

CONCOURS D'ADMISSION 2011 - COMPOSITION DE PHYSIQUE - B (XELC)

ACTIVITÉ OPTIQUE

Corrigé proposé par P. PIQUEMAL et R. SKRZYPEK

I Introduction

- I.1. • Afin d'obtenir une lumière quasi-monochromatique, on peut utiliser :
- (a) un laser ;
 - (b) une source de lumière blanche suivie d'un filtre interférentiel (bande passante de l'ordre de 10 nm).
- Afin de réaliser une source de lumière monochromatique polarisée rectilignement, on peut utiliser :
- (a) certains lasers polarisés rectilignement ;
 - (b) un polariseur que l'on placera derrière la source de lumière monochromatique ; attention dans ce cas à la bande passante du polariseur.
- I.2. On place la cuve de longueur ℓ contenant la substance optiquement active entre polariseur et analyseur croisés (extinction avec la cuve vide). Avec la cuve remplie, la lumière réapparaît. Pour obtenir à nouveau une extinction, il faut tourner l'analyseur dans un certain sens et d'un certain angle noté α ici (sens des aiguilles d'une montre : matériau dextrogyre ; sens inverse : matériau lévogyre).

II Théorie de FRESNEL : notion de biréfringence circulaire

- II.1. La polarisation du champ électrique :
- si $\vec{E}_0(E_{0x}, E_{0y}, 0)$ où E_{0x} et E_{0y} sont réels, est **rectiligne** puisque le champ électrique garde une direction constante dans le plan d'onde.
 - si $\vec{E}_0\left(\frac{E_{0x}}{2}, \frac{E_{0y}}{2}, 0\right)$ où $\frac{E_{0x}}{2}$ et $\frac{E_{0y}}{2}$ sont des complexes quelconques, est **elliptique** puisque l'extrémité du vecteur champ électrique décrit une ellipse dans le plan d'onde en une période.
 - si $\vec{E}_0(E_0, iE_0, 0)$ où E_0 est réel positif, est **circulaire gauche** puisque l'extrémité du vecteur champ électrique décrit un cercle dans le plan d'onde en une période, ce cercle étant décrit dans le sens trigonométrique.
 - si $\vec{E}_0(E_0, -iE_0, 0)$ où E_0 est réel positif, est **circulaire droite**.
- II.2. On peut décomposer une onde polarisée rectilignement en deux ondes polarisées (respectivement) circulairement gauche et droite. Cela donne dans le vide avec E_0 réel positif :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_0 \cos(kz - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(kz - \omega t) \\ -\frac{E_0}{2} \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(kz - \omega t) \\ \frac{E_0}{2} \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- II.3. • En inversant le système :

$$n_0 = \frac{n_g + n_d}{2} \quad \text{et} \quad \delta n = \frac{n_d - n_g}{2}$$

on obtient :

$$\boxed{n_d = n_0 + \delta n \quad \text{et} \quad n_g = n_0 - \delta n}$$

- Dans le milieu optiquement actif, l'onde polarisée circulairement gauche se propage avec une projection du vecteur d'onde selon \vec{e}_z : $k_g = n_g \omega / c$ et l'onde polarisée circulairement droite se propage avec une projection du vecteur d'onde selon \vec{e}_z : $k_d = n_d \omega / c$.

En $z = \ell$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z = \ell) &= \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(k_g \ell - \omega t) \\ -\frac{E_0}{2} \sin(k_g \ell - \omega t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(k_d \ell - \omega t) \\ \frac{E_0}{2} \sin(k_d \ell - \omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \vec{E}(z = \ell) &= \begin{bmatrix} E_0 \cos\left(\frac{k_g + k_d}{2} \ell - \omega t\right) \cos\left(\frac{k_d - k_g}{2} \ell\right) \\ E_0 \cos\left(\frac{k_g + k_d}{2} \ell - \omega t\right) \sin\left(\frac{k_d - k_g}{2} \ell\right) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}(z = \ell) = E_0 \cos\left(\frac{k_g + k_d}{2}\ell - \omega t\right) \vec{u} = E_0 \cos\left(\frac{n_0\omega}{c}\ell - \omega t\right) \vec{u} \text{ où } \vec{u} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta n\omega}{c}\ell\right) \\ \sin\left(\frac{\delta n\omega}{c}\ell\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il s'agit donc d'une polarisation rectiligne selon \vec{u} à la sortie du milieu. Or l'onde était initialement polarisée rectilignement selon \vec{e}_x donc la polarisation rectiligne a tourné d'un angle $\alpha = \frac{\delta n\omega}{c}\ell[\pi]$.

