \sin \omega t$. On suppose que $\tau\omega \gg 1$. À l'instant initial, la capacité n'est pas chargée. Déterminer $u_s(t)$.
2. La tension d'alimentation $u_e(t)$ est un signal de haute fréquence ω, dont l'amplitude $u_{e0}(t)$ varie lentement à la pulsation Ω, avec $\tau\omega \gg 1$ et $\tau\Omega \ll 1$. Déterminer $u_s(t)$.
3. Conclure et justifier la dénomination « détecteur de crête » pour ce montage.

Réponses : diode passante $u_e = u_s$ tant que $i_d \geq 0$ or $i_d = \frac{U_{e0}}{R}[\sin \omega t + \omega\tau \cos \omega t] \simeq C\omega u_{e0} \cos \omega t$, $i_d \geq 0$ jusqu'à environ $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$, ensuite diode bloquée, $u_s = u_{e0} \exp -\frac{t-\frac{T}{4}}{\tau}$ tant que $u_e < u_s$, quasiment jusqu'à $t = \frac{5T}{4}$ et ainsi de suite, $u_s(t) = u_{e0}(t)$, u_s suit la crête de $u_e(t)$.

18. Enregistrement d'une figure d'interférences

Dans un dispositif d'interférences, on obtient une intensité lumineuse variant périodiquement selon un axe Ox d'un écran. La loi donnant l'évolution de l'intensité lumineuse est : $\phi = \phi_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{i}\right)$ où i est appelé interfrange. Pour enregistrer cet éclairement grâce à un ordinateur, on utilise le déplacement à vitesse constante v_{ph} et étalonnée d'une photodiode selon l'axe Ox de l'écran grâce à un rail rectiligne, voir le schéma de la figure 20.

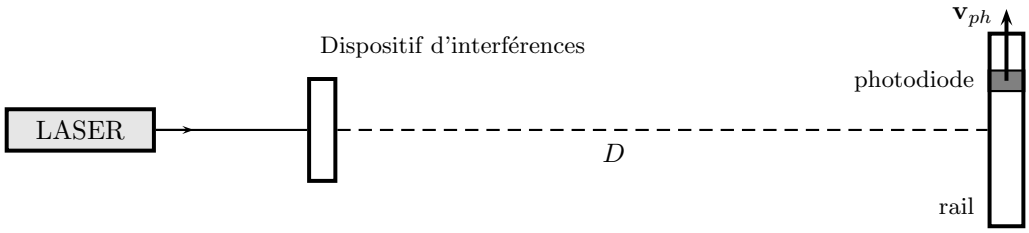


FIGURE 20 – Montage d'enregistrement de l'intensité lumineuse

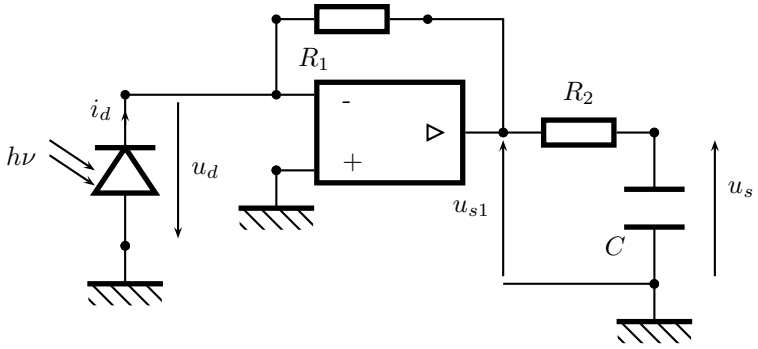


FIGURE 21 – Montage électronique de la photodiode

La conversion de l'intensité lumineuse en une tension électrique pouvant être acquise par l'ordinateur s'effectue au moyen du montage électronique de la figure 21. L'amplificateur opérationnel utilisé est supposé idéal et en régime linéaire.
La photodiode est une jonction entre deux zones de silicium dopée de façon différente créant ce que l'on appelle une jonction PN. Lorsqu'elle est éclairée cette jonction va permettre à des électrons liés de quitter leur niveau d'énergie pour devenir en quelque sorte des électrons libres et participer à la conduction du courant. La caractéristique de la photodiode est donnée par la loi :

$$i_d = I_0 \exp \frac{eu_d}{k_B T} - (I_0 + I_{ph})$$

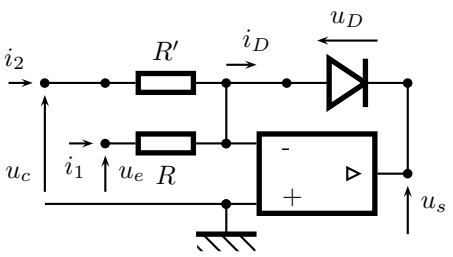
où I_{ph} est l'intensité du courant dû aux électrons libérés par le flux lumineux. On parle de courant photoélectrique. Ce dernier est proportionnel à l'intensité lumineuse ϕ reçue : $I_{ph} = \beta\phi$.

