

1. Libre parcours moyen : distance **moyenne** entre deux chocs.

2. Plusieurs réponses possibles :

- ✗  $\sqrt{s} \gg d$  où  $d$  est la taille caractéristique des molécules ou atomes. Pas de justification particulière, cette réponse est assez intuitive : pour faire passer des ballons par une fenêtre sans que les ballons ne se heurtent en passant la fenêtre, il faut que la taille caractéristique des ballons soit très inférieure devant la dimension caractéristique de la fenêtre.
- ✗  $s \gg \sigma$  où  $\sigma$  est la section efficace de collision : réponse plus correcte mais moins intuitive à ce stade du problème.
- ✗ La réponse  $\sqrt{s} \gg \ell$  est donc fausse. En effet, si on remplace  $\ell$  par  $1/(n\sigma)$ , on voit tout de suite que la bonne réponse est :  $n\ell s \gg 1$

3. Graphe :

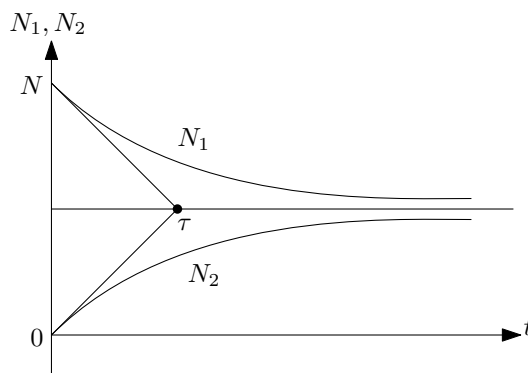


Figure 1

4. Liste des grandeurs pertinentes :

- ✗ dimension caractéristique des molécules  $d$
- ✗ Section du trou  $s$
- ✗ Vitesse caractéristique  $u$
- ✗ Nombre total de molécules  $N$
- ✗ Volume des compartiments  $V$  : avec  $N$  on peut alors introduire la densité volumique des molécules  $n = N/V$

Par analyse dimensionnelle, on doit avoir :

$$\tau \propto \frac{1}{u}$$

Si l'on suppose que  $\tau \propto \frac{1}{s}$ , et que le critère  $\sqrt{s} \gg d$  est vérifié et donc que  $d$  n'intervient pas, on obtient :

$$\tau \propto \frac{V}{us}$$

Soit :

$$\tau = k \frac{V}{us}$$

où  $k$  est une constante multiplicative sans dimension.

5. L'évolution du système constitué par ce qu'il y a à l'intérieur des deux compartiments est clairement irréversible. L'origine de cette irréversibilité est l'**inhomogénéité** des densités (ou pressions partielles).

6. La détermination de  $A$  repose sur la **normalisation** des probabilités :

$$\iiint dP^3 = 1$$

$$\iiint A^3 \exp(-au_x^2) \exp(-au_y^2) \exp(-au_z^2) du_x du_y du_z = 1$$

$$A^3 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-au_x^2) du_x \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-au_y^2) du_y \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-au_z^2) du_z \right) = 1$$

Les trois intégrales étant identiques, on a :

$$\left( A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-au^2) du \right)^3 = 1$$

Soit :

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-au^2) du = 1$$

En s'aidant du formulaire en en posant  $x = au$ , on obtient :

$$\frac{A}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi} = 1$$

Soit :

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T_0}}$$

7. On a donc obtenu :

$$p_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T_0}} \exp\left(-\frac{mu_x^2}{2k_B T_0}\right)$$

Expression de la forme (Pour une température  $T$  quelconque) :

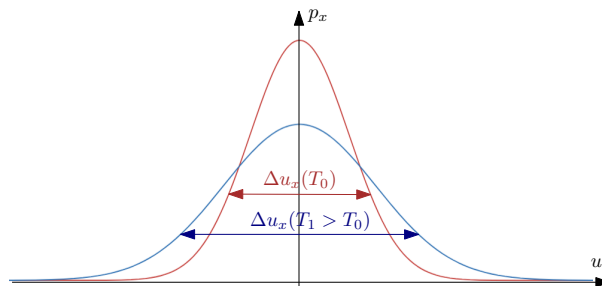
$$p_x = \frac{\alpha}{\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{\beta u_x^2}{T}\right)$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des constantes.

Ainsi :

- ✘ La valeur maximale  $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{T}}\right)$  de  $p_x$  évolue en  $1/\sqrt{T}$
- ✘ La largeur à mi-hauteur de la gaussienne évolue en  $\sqrt{T}$  (plus précisément la largeur à  $1/e$  vaut :  $2\sqrt{T/\beta}$ ).