On a bien montré que le plan de polarisation de l'onde a tourné d'un angle :

$$\alpha = \frac{\omega}{2c} (n_d - n_g) \ell \quad [\pi]$$

II.4. Première méthode : Par réflexion sur le miroir parfait, l'onde polarisée circulairement gauche devient circulaire droite et l'onde polarisée circulairement droite devient circulaire gauche. Par conséquent, n_d devient n_g et vice versa donc l'angle α à l'aller est compensé par l'angle $-\alpha$ au retour et l'angle en $z = 0$ est nul (cas de la figure 2.a.).

III Biréfringence circulaire induite ou effet FARADAY

III.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

III.1.1. On peut appliquer la relation fondamentale de la dynamique au barycentre M de chaque nuage électronique.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\omega_1^2 \vec{OM} - e\vec{E}(M, t) - e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

En projetant sur les trois axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -m\omega_1^2 x - eE_0 \cos(k_g z - \omega t) - eB_0 \dot{y} \\ m\ddot{y} = -m\omega_1^2 y + eE_0 \sin(k_g z - \omega t) + eB_0 \dot{x} \\ m\ddot{z} = -m\omega_1^2 z \end{cases}$$

III.1.2. Remplaçons par $x(t) = a \cos(\varphi - \omega t)$ et $y(t) = -a \sin(\varphi - \omega t)$ dans les deux premières équations du système précédent :

$$\begin{cases} -m\omega^2 a \cos(\varphi - \omega t) = -m\omega_1^2 a \cos(\varphi - \omega t) - eE_0 \cos(\varphi - \omega t) - eB_0 a \omega \sin(\varphi - \omega t) \\ m\omega^2 a \sin(\varphi - \omega t) = m\omega_1^2 a \sin(\varphi - \omega t) + eE_0 \sin(\varphi - \omega t) + eB_0 a \omega \cos(\varphi - \omega t) \end{cases}$$

Chacune des deux équations mène à :

$$a = \frac{-eE_0}{m\omega_1^2 - m\omega^2 + eB_0\omega}$$

III.1.3. Par définition du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M, t) = -Ne\vec{v} = -Ne\dot{x}\vec{e}_x - Ne\dot{y}\vec{e}_y$

$$\vec{j}(M, t) = -Nea\omega \sin(\varphi - \omega t)\vec{e}_x - Nea\omega \cos(\varphi - \omega t)\vec{e}_y$$

III.1.4. Comme $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(k_g z - \omega t)\vec{e}_x - E_0 \sin(k_g z - \omega t)\vec{e}_y$, il vient $\text{div}\vec{E} = 0$.

En appliquant la relation du double rotationnel, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday et en exploitant l'indépendance des variables d'espace et de temps, il vient :

$$\underbrace{\text{rot} \left(\underbrace{\text{rot} \vec{E}}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \right)}_{-\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{B})} = \text{grad} \left(\underbrace{\text{div} \vec{E}}_{=0} \right) - \Delta \vec{E}$$

L'équation de Maxwell-Ampère : $\text{rot} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$, permet alors de conclure :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

III.1.5. Comme $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k_g^2 \vec{E}$, en utilisant l'équation de propagation obtenue à la question III.1.4 et l'expression du vecteur densité de courant obtenue à la question III.1.3, il vient :

$$\vec{E} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) = \mu_0 N e a \omega^2 \cos(\varphi - \omega t) \vec{e}_x - \mu_0 N e a \omega^2 \sin(\varphi - \omega t) \vec{e}_y$$

En utilisant l'expression du champ électrique imposée par l'énoncé, il vient :

$$(1 - n_g^2) \frac{\omega^2}{c^2} E_0 \cos(\varphi - \omega t) \vec{e}_x - (1 - n_g^2) \frac{\omega^2}{c^2} E_0 \sin(\varphi - \omega t) \vec{e}_y = \mu_0 N e a \omega^2 \cos(\varphi - \omega t) \vec{e}_x - \mu_0 N e a \omega^2 \sin(\varphi - \omega t) \vec{e}_y$$

En projetant selon \vec{e}_x :

$$(1 - n_g^2) \frac{\omega^2}{c^2} E_0 = \mu_0 N e a \omega^2 \frac{-e E_0}{m \omega_1^2 - m \omega^2 + e B_0 \omega} = - \frac{\mu_0 N e^2 \omega^2 E_0}{m \omega_1^2 - m \omega^2 + e B_0 \omega}$$

$$\Rightarrow (1 - n_g^2) = - \frac{N e^2}{m \epsilon_0 (\omega_1^2 - \omega^2 + \frac{\omega e B_0}{m})}$$

