

Le rayonnement fossile, Mines Ponts PC 2009 physique I

corrigé proposé par Alain Dupont
Lycée Jean Perrin Lyon

I Expansion de l'Univers

1 A cause de la valeur finie de la célérité de la lumière, un objet céleste observé à la date t est vu tel qu'il était à la date $t-d/c$, où d est sa distance à la date d'émission de lumière par l'objet.

On le voit donc dans le passé, passé d'autant plus reculé que l'objet est éloigné de l'observateur.

2 $t' = t + r(t)/c$

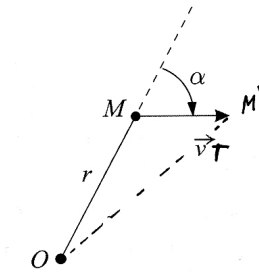


FIG. 1 – géométrie

3 $OM'^2 = OM^2 + MM'^2 + 2OM.MM' \cos\alpha$ soit $OM'^2 = OM^2 \left[1 + 2\frac{MM'}{OM} \cos\alpha + \frac{MM'^2}{OM^2} \right]$.

avec

- $OM = r(t)$

- $OM' = r(t+T)$

- $MM' = v.T \ll OM$

Par DL1 en $\frac{vT}{r(t)}$ on obtient $r(t+T) = r(t) \cdot \left(1 + \frac{v.T}{r(t)} \cos\alpha \right)$ d'où

$$r(t+T) - r(t) = v(t)T \cos\alpha$$

4 t' est la date de réception du signal émis à t .

t'' est la date de réception du signal émis à $t+T$ par la source alors située en M'

$t'' - t'$ est la période T' du signal perçue par l'observateur.

$t' = t + \frac{r(t)}{c}$ et $t'' = t + T + \frac{r(t+T)}{c}$ d'où, avec le résultat qui précède

$$T' = T \left(1 + \frac{v(t) \cos(\alpha)}{c} \right)$$

5 Avec $v \cos(\alpha) = v_r$, $\lambda = cT$ et $\lambda' = cT'$ on obtient immédiatement $\lambda' = \lambda \left(1 + \frac{v_r}{c} \right)$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \frac{v_r}{c}$$

Le redshift Z est donc la quantité $\frac{v_r}{c}$

6 Si M se rapproche de O alors $v_r < 0$ d'où $\lambda' < \lambda$

Le décalage se fait alors vers le bleu (blueshift), les longueurs d'onde du domaine optique augmentant continûment du bleu au rouge.

- 7 Une régression linéaire sur les couples (d,Z) donne un coefficient directeur k sensiblement égal à $6,68.10^{-27}m^{-1}$ avec un coefficient de corrélation d'environ 0,99.
 $\frac{v_r}{c} = k.d$ implique $v_r = k.c.d = H.d$ soit $H = k.c$. On en déduit

$$H \approx 2.10^{-18} m.s^{-1}/m$$

L'année lumière étant la distance parcourue dans le vide en un an par la lumière, on a :
 $1al \approx 3.10^8 \times 365,25 \times 24 \times 3600 \approx 9,467.10^{15}m$

d'où $1Mal \approx 9,467.10^{21}m$

Ainsi, en km/s par million d'al, $H \approx 2.10^{-21} \times 9,467.10^{21}$.

Le calcul donne ¹ $H \approx 19km.s^{-1}/Mal$

Les galaxies ont une vitesse radiale de récession proportionnelle à leur éloignement.

Une galaxie distante de 1Mal s'éloigne à 19 km/s.

Une galaxie distante de n Mal s'éloigne à $19 \times n$ km/s.

- 8 C'est l'ensemble de l'Univers qui est en expansion non centrée entraînant les galaxies.

En supposant qu'une galaxie à distance d s'est toujours éloignée à la même vitesse radiale depuis le big-bang elle s'est déplacée pendant la durée $d/v_r = 1/H$ qui est donc un ordre de grandeur de l'âge de l'Univers.

$1/H \approx \frac{1}{2.10^{-18}} \approx 5.10^{17} s \approx 15,8$ milliards d'années.