D'où l'allure des graphes suivants :



**Figure 2**

Commentaires : Allure classique d'une gaussienne. Étalement de la probabilité au fur et à mesure que la température augmente.

8. On a donc :

$$\langle u_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 p_x du_x$$

D'où :

$$f(u_x) = u_x^2 p_x = A u_x^2 \exp(-a u_x^2)$$

Allure :

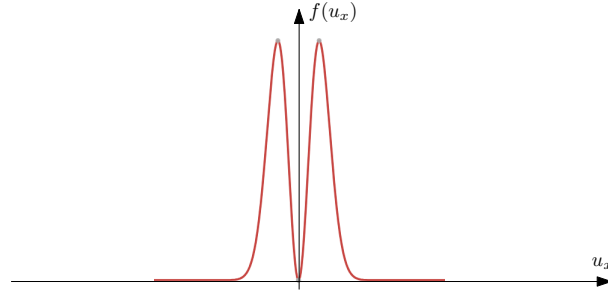


Figure 3

9. ✕ Valeur moyenne de  $\vec{u}$  :

$$\langle \vec{u} \rangle = \langle u_x \rangle \vec{e}_x + \langle u_y \rangle \vec{e}_y + \langle u_z \rangle \vec{e}_z$$

Avec :

$$\langle u_i \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i p_i du_i = 0$$

D'où :

$$\langle \vec{u} \rangle = \vec{0}$$

✕ Valeur moyenne de  $u^2$  :

$$\langle u^2 \rangle = \iiint u^2 p du_x du_y du_z$$

$$\langle u^2 \rangle = A^3 \int_0^\infty u^2 \exp(-a u^2) 4\pi u^2 du$$

$$\langle u^2 \rangle = 4\pi A^3 \int_0^\infty u^4 \exp(-a u^2) du$$

On pose  $w^2 = a u^2$  :

$$\langle u^2 \rangle = \frac{4\pi A^3}{a^2} \int_0^\infty w^4 \exp(-w^2) dw$$

Soit :

$$\langle u^2 \rangle = \frac{4\pi A^3}{a^{5/2}} \frac{3}{8} \sqrt{\pi}$$

Soit, en remplaçant  $A$  et  $a$  par leurs valeurs :

$$\langle u^2 \rangle = \frac{3k_B T_0}{m}$$

On retrouve bien évidemment la **vitesse quadratique moyenne**.

✕ Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T_0$$

On retrouve ici le **théorème d'équipartition** de l'énergie.

✕ ODG

$$u_{RMS} = 1.1 \times 10^3 \text{ m/s}$$

10. ✘ On construit le volume  $dD$  :

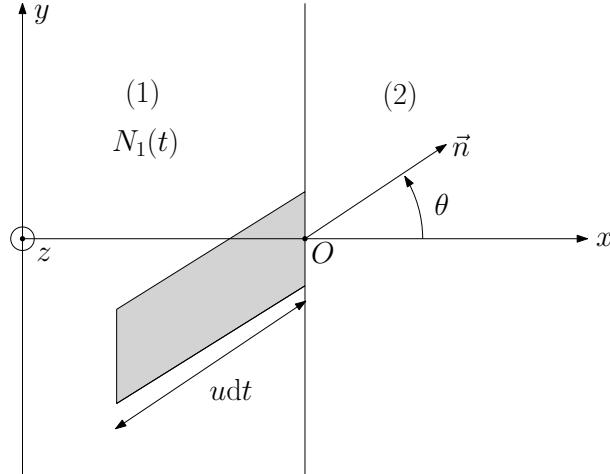


Figure 4

- ✘ On a donc :

$$dD = s u dt \cos \theta = s \vec{u} \cdot \vec{e}_x dt$$

- ✘ On en déduit  $dN_a$  :

$$dN_a = \frac{N_1}{V} dD = s \frac{N_1}{V} \vec{u} \cdot \vec{e}_x dt = s \frac{N_1}{V} u_x dt$$