1. Déterminer l'expression de u_{s1} en fonction de l'intensité lumineuse ϕ.
2. Déterminer l'expression de u_{s1} en fonction du temps t.
3. Quelle est la nature du filtre constitué par la cellule R_2C placée au niveau de la sortie de l'amplificateur opérationnel ? Déterminer sa fréquence de coupure.
4. Établir en fonction du temps l'expression de u_s.
5. Conclure sur le rôle de la cellule R_2C sachant que l'objectif est de pouvoir mesurer l'interfrange i.

Réponses : $u_{s1} = R_1\beta\phi = R_1\beta\phi_0\left(1 + \cos 2\pi\frac{x}{i}\right)$; $u_{s1} = R_1\beta\phi = R_1\beta\phi_0\left(1 + \cos 2\pi\frac{v_{ph}}{i}t\right)$ de fréquence $f = \frac{v_{ph}}{i}$; filtre passe-bas $\underline{H} = \frac{1}{1+jR_2C\omega}$, $f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C}$; $u_s = R_1\beta\phi_0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+f^2/f_c^2}}\cos(2\pi ft - \arctan f/f_c)\right)$; filtre coupe les parasites haute fréquence, pour mesurer f donc i, il faut choisir $f < f_c$.

19. Multiplieur électronique

On considère le montage de la figure ci-contre. L'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal fonctionnant en régime linéaire.
La diode est une diode réelle. L'intensité qui la traverse en fonction de la tension à ses bornes est de la forme $i_D = I_0\big(\exp(\alpha u_D) - 1\big)$.



1. Établir l'expression de u_s en fonction de u_e et u_c.
   Quelle valeur donner à u_c pour que $u_s = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{u_e}{RI_0}\right)$?
2. On permute les positions de R et de la diode. Quelle est la nouvelle expression de u_s ? Quelle est la nouvelle valeur u_c' qui assure $u_s = -RI_0\exp(\alpha u_e)$?
3. On considère le montage de la figure 22 ; les diodes sont identiques et u_c et u_c' ont les valeurs déterminées précédemment. Déterminer u_s en fonction de u_{e1}, u_{e2}, R et I_0.

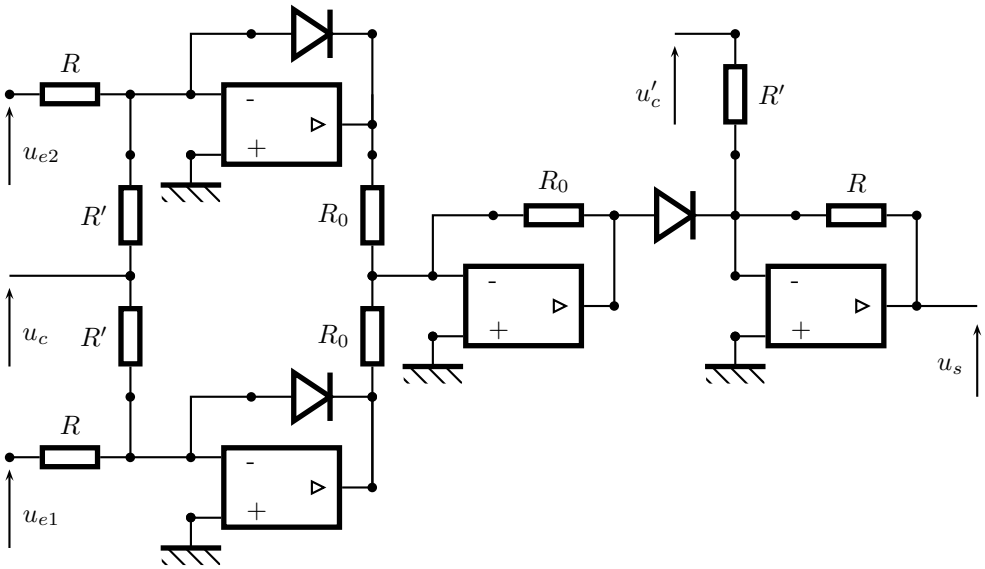


FIGURE 22 – Montage non linéaire

Réponses : $u_s = -\frac{1}{\alpha}\ln(1+\frac{u_e}{RI_0}+\frac{u_c}{R'I_0})$, $u_c = -R'I_0$; $u_s = RI_0(1-\exp(\alpha u_e)) - \frac{R}{R'}u'_c$, $u'_c = R'I_0$; $u_s = -\frac{u_{e1}u_{e2}}{RI_0}$.