- 9 Energie cinétique de la galaxie : $E_c(t) = \frac{1}{2}m\dot{R}^2$

Energie potentielle de la galaxie : $E_p(t) = -GMm/R = -G\frac{4}{3}\pi R^3\rho.m/R$

Energie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - G\frac{4}{3}\pi R^3\rho.m/R$

soit

$$E_m = m(\frac{1}{2}\dot{R}^2 - G\frac{4}{3}\pi R^2\rho)$$

Avec $\dot{R} = H.R$ on a

$$E_m = mR^2(\frac{H^2}{2} - \frac{4\pi G\rho}{3})$$

Le système est dans un état lié si $E_m < 0$, dans le cas contraire la galaxie part à l'infini.

La condition $E_m < 0$ se traduit par $\frac{H^2}{2} - \frac{4\pi G\rho}{3} < 0$

soit

$$\rho > \frac{3H^2}{8\pi G}$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

- 10 L'application numérique conduit à $\rho_c \approx 7.10^{-27}kg.m^{-3}$

Selon les mesures actuelles $\rho < \rho_c$ donc l'Univers devrait se dilater indéfiniment.

II Le rayonnement fossile.

II A propriétés générales

- 11 Il s'agit d'ondes radio millimétriques. Ce rayonnement a été d'ailleurs accidentellement découvert par Penzias et Wilson en calibrant une antenne de radio-astronomie conçue pour travailler dans ce domaine spectral.

- 12 $\lambda_m.T = C^{ste}$ et on lit $\lambda_m \approx 1,1mm$ on en déduit :

$$T \approx \frac{2,9}{1,1} \approx 2,6K$$

- 13 $(\lambda_m.T)_{actuel} = (\lambda_m.T)_{origine}$ d'où $\frac{(\lambda_m)_{actuelle}}{(\lambda_m)_{origine}} = \frac{T_{origine}}{T_{actuelle}} \approx 1150$

L'Univers s'est donc dilaté d'environ un facteur 1100 depuis le début de la période radiative.

¹Les mesures du satellite WMAP en 2001 donnent $H = 71km/s/Mpc$, ce qui est cohérent avec notre résultat (1Mpc \approx 3,26Mal).

II B Propriétés thermodynamiques.

$$14 \quad w_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\frac{h\nu}{k_B T} - 1}$$

L'unité est le $J.m^{-3}.s$

Pour avoir la densité énergétique u on intègre $w_\nu(\nu, T)$ sur toutes les fréquences possibles.

$$u = \int_0^\infty w(\nu, T) d\nu$$

On pose $\frac{h\nu}{k_B T} = x \Rightarrow \nu = \frac{k_B T}{h} x$ et $d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$

$$\begin{aligned} u &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\frac{h\nu}{k_B T} - 1} \\ u &= \frac{8\pi h}{c^3} \times \frac{k_B^4 T^4}{h^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} \\ u &= \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \times \frac{\pi^4}{15} \end{aligned}$$

Identifiant avec $u = aT^\delta$ on obtient :

$$\delta = 4 \qquad a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3}$$

L'application numérique donne $a \approx 7,5.10^{-16} J.m^{-3}.K^{-4}$

$$15 \quad \text{Soit } U \text{ l'énergie interne de l'Univers : } U = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot u$$

On applique le premier principe à l'Univers pour une évolution infinitésimale de son rayon.

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Où δQ est le transfert thermique vers l'univers, nul (adiabaticité) et où δW est le travail élémentaire reçu égal à $-pdV$ (la pression p du système remplaçant la pression extérieure à cause du caractère quasi-statique de l'évolution).

NB : on peut se demander ce que représente la pression extérieure ici !

Par énoncé $p = u/3$ donc $dU = -\frac{u}{3}.dV = -\frac{u}{3}.4\pi R^2 dR$

Par ailleurs $dU = d(\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot u) = \frac{4}{3}\pi R^3 du + 4\pi R^2 dR \cdot u$

On a donc $-\frac{u}{3}.4\pi R^2 dR = \frac{4}{3}\pi R^3 du + 4\pi R^2 dR \cdot u$

On en déduit

$$\frac{R}{3} du + u dR = -\frac{u}{3} dR$$

soit $Rdu = -4udR$

Mais $u = a.T^4 \Rightarrow du = 4aT^3 dT$

En remplaçant u et du par ces expressions dans $Rdu = -4udR$ on obtient :

$$RdT = -TdR$$

c'est la différentielle de $T.R = C^{ste}$.