11. ✘ Soit  $d^2 N_{1/2}$  le nombre d'atomes dans le volume  $dD$  qui ont une vitesse  $u_x$  comprise entre  $u_x$  et  $u_x + du_x$  et qui traversent donc la section  $s$  entre  $t$  et  $t + dt$ . On a alors :

$$dP_x = \frac{d^2 N_{1/2}}{dN_a} \Rightarrow d^2 N_{1/2} = dN_a p_x du_x$$

- ✘ Soit  $dN_{1/2}$  le nombre d'atome dans le volume  $dD$  qui vont traverser la section  $s$  entre  $t$  et  $t + dt$ . On a alors ( attention à bien considérer uniquement les vitesses  $u_x$  positives ) :

$$dN_{1/2} = \int d^2 N_{1/2} = \int_0^\infty dN_a p_x du_x$$

D'où :

$$dN_{1/2} = \frac{N_1 s A}{V} \left( \int_0^\infty u_x \exp(-a u_x^2) du_x \right) dt$$

- ✘ En utilisant à nouveau le formulaire, on trouve :

$$dN_{1/2} = \frac{s}{2\sqrt{\pi a} V} N_1 dt = \frac{s}{V} \sqrt{\frac{k_B T_0}{2\pi m}} N_1 dt$$

D'où :

$$\dot{N}_{1/2} = \frac{s}{V} \sqrt{\frac{k_B T_0}{2\pi m}} N_1$$

et donc :

$$\tau = \frac{V}{s} \sqrt{\frac{2\pi m}{k_B T_0}}$$

12. Il manque la valeur de  $V$  : en prenant  $V = 10 \text{ L}$  (il fallait prendre  $(V)^{1/3} \gg \sqrt{s}$ ), on trouve :

$$\tau \approx 10^7 \text{ s} \approx 1 \text{ an}$$

13. Le temps caractéristique est très long et permet de valider l'hypothèse quasistatique et l'hypothèse isotherme.

14. ✗ On utilise la relation des GP :

$$P = nk_B T$$

✗ On remplace dans l'inégalité proposée et on trouve  $P_{max}$  :

$$P_{max} = \frac{k_B T}{10\sigma \sqrt{s}}$$

✗ ODG de  $\sigma$  :

$$\sigma = 4\pi \left( \frac{d^2}{2} \right)^2 = \pi d^2 \approx 10^{-20} \text{ m}^2$$

où  $d$  est le diamètre d'un atome.

✗ On en déduit :

$$P_{max} = 10^4 \text{ Pa}$$

15. ✗ Nous avons donc :

$$\dot{N}_{1/2} = \frac{N_1}{\tau}$$

✗ Par analogie, on a :

$$\dot{N}_{2/1} = \frac{N_2}{\tau}$$

✗ Un simple bilan de matière dans les deux compartiments donne :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\dot{N}_{1/2} + \dot{N}_{2/1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = +\dot{N}_{1/2} - \dot{N}_{2/1}$$

d'où :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{\tau} + \frac{N_2}{\tau}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{N_2}{\tau} + \frac{N_1}{\tau}$$

16. On ajoute et on soustrait les deux équations précédente (On pose  $S = N_1 + N_2$  et  $D = N_1 - N_2$ ) :

$$\frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow S = Cste$$

$$\frac{dD}{dt} = -2\frac{D}{\tau} \Rightarrow D = A \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$$

D'où, en utilisant les conditions initiales :

$$S = N_1 + N_2 = N$$

$$D = N_1 - N_2 = N \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$$

Et donc :

$$N_1 = \frac{N}{2} \left( 1 + \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right)$$

$$N_2 = \frac{N}{2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right)$$

17. ✖ Le principe de cette application repose sur le fait que le temps caractéristique d'effusion  $\tau$  dépend de la vitesse moyenne des particules et donc de leur masse.
- ✖ Si on place dans les compartiments (1) et (2) des isotopes  $A_a$  et  $A_b$  de masses respectives  $m_a$  et  $m_b$ , on aura :

$$\tau_a = \frac{V}{s} \sqrt{\frac{2\pi m_a}{k_B T_0}} = \alpha \sqrt{m_a}$$
$$\tau_b = \frac{V}{s} \sqrt{\frac{2\pi m_b}{k_B T_0}} = \alpha \sqrt{m_b}$$

- ✖ En supposant que les effusions des deux isotopes sont indépendantes et qu'à l'instant initial les isotopes sont dans le compartiment (1), on obtient :

$$N_{1a} = \frac{N_a}{2} \left( 1 + \exp\left(-\frac{2t}{\tau_a}\right) \right)$$
$$N_{2a} = \frac{N_a}{2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau_a}\right) \right)$$
$$N_{1b} = \frac{N_b}{2} \left( 1 + \exp\left(-\frac{2t}{\tau_b}\right) \right)$$
$$N_{2b} = \frac{N_b}{2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau_b}\right) \right)$$