Finalement :

$$n_g^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 + \omega_c \omega - \omega^2} \quad \text{où} \quad \boxed{\omega_c = \frac{e B_0}{m} \text{ et } \omega_p^2 = \frac{N e^2}{m \epsilon_0}}$$

III.1.6. Le champ électrique polarisé circulairement droit a pour expression :

$$\vec{E}_d(M, t) = E_0 \cos(k_d z - \omega t) \vec{e}_x + E_0 \sin(k_d z - \omega t) \vec{e}_y \quad \text{où} \quad k_d = n_d \frac{\omega}{c}$$

tandis que le champ électrique polarisé circulairement gauche a pour expression :

$$\vec{E}_g(M, t) = E_0 \cos(k_g z - \omega t) \vec{e}_x - E_0 \sin(k_g z - \omega t) \vec{e}_y \quad \text{où} \quad k_g = n_g \frac{\omega}{c}$$

On passe formellement de l'un à l'autre en faisant les transformations $n_g \rightarrow -n_d$ et $\omega \rightarrow -\omega$, les autres équations étant inchangées.

Ainsi, en utilisant la relation établie à la question III.1.5, et en faisant les transformations $n_g \rightarrow -n_d$ et $\omega \rightarrow -\omega$, on obtient :

$$\boxed{n_d^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - \omega_c \omega - \omega^2}}$$

III.2 Constante de VERDET

III.2.1. Au premier ordre, on obtient : $n_d = 1 + \frac{\omega_p^2}{2(\omega_1^2 - \omega^2 - \omega_c \omega)}$ et $n_g = 1 + \frac{\omega_p^2}{2(\omega_1^2 - \omega^2 + \omega_c \omega)}$

Comme $\omega^2 \pm \omega_c \omega \ll \omega_1^2$, il vient :

$$n_d - n_g = \frac{\omega_p^2}{2(\omega_1^2 - \omega^2 - \omega_c \omega)} - \frac{\omega_p^2}{2(\omega_1^2 - \omega^2 + \omega_c \omega)} \simeq \frac{\omega_p^2}{2\omega_1^2} \frac{(\omega^2 + \omega_c \omega) - (\omega^2 - \omega_c \omega)}{\omega_1^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_1^4} (\omega_c \omega)$$

Ainsi :

$$\alpha = \frac{(n_d - n_g) \ell \omega}{2c} \simeq \frac{\omega_p^2 \omega_c \ell \omega^2}{2c \omega_1^4} = \frac{\omega_p^2 e B_0 \ell \omega^2}{2m c \omega_1^4} = V_e \ell B_0$$

Finalement, $V_e = \frac{e \omega^2 \omega_p^2}{2m c \omega_1^4}$ soit :

$$\boxed{V_e = \frac{e \lambda_1^4 \omega_p^2}{m 4 \pi^2 \lambda^2 (2c)^3}}$$

III.2.2. L'angle est doublé car quand n_d devient n_g l'angle α à l'aller n'est pas compensé par l'angle au retour et l'angle en $z = 0$ n'est pas nul. En effet, ω_c devient $-\omega_c$ et $\alpha_{aller} + \alpha_{retour}$ non nul.

III.2.3. APPLICATION NUMÉRIQUE On trouve $\alpha = 10 = 30 B_0$ donc $B_0 = \mu_0 n I_0$ et $I_0 < 3A$.

IV Biréfringence circulaire naturelle : du microscopique au macroscopique

IV.1 Dipôles induits dans une molécule hélicoïdale

Dipôle électrique induit

IV.1.1. Comme $-m\omega_1^2 Z \vec{e}_Z = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(m\omega_1^2 \frac{Z^2}{2} \right)$, il vient :

$$U = m\omega_1^2 \frac{Z^2}{2} + \text{cste}$$

IV.1.2. • Calculons la circulation $\oint_{\Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell}$ du champ électrique le long du cercle Γ contenu dans un plan orthogonal à l'axe Z , de centre l'intersection de ce plan et l'axe OZ , de rayon r , **orienté** dans le sens de \vec{e}_θ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r E(r, t)$$

• Par ailleurs, l'équation de Maxwell-Faraday ($\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) conjuguée au théorème de Stokes mène à :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_D \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}(M) \right) \text{ où } D \text{ désigne le disque}$$

Comme $\iint_D \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}(M) = \pi r^2 B_0 \cos(\omega t)$, on obtient finalement :

$$E(r, t) = \frac{r}{2} \omega B_0 \sin(\omega t)$$

IV.1.3. • En coordonnées cylindro-polaires, l'expression du vecteur-vitesse est la suivante : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{Z}\vec{e}_Z$. En remarquant que $\dot{Z} = P\dot{\theta}$, il vient $\vec{v} = \frac{R}{P}\dot{Z}\vec{e}_\theta + \dot{Z}\vec{e}_Z$. On élève cette dernière expression au carré :