III La sonde Planck

$$16 \quad \text{Soit } A \text{ le centre d'inertie du système soleil-terre, } S \text{ le centre du soleil et } T \text{ celui de la terre.}$$

$$M_S \cdot \overline{AS} + M_T \cdot \overline{AT} = 0$$

d'où

$$-\frac{\overline{AS}}{M_T} = \frac{\overline{AT}}{M_S} = \frac{\overline{ST}}{M_S + M_T}$$

$$\overline{SA} = \overline{ST} \times \frac{M_T}{M_T + M_S}$$

$$SA = r \times \frac{M_T}{M_T + M_S}$$

Ceci peut encore s'écrire $SA = r \times \frac{M_T/M_S}{1+M_T/M_S}$

Le rapport M_T/M_S est numériquement égal à 3.10^{-6} avec les données de l'énoncé. On aura donc ainsi $SA \approx 3.10^{-6}.r$ soit $SA \approx 4470km$

On a un écart relatif à la distance terre-soleil de 3.10^{-6} en confondant A et S.

- 17 On applique le TRC à la terre, sur orbite circulaire de centre S et de rayon r, soumise à la seule force d'attraction gravitationnelle du soleil, dans \mathfrak{R} galiléen :

$$-G \frac{M_S M_T}{r^2} \hat{e}_r = -M_T \omega^2 r \hat{e}_r + M_T r \dot{\omega} \hat{e}_\theta$$

La base $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$ étant celle des coordonnées polaires.

Par projection sur \hat{e}_θ on en déduit que $\dot{\omega} = 0$ donc $\omega = C^{ste}$.

Par projection sur \hat{e}_r on en déduit que $\omega = \sqrt{\frac{G.M_S}{r^3}}$ et la période $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}$.

L'application numérique donne $T \approx 3,137.10^7 s$

- 18 \mathfrak{R}' non galiléen; on y applique le TRC à la sonde M en prenant en compte la force d'inertie d'entraînement, outre les attractions gravitationnelles de la terre et du soleil.

$$m \frac{d^2 \vec{SM}}{dt^2} = \vec{F}_{ie}(M) + \vec{F}_{S/M} + \vec{F}_{T/M}$$

$$\vec{F}_{ie}(M) = m\omega^2 r_S \hat{e}_r = -grad \left(-\frac{m\omega^2 r_S^2}{2} \right)$$

$$\vec{F}_{S/M} = -grad \left(-G.M_S.m/r_S \right)$$

$$\vec{F}_{T/M} = -grad \left(-G.M_T.m/r_T \right)$$

Finalement :

$$m \frac{d^2 \vec{SM}}{dt^2} = -grad \left(-\frac{m\omega^2 r_S^2}{2} - G.M_S.m/r_S - G.M_T.m/r_T \right)$$

Ainsi

$$E_p = -\frac{m\omega^2 r_S^2}{2} - G.M_S.m/r_S - G.M_T.m/r_T$$

(à une constante additive près qu'on prend nulle).

- 19 Sur la droite (ST) il y a trois positions de M où $\vec{F}_{ie}(M) + \vec{F}_{S/M} + \vec{F}_{T/M} = \vec{0}$.

- Au delà de T : la force d'inertie centrifuge orientée selon \hat{e}_x compense les attractions gravitationnelles orientées selon $-\hat{e}_x$: point de Lagrange L_2 .
- Entre S et T : la force d'inertie centrifuge orientée selon \hat{e}_x et la force gravitationnelle de la terre orientée aussi selon \hat{e}_x compensent la force d'attraction solaire orientée selon $-\hat{e}_x$: point de Lagrange L_1 .
- De l'autre côté du soleil par rapport à la terre : la force d'inertie centrifuge orientée selon $-\hat{e}_x$ compense les deux forces gravitationnelles orientées selon \hat{e}_x : point de Lagrange L_3 .

L'énergie potentielle E_p peut s'écrire, compte tenu de $\omega = \sqrt{\frac{G.M_S}{r^3}}$: $E_p = -G.M_S.m \left(\frac{1}{r_S} + \frac{M_T/M_S}{r_T} + \frac{r_S^2}{2r^3} \right)$.