- ✖ Calculons par exemple le rapport  $N_{1a}/N_{1b}$  :

$$r = \frac{N_{1a}}{N_{1b}} = \frac{N_a \left( 1 + \exp\left(-\frac{2t}{\tau_a}\right) \right)}{N_b \left( 1 + \exp\left(-\frac{2t}{\tau_b}\right) \right)}$$

On cherche  $t = t^*$  tel que  $r$  soit extrémal :

$$= 0 \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{2t^*}{\tau_a}\right) \left( 1 + \exp\left(-\frac{2t^*}{\tau_b}\right) \right) = \frac{\tau_a}{\tau_b} \exp\left(-\frac{2t^*}{\tau_b}\right) \left( 1 + \exp\left(-\frac{2t^*}{\tau_a}\right) \right)$$

Soit :

$$\exp\left(-\frac{t^*}{\tau_a}\right) \cosh\left(\frac{t^*}{\tau_b}\right) = \frac{\tau_a}{\tau_b} \exp\left(-\frac{t^*}{\tau_b}\right) \cosh\left(\frac{t^*}{\tau_a}\right)$$

## Centrale 2008 MP Physique-Chimie

### Partie I : L'humidité dans l'air

#### I-A- Pression de vapeur saturante

I-A-1- L'expression de la constante d'équilibre est  $K^\circ(T) = \frac{a_{H_2O}^{vap}}{a_{H_2O}^{liq}}$ . L'activité de l'eau

liquide vaut  $a_{H_2O}^{liq} = 1$ . L'activité de l'eau dans la phase vapeur vaut  $a_{H_2O}^{vap} = \frac{p_{H_2O}}{p^\circ} = \frac{p_{H_2O}^{sat}}{p^\circ}$ .

I-A-2-

On intègre la relation précédente  $\frac{d \ln(K^\circ(T))}{dT} = \frac{a - bT}{RT^2}$  entre deux températures  $T_0$

et  $T$  pour obtenir  $K^\circ(T) = K^\circ(T_0) \left(\frac{T_0}{T}\right)^b \exp\left(-a\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)$ . On en déduit

$p_{H_2O}^{sat}(T) = p^\circ K^\circ(T_0) \left(\frac{T_0}{T}\right)^b \exp\left(-a\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)$  qui est bien de la forme demandée avec  $\eta = b$  et

$v = a$ . L'allure de  $p_{H_2O}^{sat}(T)$  est celle d'une fonction croissante.

Application numérique :

$$p_{H_2O}^{sat}(100^\circ\text{C}) = 1,02 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 1 \text{ bar}$$

Dans les conditions normales de pression, la température d'ébullition de l'eau étant  $100^\circ\text{C}$ , il est cohérent de trouver que la pression de vapeur saturante est 1 bar.

$$p_{H_2O}^{sat}(20^\circ\text{C}) = 0,24 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

#### I-B- Isothermes de l'eau, diagramme de Clapeyron

I-B-1- Pour obtenir de l'eau liquide à des températures supérieures à  $100^\circ\text{C}$ , il faut augmenter la pression.

I-B-2- Entre les points  $A$  et  $B$ , l'eau est sous forme liquide. Entre  $C$  et  $D$ , elle est sous forme de vapeur. Entre les points  $B$  et  $C$ , on observe un équilibre entre les phases liquide et vapeur.

La courbe de rosée est la courbe  $GE$ , la courbe d'ébullition est la courbe  $FE$ .  $E$  est le point critique.

I-B-3-  $v_M$  est le volume massique d'un système à l'équilibre comportant phases liquide et vapeur,  $v_B$  est le volume massique de l'eau liquide,  $v_C$  est le volume massique de l'eau vapeur. On

peut écrire la relation :  $v_M = x_{liq} v_B + (1 - x_{liq}) v_C$ . Soit  $x_{liq} = \frac{v_C - v_M}{v_C - v_B} = \frac{MC}{BC}$ .