$v^2 = \left(\frac{R^2}{P^2} + 1 \right) \dot{Z}^2$ pour obtenir :

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2}{P^2} + 1 \right) \dot{Z}^2$$

- Le nuage électronique n'est soumis qu'aux forces suivantes :
 - la force de rappel $-m\omega_1^2 Z \vec{e}_Z$ qui dérive de l'énergie potentielle $U = m\omega_1^2 \frac{Z^2}{2} + \text{cste}$;
 - l'action de liaison exercée par l'hélice : cette action est réputée non dissipative (cf. énoncé) ;
 - la force de Lorentz qui travaille et dont la puissance \mathcal{P} est $\mathcal{P} \triangleq -e\vec{E}(M, t) \cdot \vec{v}$.

On applique alors le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}$$

où $E_m = K + U = \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2}{P^2} + 1 \right) \dot{Z}^2 + m\omega_1^2 \frac{Z^2}{2}$ et $\mathcal{P} = -e\vec{E}(M, t) \cdot \vec{v} = -eE(R, t)R\dot{\theta} = -eE(R, t)\frac{R}{P}\dot{Z}$

- Le calcul mène bien à :

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = -\frac{eB_0}{2m} \frac{PR^2}{(R^2 + P^2)} \omega \sin(\omega t) \text{ où } \omega_0^2 = \omega_1^2 \frac{P^2}{P^2 + R^2}$$

IV.1.4. • On cherche à calculer $p_Z = -eZ$ où Z est la solution du régime forcé de l'équation de la question IV.1.3.

- La solution du régime forcé de la question IV.1.3 s'obtient classiquement en utilisant, par exemple, la méthode des complexes. On obtient :

$$Z(t) = \frac{e}{2m} \frac{PR^2}{R^2 + P^2} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} B_0 \sin(\omega t) = -\frac{e}{2m} \frac{PR^2}{R^2 + P^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{d}{dt} (B_0 \cos(\omega t))$$

Il vient $p_Z = \beta_1 \frac{dB}{dt} = \beta_1 \dot{B}(t)$ où $\beta_1 = \frac{e^2}{2m} \frac{PR^2}{R^2 + P^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$

- Clairement, $\overrightarrow{OM_1}$ n'est pas constamment porté selon \vec{e}_Z : **Le moment dipolaire n'est pas constamment parallèle à \vec{e}_Z .**

IV.1.5. • Le barycentre G des barycentres respectifs de chaque nuage M_1 et M_2 (affecté donc de la charge $-2e$) coïncide avec le projeté orthogonal commun de M_1 et M_2 sur l'axe OZ. On obtient :

$$\vec{p}(t) = -2eZ(t)\vec{e}_Z$$

- Compte-tenu du calcul de $Z(t)$ réalisé à la question IV.1.4 et dont le résultat persiste en l'absence d'interaction entre nuages électroniques, on obtient aisément :

$$\vec{p}(t) = 2\beta_1 \dot{\vec{B}}(t)$$

IV.1.6. *Cette question ne peut être résolue sans la connaissance de la notion d'angle solide (hors-programme de la filière PC). Cependant, le résultat escompté est heureusement donné.*

Il s'agit de faire la moyenne statistique $\langle \vec{p} \rangle(t) = 2\beta_1 \dot{\vec{B}}(t) \langle \cos^2 \eta \rangle$ où $\langle \cos^2 \eta \rangle = \iint_{\Sigma} \cos^2 \eta \frac{d\Omega}{4\pi}$. Cette dernière intégrale se calcule classiquement :

$$\langle \cos^2 \eta \rangle = \iint_{\Sigma} \cos^2 \eta \frac{d\Omega}{4\pi} = \int_0^{\pi} \cos^2 \eta \frac{2\pi \sin \eta}{4\pi} d\eta = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos^3 \eta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}$$

Et permet d'obtenir le résultat escompté :

$$\langle \vec{p}(t) \rangle = \beta_e \dot{\vec{B}}(t) \quad \text{avec} \quad \beta_e = \frac{e^2}{3m} \frac{PR^2}{(R^2 + P^2)} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

Dipôle magnétique induit

IV.1.7. La démarche est identique à celle menée à la question IV.1.3.

