CORRECTION EXERCICE 3 : Pogo Stick ou bâton sauteur

Préliminaires :
Allongement du ressort égal $\dfrac{mg}{k}$. On en déduit $k = 4,0 \times 10^4\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

1. À l'instant initial, le sommet du ressort se trouve à une hauteur initiale $h = 2l_0$ par rapport au sol et l'ensemble a une vitesse nulle.
   La conservation de l'énergie mécanique du système (pas de force non conservative) entre $t = 0$ (vitesse nulle et ressort à vide) et l'instant t_2 où le ressort est de longueur minimale (vitesse nulle à nouveau) donne
   $$\frac{1}{2}k\left(l_{\mathrm{min}} - l_0\right)^2 = mg\left(h - l_{\mathrm{min}}\right)$$
   $L = l_{\mathrm{min}} - l_0$ vérifie donc l'équation du second degré
   $$L^2 + \frac{2mg}{k}L - \frac{2mg}{k}(h - l_0) = 0$$
   ou, en posant la grandeur adimensionnée $\alpha = \dfrac{mg}{kl_0}$
   $$L^2 + 2\alpha l_0 L - 2\alpha l_0 (h - l_0) = 0$$
   Numériquement[1] :
   $$L^2 + 0,04L - 0,008 = 0$$
   dont la seule solution négative est $L = -0,11$ m, c'est-à-dire $-0,56l_0$. On en déduit
   $$l_{\mathrm{min}} = 0,44l_0 = 8,9\ \mathrm{cm}$$
   Remarque : valeur raisonnable laissant penser que le ressort a certainement, à tout moment, un comportement linéaire. Ce ne serait plus le cas pour des compressions plus importantes.
2. *Dans cette question, on n'attend pas que le candidat se contente de calculs. Il est même souhaitable d'en abréger certains lorsque le raisonnement est bien posé et que toutes les équations nécessaires sont écrites ; c'est pour cette raison que j'ai proposé uniquement un cas particulier. L'étude complète permettant de voir le rôle du facteur α et du facteur $K = h/l_0$ – ce que j'avais initialement prévu – s'avère assez lourde et pas adaptée à un oral. Il apparaît notamment des situations « embarrassantes » où la vitesse de descente n'est pas nulle au moment où la longueur du ressort s'annule ! C'est ce qui arrive quand h/l_0 est trop grand ou/et que α est trop grand (sauteur trop lourd, ressort trop mou). Bref, des questions intéressantes à poser aux bons candidats qui auraient fini l'exercice assez tôt...*
   On attend donc des candidats l'analyse qualitative préalable suivante :
   – le mouvement descendant s'effectue en deux phases : la chute libre (ressort à vide sans contact avec le sol) suivi de la phase de compression du ressort jusqu'à une longueur minimale l_{min}.
   – le mouvement ascendant totalement symétrique du précédent donc de même durée.
   Il suffit donc d'évaluer les durées des deux phases lors de la descente.

   Phase de chute libre de hauteur $h - l_0$ qui dure donc
   $$\tau_1 = \sqrt{\frac{2(h - l_0)}{g}} = 0,20\ \mathrm{s}$$
   À l'issue de cette phase, la vitesse du système complet est
   $$v_0 = \sqrt{2g(h - l_0)} = 2,0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

1. Les résultats littéraux figurent à la fin du corrigé.

Phase de compression au cours de laquelle l'équation du mouvement de l'extrémité supérieure du ressort (on suppose que l'utilisateur est fixe par rapport au bâton : pas de flexion par exemple) est, en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \approx 22,4\ \mathrm{s}^{-1}$ et $z_{eq} = l_0 - \dfrac{mg}{k} = l_0(1-\alpha)$:

$$\ddot{z} + \omega_0^2(z - z_{eq}) = 0$$

La solution générale de cette équation est, en notant $t' = t - \tau_1$ (le ressort touche le sol à $t' = 0$) :

$$z(t') - z_{eq} = A\cos\omega_0 t' + B\sin\omega_0 t'$$

Les conditions initiales sont $z(t'=0) = l_0$ et $\dot{z}(t'=0) = -v_0$.
On en déduit $A = l_0 - z_{eq} = l_0\alpha$ et $B = -v_0/\omega_0$ soit :

$$z(t') = l_0(1-\alpha) + l_0\alpha\cos\omega_0 t' - \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t'$$

La durée τ_2 de cette phase vérifie donc $z(\tau_2) = l_{\min}$ soit

$$\alpha\cos\omega_0\tau_2 - \frac{v_0}{l_0\omega_0}\sin\omega_0\tau_2 + (1-\alpha) - \frac{l_{\min}}{l_0} = 0$$

Numériquement :

$$0,1\cos\omega_0\tau_2 - 0,45\sin\omega_0\tau_2 + 0,46 = 0$$

La calculatrice suffit pour résoudre graphiquement et on trouve

$$\omega_0\tau_2 \approx 1,8$$

donc

$$\tau_2 \approx 8,0 \times 10^{-2}\ \mathrm{s}$$

La période du mouvement est donc $2(\tau_1 + \tau_2) = 0,56$ s.
La période précédente mène à 107 sauts par minute. La modélisation semble satisfaisante puisque $39 < 107 < 257$.

Remarque : la durée de la phase de compression peut également être évaluée en écrivant la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k\,(z - l_0)^2 + mgz = mgh$$

Durant cette compression, $\dot{z} < 0$ donc

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{f(z)}$$

où $f(z) = 2g(h-z) - \omega_0^2(z-l_0)^2$.
Finalement

$$\tau_2 = -\int_{l_0}^{l_{\min}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{f(z)}} = \int_{l_{\min}}^{l_0} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{f(z)}}$$

Le calcul mené par Maple donne bien $\tau_2 \approx 8,0 \times 10^{-2}$ s.

Expressions littérales

Dans la question 1, posons $x = \frac{L}{l_0}$; x vérifie l'équation du second degré

$$x^2 + 2\alpha x - 2\alpha(K-1) = 0$$

de solution (négative) $x = -\alpha\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}(K-1)}\right)$ donc

$$\frac{l_{\min}}{l_0} = 1 - \alpha\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}(K-1)}\right)$$

La durée τ_1 s'écrit $\tau_1 = \sqrt{\frac{2l_0}{g}(K-1)}$ et la vitesse $v_0 = \sqrt{2gl_0(K-1)}$ et la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\alpha l_0}}$.

La durée τ_2 est solution de

$$\cos(\omega_0\tau_2) - \frac{v_0}{l_0\alpha\omega_0}\sin(\omega_0\tau_2) + \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}(K-1)} = 0$$

soit

$$\cos(\omega_0\tau_2) - \sqrt{\frac{2(K-1)}{\alpha}}\sin(\omega_0\tau_2) + \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}(K-1)} = 0$$

On peut résoudre cette équation pour différents couples (K, α) à condition de s'assurer que $l_{\min} > 0$ qui donne, après calculs, la condition $2\alpha K < 1$.