En exploitant la figure 1, on trouve :

$$v_M = 0,01 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \quad v_C = 0,045 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \quad v_B = 0,002 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

Pour un système de point figuratif  $M$ , la masse de liquide, pour une masse totale  $m_{H_2O} = 1 \text{ kg}$ , est

$$m_{H_2O}^{liq} = x_{liq} m_{H_2O} = \frac{v_C - v_M}{v_C - v_B} m_{H_2O} = 0,81 \text{ kg}, \text{ celle de vapeur est } m_{H_2O}^{vap} = m_{H_2O} - m_{H_2O}^{liq} = 0,19 \text{ kg}.$$

Le volume de la phase liquide est  $V_{liq} = m_{H_2O}^{liq} v_B = 1,6 \text{ L}$ , celui de la phase vapeur est

$$V_{vap} = v_M m_{H_2O} - V_{liq} = 8,4 \text{ L}.$$

Le système de point figuratif  $B$  est uniquement constitué d'eau liquide, son volume est donc 2 L.

Le système de point figuratif  $C$  est uniquement constitué d'eau vapeur, son volume est donc 45 L.

### I-C- Mesure du taux d'humidité dans l'air

I-C-1-a- La transformation pour le gaz parfait avec  $\gamma$  constant étant supposée adiabatique réversible, elle suit la loi de Laplace  $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$ . Ainsi, avec les grandeurs à l'entrée de la tuyère et au niveau du miroir,  $p_{atm}^{1-\gamma} T_{atm}^\gamma = p_{mir}^{1-\gamma} T_{mir}^\gamma$ .

I-C-1-b- L'apparition de buée indique que la vapeur est saturante. Ainsi  $p_{H_2O}^{mir} = p_{H_2O}^{sat}(T_{mir})$ .

I-C-1-c- L'expression de l'humidité relative du mélange à l'entrée du dispositif est donnée par :

$$HR(T_{atm}) = 100 \frac{p_{H_2O}^{atm}}{p_{H_2O}^{sat}(T_{atm})} = 100 \left( \frac{T_{mir}}{T_{atm}} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{p_{H_2O}^{sat}(T_{mir})}{p_{H_2O}^{sat}(T_{atm})}, \text{ la loi de Laplace étant valable aussi pour les}$$

pressions partielles.

En utilisant l'expression de la pression de vapeur saturante :

$$HR(T_{atm}) = 100 \left( \frac{T_{mir}}{T_{atm}} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma} - \eta} \exp \left( -v \left( \frac{1}{T_{mir}} - \frac{1}{T_{atm}} \right) \right).$$

I-C-1-d- L'application numérique conduit à une humidité relative de 59%.

I-C-2-a- Au point  $B$ , la vapeur devient saturante et on observe la première goutte de liquide.

Entre les points  $A$  et  $B$ , l'humidité absolue ne varie pas alors que l'humidité relative augmente.

Entre les points  $B$  et  $C$ , l'humidité relative n'évolue alors que l'humidité absolue diminue.



I-C-2-b- L'eau absorbée par le condensateur reste à l'intérieur du diélectrique. Il faudrait pouvoir l'évacuer.

I-C-2-c- La puissance électrique fournie est dissipée par effet Joule et sert à évaporer l'eau contenue dans le diélectrique.

I-C-2-d- Le courant circulant selon l'axe  $Oz$ , dans la relation  $R = \frac{\rho l}{s}$ ,  $l = L$  et  $s = 2\pi R_1 e$ . La résistance  $R$  vaut alors  $16 \Omega$ .

I-C-2-e La puissance dissipée par effet Joule est  $P_J = Ri^2 = 0,16 \text{ W}$ .

L'énergie nécessaire à la vaporisation de la gouttelette d'eau est  $E_{vap} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{H_2O} \Delta_{vap} H_{H_2O}^\circ$ .

Le temps nécessaire à la vaporisation est donc  $t = \frac{E_{vap}}{P_J} = 8,1 \text{ s}$ .

I-C-2-f- On doit faire circuler le courant à partir de  $T_B = 23^\circ\text{C}$ .

I-C-2-g- En choisissant sur la droite les deux points de coordonnées  $(39^\circ\text{C}; 3,3 \text{ k}\Omega)$  et  $(90^\circ\text{C}; 3,6 \text{ k}\Omega)$ , on détermine  $R_0 = 3 \cdot 10^3 \Omega$  et  $\alpha = 2 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . La petite taille de la figure ne permet pas une détermination bien précise...

I-C-3-a- En remarquant les deux ponts diviseurs de tension, on écrit  $u_1 = \frac{R(\theta)}{R(\theta) + R_0} E$  et

$u_2 = \frac{E}{2}$ . Ainsi,  $U_1 = K(u_1 - u_2) = \frac{EK}{2} \frac{\alpha\theta}{2 + \alpha\theta}$ . Un inconvénient (suggéré par la suite...) peut être que  $U_1$  ne dépend pas linéairement de  $\theta$ .