Notons $k = M_T/M_S$ et exprimons $\frac{dE_p}{dr_S}$ et $\frac{d^2 E_p}{dr_S^2}$ pour chaque point de Lagrange.

- Pour L_1 on a $r_S = r - r_T$ d'où $dr_S = -dr_T$ et $\frac{dE_p}{dr_S} = -G.M_S.m \left(\frac{k}{r_T} - \frac{1}{r_S} + \frac{r_S}{r^3} \right)$

Cette dérivée première est nulle en L_1 puisque c'est une position d'équilibre.

$\frac{d^2 E_p}{dr_S^2} = -G.M_S.m \left(\frac{2k}{r_T^2} + \frac{2}{r_S^2} + \frac{1}{r^3} \right)$: toujours négative, y compris au point L_1 : l'équilibre y est donc instable pour tout déplacement selon x .

- pour L_2 on a $r_S = r + r_T$ et donc $dr_S = dr_T$

$$\frac{dE_p}{dr_S} = -G.M_S.m \left(-\frac{k}{r_T^2} - \frac{1}{r_S^2} + \frac{r_S}{r^3} \right)$$

$$\frac{d^2 E_p}{dr_S^2} = -G.M_S.m \left(\frac{2k}{r_T^2} + \frac{2}{r_S^2} + \frac{1}{r^3} \right) \text{ toujours négatif.}$$

On en déduit que l'équilibre en L_2 est instable pour tout déplacement selon x .

- pour L_3 on a $r_T = r + r_S$ et donc encore $dr_T = dr_S$: le même calcul que pour L_2 montre que l'équilibre est également instable en L_3 pour tout déplacement selon x .

20 On reprend l'expression de $\frac{dE_P}{dr_S}$ pour L_2 : cette quantité est nulle pour $r_T = \ell$, avec $r_S = \ell + r$.

$$0 = -G.M_S.m.\left(-\frac{k}{\ell^2} - \frac{1}{(r+\ell)^2} + \frac{r+\ell}{r^3}\right)$$

L'équation cherchée est donc :

$$-\frac{k}{\ell^2} - \frac{1}{(r+\ell)^2} + \frac{r+\ell}{r^3} = 0$$

Si $\ell \ll r$, $\frac{1}{(r+\ell)^2} \approx \frac{1}{r^2} \cdot (1 - 2\frac{\ell}{r})$

L'équation précédente devient

$$-\frac{k}{\ell^2} - \frac{1}{r^2} \cdot (1 - 2\frac{\ell}{r}) + \frac{1}{r^2} \cdot (1 + \frac{\ell}{r}) = 0$$

Soit

$$\frac{k}{\ell^2} = 3\frac{\ell}{r^3} \text{ d'où } \ell \approx r \sqrt[3]{\frac{k}{3}}$$

Finalement

$$\ell \approx r \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}$$

l'application numérique donne $\ell \approx 10^{-2} \cdot r$ soit $\ell \approx 1,49.10^9$ km.

21 Au voisinage de L_2 et sur l'axe x'x on $r_S = r + \ell + \epsilon$ et $r_T = \ell + \epsilon$

On reprend l'écriture du TRC appliqué à la sonde dans \mathcal{R}' : $m \frac{d^2 \vec{SM}}{dt^2} = \vec{F}_{ie}(M) + \vec{F}_{S/M} + \vec{F}_{T/M}$
soit, compte tenu de ce qui précède

$$m \frac{d^2(l+r+\epsilon)}{dt^2} = G.M_S.m.\left(-\frac{k}{(\ell+\epsilon)^2} - \frac{1}{(r+\ell+\epsilon)^2} + \frac{r+\ell+\epsilon}{r^3}\right)$$

$$m \frac{d^2\epsilon}{dt^2} = G.M_S.m.\left(-\frac{k}{\ell^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{\ell}\right)^{-2} - \frac{1}{(r+\ell)^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{r+\ell}\right)^{-2} + \frac{\epsilon}{r^3} + \frac{r+\ell}{r^3}\right)$$