I-C-3-b- La tension à la sortie du multiplieur est  $kU_1U_2$ . En sortie du sommateur,

$$U_2 = U_1 + kU_1U_2. \text{ Ainsi, } U_2 = \frac{U_1}{1 - kU_1} = \frac{EK}{2} \frac{\alpha\theta}{2 + \alpha\theta \left(1 - \frac{EKk}{2}\right)}.$$

On peut pallier le défaut précédent en faisant  $EKk = 2$ .

I-C-4-a- Exprimons, dans un premier temps, la fonction de transfert complexe

$$\underline{H} = \frac{U_{C(HR)}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + R' C j \omega - LC \omega^2}, \text{ que l'on peut mettre sous la forme } \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{Q \omega_0} - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \text{ avec}$$

$$H_0 = 1, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R'} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$$\text{On a alors } U_{C(HR)} = |\underline{H}| E_0 = \frac{E_0}{\left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega}{Q \omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}}.$$

Pour que  $U_{C(HR)}$  présente un maximum, il faut que  $\frac{dU_{C(HR)}}{d\omega} = 0$ , soit  $\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$ . Cette

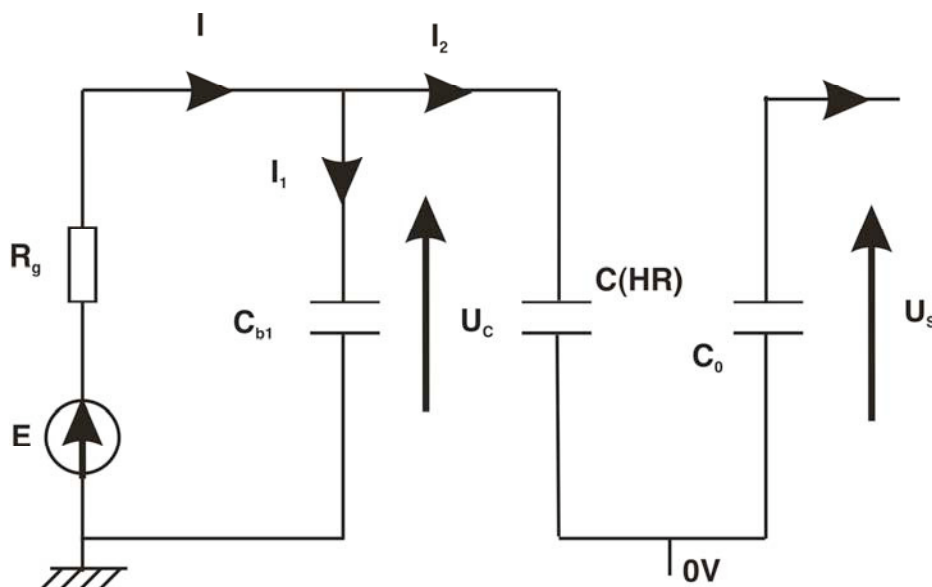
relation n'a de sens physique que si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Dans le cas de l'existence d'un maximum,  $\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ . L'écart relatif est alors

$$\frac{|\omega_{\max} - \omega_0|}{\omega_0} = \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \right| = 5 \cdot 10^{-6} \approx 0. \text{ Il est légitime de confondre } \omega_0 \text{ et } \omega_{\max}.$$

I-C-4-b- Le montage équivalent de ce système est l'ensemble des deux capacités  $C(HR)$  et  $C_{\text{câble}}$  en parallèle. La capacité mesurée est alors la somme  $C(HR) + C_{\text{câble}}$ . La mesure dépend donc du câble de connexion.

I-C-4-c- Le schéma électrique équivalent est donné par la figure ci-dessous :



On remarque que  $U_{Cb1} = U_{C(HR)} = E - r_g i = U_c$ . De plus,  $i = i_1 + i_2 = (C_{b1} + C(HR)) \frac{dU_c}{dt}$ .

Ainsi, après résolution de l'équation différentielle, les condensateurs étant initialement déchargés

(dans le sujet, seul  $C_0$  est supposé déchargé...), on obtient  $U_c = E \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$  avec

$\tau = r_g (C_{b1} + C(HR))$ . Au bout d'un temps très long,  $U_c = E$ .

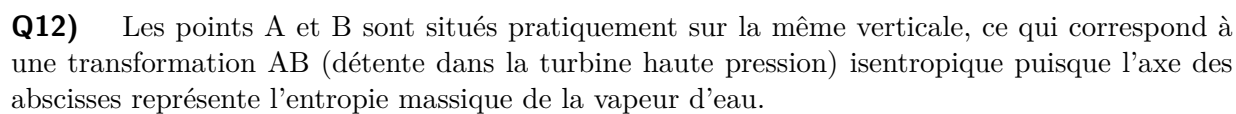
Après un temps très long, la charge portée par le câble 1 est  $Q_{Cb1} = C_{b1}E$ , celle portée par le capteur

est  $Q_{C(HR)} = C(HR)E$ . Le câble 2 n'est jamais chargé. Etant données les conventions d'orientation

des courants,  $Q_{C_0} = -Q_{C(HR)}$ . Ainsi,  $U_s = -\frac{Q_{C(HR)}}{C_0} = -\frac{C(HR)}{C_0}E$ . La mesure ne dépend plus des

câbles de connexion. En revanche, l'amplificateur opérationnel doit saturer assez vite.

**Q11)**



Pour un gaz parfait une isentropique vérifie la loi de Laplace, qui s'écrit dans sa forme la plus courante  $pV^\gamma = cste$ . La combinaison avec la loi du gaz parfait  $pV/T = cste$  donne la relation entre pression et température pour la transformation AB

$$\frac{P_A^{\gamma-1}}{T_A^\gamma} = \frac{P_B^{\gamma-1}}{T_B^\gamma}$$

En supposant que les pressions sont fixées, la température de sortie dans l'hypothèse d'un gaz parfait a pour expression

$$T_B = \left( \frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_A$$

$$P_B = 30 \text{ bar}, P_A = 144 \text{ bar}, T_A = 565^\circ\text{C} = 838 \text{ K}, \gamma = 1,3 \quad (1,4 \text{ accepté})$$

$$T_B = 583 \text{ K} = 310^\circ\text{C}$$

L'ordre de grandeur est comparable avec la valeur réelle ( $330^\circ\text{C}$ ), mais sensiblement différente : l'hypothèse du gaz parfait peut être utilisée en première approximation, mais reste néanmoins insuffisante pour des calculs précis.

**Q13)** Par définition de la vitesse débitante,  $D_m = \rho S V$ . La section  $S$  de l'écoulement à l'entrée de la turbine est limitée par les cercles de rayon  $R$

$$v_A = \frac{D_m}{\rho_A S}$$

$$D_m = 534 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1} = 148 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \rho_A = 33 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$v_A = 55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La conservation du débit massique en régime stationnaire impose  $D_m = \rho_A S_A v_A = \rho_B S_B v_B$ . Si on modifie la géométrie de la turbine de sorte que  $S_A = S_B$ , tout en conservant la même valeur de  $\rho_B$ , la vitesse débitante en sortie a pour expression et pour valeur

$$v_B = \frac{\rho_A}{\rho_B} v_A = \frac{33}{11} 55 = 165 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'objectif de la turbine est de transférer de l'énergie du fluide au rotor. Si la vitesse du fluide augmente, celui-ci gagne de l'énergie cinétique, ce qui limite les transferts du fluide vers le rotor. Pas d'autre idée, puisque l'application numérique montre qu'il n'y a pas risque de passage en régime supersonique.

Si on veut maintenir un ordre de grandeur constant pour la vitesse débitante, la conservation du débit massique impose la relation entre les sections

$$S_B = \frac{\rho_A}{\rho_B} S_A > S_A$$

La section de la turbine doit augmenter entre l'entrée et la sortie.

**Q14)** Le premier principe de la thermodynamique pour le système ouvert associé à la turbine haute pression s'écrit, en supposant que la turbine est calorifugée :

$$D_m(h_B - h_A) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th} = \mathcal{P}_u$$

$$\mathcal{P}_u = 148 \times (3050 - 3500) = -67 \times 10^3 \text{ kW} = -67 \text{ MW}$$

Il s'agit de la puissance utile reçue par le fluide. On en déduit la puissance fournie par la vapeur d'eau à l'arbre

$$\mathcal{P} = -67 \text{ MW}$$

**Q15)** Une détente isentropique est représentée par une verticale dans le diagramme de Mollier. En partant du point A et en restant dans le domaine vapeur (limité par la courbe noire indiquée 1,00, correspondant à la courbe de rosée, les courbes noires représentant les courbes iso-titre), on aboutit à un point A' de température comprise entre 150 et 200 °C, de pression comprise entre 8 et 10 bar, d'enthalpie massique  $2790 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  : on obtient de manière analogue à la question précédente une puissance cédée à l'arbre

$$-\mathcal{P}_u = D_m(h_A - h'_A) = 148 \times (3500 - 2790) = 105 \text{ MW}$$

On constate cependant que la détente n'est pas complète puisque la pression finale est supérieure à la pression atmosphérique.