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} = G.M_S.\left(-\frac{k}{\ell^2} \left(1 - \frac{2\epsilon}{\ell}\right) - \frac{1}{(r+\ell)^2} \left(1 - \frac{2\epsilon}{r+\ell}\right) + \frac{\epsilon}{r^3} + \frac{r+\ell}{r^3}\right)$$

or (équilibre en L_2)

$$-\frac{k}{\ell^2} - \frac{1}{(r+\ell)^2} + \frac{r+\ell}{r^3} = 0$$

il reste donc

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} = G.M_S.\left(\frac{\epsilon}{r^3} + 2\frac{\epsilon}{(r+\ell)^3} + 2\frac{k\epsilon}{\ell^3}\right)$$

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} = G.M_S.\left(\frac{1}{r^3} + 2\frac{1}{(r+\ell)^3} + 2\frac{k}{\ell^3}\right).\epsilon$$

La parenthèse peut se simplifier par DL1 en ℓ/r , en

$$\frac{1}{r^3} + \frac{2}{r^3} \cdot (1 - 3\frac{\ell}{r}) + 2\frac{k}{\ell^3} \approx \frac{3}{r^3} + 2\frac{k}{\ell^3} \quad \text{où} \quad \ell^3 = k \cdot \frac{r^3}{3}$$

d'où

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} = G.M_S.\left(\frac{9}{r^3}\right).\epsilon$$

Posons $\frac{9GM_S}{r^3} = \frac{1}{\tau^2}$, soit $\tau = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{r^3}{GM_S}}$, l'équation différentielle vérifiée par ϵ s'écrit

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} - \frac{\epsilon}{\tau^2} = 0$$

Les solutions sont du type $\epsilon = \beta.exp \frac{t}{\tau} + \gamma.exp - \frac{t}{\tau}$

Sous l'influence d'une perturbation la sonde s'éloigne de L_2 avec une durée caractéristique τ . Au bout de cette durée il faudra réajuster sa position.

NB : $\tau = \frac{1}{3\omega}$ où ω est la vitesse angulaire calculée au 17, soit $\tau = \frac{T}{6\pi}$

Numériquement on trouve $\tau \approx 1,66.10^6 s$ soit environ 19,3 jours.

IV Pression de radiation.

22

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\omega}$$

$$\vec{B}_i = \frac{1}{\omega} (k \cos \theta \hat{e}_x + k \sin \theta \hat{e}_y) \times E_{0i} \hat{e}_z \exp j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})$$

Tenant compte de $k = \frac{\omega}{c}$ (relation de dispersion), on a :

$$\vec{B}_i = \frac{E_{0i}}{c} (\sin \theta \hat{e}_x - \cos \theta \hat{e}_y) . \exp j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})$$

23 Dans un conducteur ohmique le champ électromagnétique n'existe que dans une pellicule d'épaisseur $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ localisée à la surface du conducteur (effet de peau) où σ est la conductivité électrique du conducteur considéré.

Ici on a σ infinie (conducteur parfait) et donc $\delta = 0$: Il n'y a pas de champ électromagnétique dans le conducteur ohmique parfait.

On écrit la relation de passage en $x=0$ pour le champ électrique : continuité de la composante parallèle au conducteur

$(\vec{E})_{//}$ continue en $x=0$.

$(\vec{E}_i + \vec{E}_r) \cdot \hat{e}_z = 0$ en $x=0$.

$$E_{0i} \exp j(\omega t - k_{ix}x - k_{iy}y) + \hat{e}_z \cdot \vec{E}_{0r} \exp j(\omega_r t - k_{rx}x - k_{ry}y - k_{rz}z) = 0 \quad \forall t, y, z,$$

$$E_{0i} \exp j(\omega t - k_{iy}y) + \hat{e}_z \cdot \vec{E}_{0r} \exp j(\omega_r t - k_{ry}y - k_{rz}z) = 0 \quad \forall t, y, z,$$

$$E_{0i} \exp(j\omega t) \cdot \exp - j(k_{iy}y) = -\hat{e}_z \cdot \vec{E}_{0r} \exp j(\omega_r t) \cdot \exp - (jk_{ry}y - k_{rz}z) \quad \forall t, y, z$$

En identifiant les termes en t on en déduit immédiatement que $\omega_r = \omega$: la réflexion a lieu sans changement de fréquence.

En identifiant les termes en z on en déduit que $k_{rz} = 0$.

En identifiant les termes en y on en déduit que $k_{ry} = k_{iy} = k \sin \theta$.