*Remarque :* le diagramme de Mollier n'est pas au programme en PSI, l'énoncé aurait pu donner plus d'indications, en particulier préciser la courbe de rosée, qui n'est pas très visible parmi les courbes iso-titres qui ne sont pas clairement indiquées.

**Q16)** Le surchauffeur (transformation BC) ne contient pas de pièce mobile, donc la seule puissance en jeu est une puissance thermique, égale, d'après le premier principe en système ouvert appliqué au surchauffeur, à

$$\mathcal{P}_{th, SC} = D_m(h_C - h_B) = 148 \times (3600 - 3050) = 81,4 \text{ MW}$$

Cette puissance représente une puissance à fournir à la vapeur pour la surchauffer.

L'ensemble du circuit vapeur correspond à la transformation AE. Dans l'hypothèse où les turbines sont calorifugées ( $\mathcal{P}_{th} = 0$ ), le premier principe en écoulement stationnaire s'écrit

$$\mathcal{P}_{u, turbines} + \mathcal{P}_{th, SC} = D_m(h_E - h_A) = 148 \times (2550 - 3500) = -141 \text{ MW}$$

comme  $\mathcal{P}_{th, SC} = 81,4 \text{ MW}$ ,

$$\mathcal{P}_{turbines} = -\mathcal{P}_{u, turbines} = 141 + 81,4 = 222 \text{ MW}$$

Par rapport à une unique turbine isentropique, pour laquelle  $\mathcal{P} = 105 \text{ MW}$ , on gagne 117 MW, en apportant 81,4 MW au surchauffeur : l'utilisation d'un surchauffeur et de plusieurs turbines est plus intéressante que l'utilisation d'une seule turbine du point de vue énergétique.

**Q17)** Dans la turbine moyenne pression la vapeur se transforme selon CD. Pour obtenir l'évolution adiabatique réversible de même pression finale  $p_D$ , on trace l'intersection de la verticale passant par C (on s'intéresse à une évolution adiabatique réversible donc isentropique) et l'isobare  $p = p_D = 4$  bar, qui correspond au point D', avec  $h_{D'} = 2950 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Par conséquent pour l'évolution réelle et l'évolution isentropique, on obtient respectivement les puissances cédées à l'arbre

$$\mathcal{P}_{\text{réelle}} = -D_m(h_D - h_c) = -148 \times (3100 - 3600) = 74 \text{ MW}$$

$$\mathcal{P}_{\text{isent.}} = -D_m(h_{D'} - h_c) = -148 \times (2950 - 3600) = 96 \text{ MW}$$

La puissance réelle cédée à l'arbre est inférieure à la puissance dans le cas isentropique. La différence entre ces deux valeurs représente les pertes liées aux irréversibilités :

$$\mathcal{P}_{\text{pertes}} = 22 \text{ MW}$$

**Q18)** On est en présence d'un système calorifugé ( $\mathcal{P}_{\text{th}} = 0$ ), sans pièce mobile ( $\mathcal{P}_u = 0$ ), à deux entrées et deux sorties, pour lequel le premier principe en écoulement stationnaire s'écrit

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{D_m(h_{\text{liq}, 26^\circ\text{C}} - h_{\text{vap}, 26^\circ\text{C}})}_{\text{vapeur}} + \underbrace{\rho_{\text{eau}} Q c_{\text{eau}}(\theta_s - \theta_e)}_{\text{eau de refroidissement}} = -D_m l_{\text{vap}} + \rho_{\text{eau}} Q c_{\text{eau}}(\theta_s - \theta_e) = 0$$

soit

$$\theta_s = \theta_e + \frac{D_m l_{\text{vap}}}{\rho_{\text{eau}} Q c_{\text{eau}}} = 15 + \frac{534 \times 10^3 \times 2,3 \times 10^3}{1 \times 10^3 \times 33 \times 4,18 \times 10^3} = 24^\circ\text{C} < 30^\circ\text{C}$$

La réglementation est respectée.