Par ailleurs $\|\vec{k}_r\| = \|\vec{k}_i\| = k = \frac{\omega}{c}$

Comme $k_{rx}^2 + k_{ry}^2 = k^2$ on en déduit $k_{rx}^2 = k^2 \cos^2 \theta$ d'où $k_{rx} = \pm k \cos \theta$

Le signe + est à exclure (sinon l'onde réfléchie entrerait dans le conducteur) et donc $k_{rx} = -k \cos \theta$

Finalement

$$k_{rx} = -k \cos \theta \quad k_{ry} = k \sin \theta \quad k_{rz} = 0$$

\vec{k}_r est antisymétrique de \vec{k}_i par rapport à la normale au point d'incidence : on retrouve les lois de la réflexion de Descartes (les lignes du champ du vecteur d'onde étant les rayons lumineux).

24 On reprend $E_{0i} \exp j(\omega t - k_{iy}y) + \hat{e}_z \cdot \vec{E}_{0r} \exp j(\omega_r t - k_{ry}y) = 0 \quad \forall t, y, z,$

Compte tenu de ce qui précède on a $E_{0i} = -\hat{e}_z \cdot \vec{E}_{0r}$

soit

$$\vec{E}_{0r} = -\vec{E}_{0i} \cdot \hat{e}_z$$

Finalement

$$\underline{\vec{E}}_r = -E_{0i}\hat{e}_z \exp j(\omega t + k\cos\theta x - k\sin\theta y)$$

Champ magnétique associé

$$\begin{aligned}\underline{\vec{B}}_r &= \frac{\vec{k}_r \times \underline{\vec{E}}_r}{\omega} \\ \underline{\vec{B}}_r &= \frac{-k\cos\theta\hat{e}_x + k\sin\theta\hat{e}_y}{\omega} \times -E_{0i}\hat{e}_z \exp j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM}) \\ \underline{\vec{B}}_r &= -\frac{E_{0i}}{c} \cdot (-\cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_y) \times \hat{e}_z \cdot \exp j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})\end{aligned}$$

Finalement

$$\underline{\vec{B}}_r = -\frac{E_{0i}}{c} \cdot (\sin\theta\hat{e}_x + \cos\theta\hat{e}_y) \cdot \exp j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})$$

avec $\vec{k}_r \cdot \vec{OM} = -k\cos\theta x + k\sin\theta y$

25 – calcul du champ électrique pour $x < 0$:

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}} &= \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r \\ \underline{\vec{E}} &= E_{0i}\hat{e}_z \exp j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM}) - E_{0i}\hat{e}_z \exp j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM}) \\ \underline{\vec{E}} &= E_{0i}\hat{e}_z \exp j\omega t \cdot (\exp(-j\vec{k}_i \cdot \vec{OM}) - \exp(-j\vec{k}_r \cdot \vec{OM}))\end{aligned}$$

on a $\vec{k}_r \cdot \vec{OM} = -k\cos\theta x + k\sin\theta y$ et $\vec{k}_i \cdot \vec{OM} = k\cos\theta x + k\sin\theta y$
d'où

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}} &= E_{0i}\hat{e}_z e^{j\omega t} \cdot [e^{-jk\cos\theta x} \cdot e^{-jk\sin\theta y} - e^{jk\cos\theta x} \cdot e^{-jk\sin\theta y}] \\ \underline{\vec{E}} &= E_{0i}\hat{e}_z e^{j\omega t} \cdot e^{-jk\sin\theta y} \cdot [e^{-jk\cos\theta x} - e^{jk\cos\theta x}] \\ \underline{\vec{E}} &= -2jE_{0i}\hat{e}_z e^{j(\omega t - k\sin\theta y)} \cdot \sin k\cos\theta x \\ \underline{\vec{E}} &= 2E_{0i}\hat{e}_z e^{j(\omega t - k\sin\theta y - \frac{\pi}{2})} \cdot \sin k\cos\theta x\end{aligned}$$

On prend la partie réelle :

$$\vec{E} = 2E_{0i}\hat{e}_z \sin(\omega t - k\sin\theta y) \cdot \sin k\cos\theta x$$

– calcul du champ magnétique pour $x < 0$

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_i + \underline{\vec{B}}_r$$

avec

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{E_{0i}}{c} (\sin\theta\hat{e}_x - \cos\theta\hat{e}_y) e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})} \text{ et } \underline{\vec{B}}_r = -\frac{E_{0i}}{c} (\sin\theta\hat{e}_x + \cos\theta\hat{e}_y) e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_{0i}}{c} e^{j\omega t} \left[(\sin\theta\hat{e}_x - \cos\theta\hat{e}_y) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{OM}} - (\sin\theta\hat{e}_x + \cos\theta\hat{e}_y) e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{OM}} \right]$$

Isolons les deux composantes

$$\begin{aligned}\underline{B}_x &= \frac{E_{0i}}{c} e^{j\omega t} \sin\theta (e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{OM}} - e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{OM}}) \\ \underline{B}_y &= -\frac{E_{0i}}{c} e^{j\omega t} \cos\theta (e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{OM}} + e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{OM}}) \\ \underline{B}_x &= \frac{E_{0i}}{c} e^{j\omega t} \sin\theta [e^{-jk\sin\theta y} (e^{-jk\cos\theta x} - e^{jk\cos\theta x})] \\ \underline{B}_y &= -\frac{E_{0i}}{c} e^{j\omega t} \cos\theta [e^{-jk\sin\theta y} (e^{-jk\cos\theta x} + e^{jk\cos\theta x})]\end{aligned}$$

$$\underline{B}_x = -2j \frac{E_{0i}}{c} \sin\theta \sin(k\cos\theta x) \cdot e^{j(\omega t - k\sin\theta y)}$$

$$\underline{B}_y = -2 \frac{E_{0i}}{c} \cos\theta \cdot \cos(k\cos\theta x) \cdot e^{j(\omega t - k\sin\theta y)}$$

On prend les parties réelles

$$B_x = 2 \frac{E_{0i}}{c} \sin\theta \sin(k\cos\theta x) \cdot \sin(\omega t - k\sin\theta y)$$

$$B_y = -2 \frac{E_{0i}}{c} \cos\theta \cdot \cos(k\cos\theta x) \cdot \cos(\omega t - k\sin\theta y)$$

26 Soit w l'énergie magnétique volumique : $w = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 + B_y^2)$
Notant $\langle w \rangle$ la moyenne temporelle de w , on a

$$\langle w \rangle = \epsilon_0 \frac{\langle E^2 \rangle}{2} + \frac{1}{2\mu_0} (\langle B_x^2 \rangle + \langle B_y^2 \rangle)$$

or, la moyenne de $\sin^2()$ et celle de $\cos^2()$ valant respectivement $\frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} - & \quad \langle E^2 \rangle = 2E_{0i}^2 \cdot \sin^2(k\cos\theta x) \\ - & \quad \langle B_x^2 \rangle = 2 \frac{E_{0i}^2}{c^2} \sin^2(\theta) \sin^2(k\cos\theta x) \\ - & \quad \langle B_y^2 \rangle = 2 \frac{E_{0i}^2}{c^2} \cos^2(\theta) \cos^2(k\cos\theta x) \end{aligned}$$

d'où

$$\langle w \rangle = \epsilon_0 E_{0i}^2 \cdot \sin^2(k\cos\theta x) + \frac{E_{0i}^2}{\mu_0 c^2} [\sin^2(\theta) \sin^2(k\cos\theta x) + \cos^2(\theta) \cos^2(k\cos\theta x)]$$

on prend maintenant la moyenne spatiale, en tenant compte de $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$.

$$u = \epsilon_0 E_{0i}^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{\cos^2\theta}{2} \right] = \epsilon_0 E_{0i}^2$$

l'expression de u est indépendante de θ .

27 relation de passage en $x=0$ pour le champ magnétique :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\vec{B}_{x>0} - \vec{B}_{x<0}) &= \mu_0 \vec{j}_s \times \hat{e}_x \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\vec{0} - \vec{B}_{x<0}) &= \mu_0 \vec{j}_s \times \hat{e}_x \\ -\lim_{x \rightarrow 0} \vec{B}_{x<0} &= \mu_0 \vec{j}_s \times \hat{e}_x \end{aligned}$$

or $\lim(B_x)_{x \rightarrow 0} = 0$ et $\lim(B_y)_{x \rightarrow 0} = -2 \frac{E_{0i}}{c} \cos\theta \cdot \cos(\omega t - k\sin\theta y)$

d'où

$$\begin{aligned} 2 \frac{E_{0i}}{c} \cos\theta \cdot \cos(\omega t - k\sin\theta y) \hat{e}_y &= \mu_0 \vec{j}_s \times \hat{e}_x \\ \hat{e}_x \times (2 \frac{E_{0i}}{c} \cos\theta \cdot \cos(\omega t - k\sin\theta y) \hat{e}_y) &= \mu_0 \hat{e}_x \times (\vec{j}_s \times \hat{e}_x) \end{aligned}$$

on a donc finalement

$$\vec{j}_s = 2 \frac{E_{0i}}{\mu_0 c} \cos\theta \cdot \cos(\omega t - k\sin\theta y) \hat{e}_z$$

28

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{j}_s dS \times \vec{B}$$

Il s'agit de la force de Laplace subie par l'élément de courant $\vec{j}_s dS$ placé dans le champ magnétique \vec{B} .

En effet, en un point situé dans le domaine $x < 0$ et infiniment proche de la surface dS, le champ magnétique peut s'écrire :

$\vec{B} = \vec{B}' + \vec{B}''$ où \vec{B}' est le champ créé par la nappe dS parcourue par \vec{j}_S et où \vec{B}'' est celui créé par le reste du plan $x=0$.

L'élément dS est donc placé dans le champ \vec{B}'' et subit $d\vec{F} = \vec{j}_S dS \times \vec{B}''$

Or une nappe plane infinitésimale dS parcourue par \vec{j}_S crée à une distance infinitésimale d'ordre supérieur le même champ \vec{B}' que celui qu'une nappe de courant plane infinie crée à distance finie.

Un calcul classique (théorème d'Ampère dans l'ARQP) donne $\vec{B}' = -\frac{1}{2} \cdot \mu_0 \vec{j}_S \times \hat{e}_x$

Or $\vec{B} = -\mu_0 \vec{j}_S \times \hat{e}_x$ donc $\vec{B}' = \frac{\vec{B}}{2}$ et $\vec{B}'' = \frac{\vec{B}}{2}$ d'où l'expression de la force de Laplace donnée par l'énoncé.

$$\frac{d\vec{F}}{dS} \cdot \hat{e}_x = \frac{1}{2} \cdot (j_S \hat{e}_z \times B_y(x=0) \hat{e}_y) \cdot \hat{e}_x$$

$$\frac{d\vec{F}}{dS} \cdot \hat{e}_x = \frac{1}{2} \left[\frac{2E_{0i}}{\mu_0 c} \cos\theta \cos(\omega t - k \sin\theta y) \hat{e}_z \times \left(-\frac{2E_{0i}}{\mu_0 c} \cos\theta \cos(\omega t - k \sin\theta y) \hat{e}_y \right) \right] \hat{e}_x$$

$$\frac{d\vec{F}}{dS} \cdot \hat{e}_x = \frac{2E_{0i}^2 \cos^2\theta}{\mu_0 c^2} \cdot \cos^2(\omega t - k \sin\theta y) = \Pi_\theta$$

on en prend la moyenne temporelle

$$\langle \Pi_\theta \rangle = \frac{E_{0i}^2 \cos^2\theta}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0 E_{0i}^2 \cos^2\theta = p_\theta$$

29 $\frac{k_x}{k} = \cos\theta$ et $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ soit $(\frac{k_x}{k})^2 + (\frac{k_y}{k})^2 + (\frac{k_z}{k})^2 = 1$

Or en moyenne spatiale (notée par ex. $\mathcal{L}()$) on a $\mathcal{L}(\frac{k_x}{k})^2 \mathcal{L} = \mathcal{L}(\frac{k_y}{k})^2 \mathcal{L} = \mathcal{L}(\frac{k_z}{k})^2 \mathcal{L} = \frac{1}{3}$

d'où $\mathcal{L} \cos^2\theta \mathcal{L} = \frac{1}{3}$

$$p = \frac{\epsilon_0 E_{0i}^2}{3}$$

Avec le résultat de la question 26 on a bien $p = \frac{u}{3}$.

30 La prise des moyennes temporelles élimine ω des relations donnant u et p, qui restent donc les mêmes pour toute fréquence et donc en lumière polychromatique.