- Chaque nuage électronique n'est soumis qu'aux forces suivantes :
 - la force de rappel $-m\omega_1^2 Z \vec{e}_Z$ qui dérive de l'énergie potentielle $U = m\omega_1^2 \frac{Z^2}{2} + cste$;
 - l'action de liaison exercée par l'hélice : cette action est réputée non dissipative (cf. énoncé) ;
 - la force de Lorentz qui travaille et dont la puissance \mathcal{P} est $\mathcal{P} \triangleq -e\vec{E}(M, t) \cdot \vec{v}$.

On applique alors le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}$$

où $E_m = K + U = \frac{1}{2}m \left(\frac{R^2}{P^2} + 1 \right) \dot{Z}^2 + m\omega_1^2 \frac{Z^2}{2}$ et $\mathcal{P} = -e\vec{E}(M, t) \cdot \vec{v} = -eE_0 \cos(\omega t) \dot{Z}$

- Le calcul mène aisément à :

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = -\frac{e}{m} \frac{P^2}{(R^2 + P^2)} E_0 \cos(\omega t)$$

IV.1.8. • La solution du régime forcé de la question IV.1.7 s'obtient classiquement en utilisant, par exemple, la méthode des complexes. On obtient :

$$Z(t) = \frac{e}{m} \frac{P^2}{R^2 + P^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} E_0 \cos(\omega t)$$

- On calcule ensuite $\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{v}_1$ et $\overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{v}_2$. Par exemple, si l'on utilise la base polaire :

$$\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{v}(M_1) = \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & R\dot{\theta} \\ Z & \dot{Z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ \dot{Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\dot{\theta}Z \\ -R\dot{Z} \\ R^2\dot{\theta} \end{vmatrix}$$

Tandis que : $\overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{v}(M_2) = \begin{vmatrix} R\dot{\theta}Z \\ R\dot{Z} \\ R^2\dot{\theta} \end{vmatrix}$

La définition de \vec{M} mène alors à $\vec{M} = -eR^2\dot{\theta}\vec{e}_Z = -e\frac{R^2}{P}\dot{Z}\vec{e}_Z$. Les calculs mènent alors à

$$\vec{M} = -\beta_2 \dot{\vec{E}} \quad \text{où} \quad \boxed{\beta_2 = \frac{e^2}{2m} \frac{PR^2}{R^2 + P^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} = \beta_1}$$

IV.2 Application à la théorie de Lord Rayleigh

Remarquons, compte tenu des questions précédentes, que $\beta_m = \beta_e$. Les expressions des champs électriques rayonnés révèlent que les contributions des dipôles magnétiques et électriques sont identiques¹.

IV.2.1. • Pour $z > 0$ et dans le cadre des hypothèses énoncées précédemment :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_i(z, t) + \vec{E}_{ray}^{(e)}(z, t) + \vec{E}_{ray}^{(m)}(z, t)$$

- La décomposition de ce champ sur la base cartésienne s'écrit :

$$\vec{E}(z, t) = \begin{vmatrix} E_0 \cos(k_0 z - \omega t) \\ E_0 \frac{k_0^2 h N}{2 \varepsilon_0} (\beta_e + \beta_m) \cos(k_0 z - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

- L'expression attendue (première égalité) se simplifie (seconde égalité) compte tenu des approximations ($\alpha \ll 1$ et $k_0 h \ll 1$) :

$$\vec{E}(z, t) = \begin{vmatrix} E_0 \cos(\alpha) \cos(k_0(z-h) - \omega t) \\ E_0 \sin(\alpha) \cos(k_0(z-h) - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} E_0 \cos(k_0 z - \omega t) \\ E_0 \alpha \cos(k_0 z - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

- La comparaison des deux expressions permet bien de conclure que :

$$\boxed{\alpha = \frac{\beta_e + \beta_m}{2\varepsilon_0} k_0^2 N h}$$

IV.2.2. Notons \mathcal{H}_1^* et \mathcal{H}_2^* les images respectives de \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 par la symétrie plane (XOZ). Les équations sont les suivantes :

$$\mathcal{H}_1^* \begin{vmatrix} X = R \cos \theta \\ Y = -R \sin \theta \\ Z = P \theta \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_2^* \begin{vmatrix} X = -R \cos \theta \\ Y = R \sin \theta \\ Z = P \theta \end{vmatrix}$$

On remarque que $\mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i^*$ s'obtient en faisant la transformation $\{\theta \rightarrow -\theta; P \rightarrow -P\}$. Cela entraîne que $\{\beta_e \rightarrow -\beta_e; \beta_m \rightarrow -\beta_m\}$ et donc $\alpha \rightarrow -\alpha$.

Si un dispositif constitué de molécules optiquement actives dévie le plan de polarisation de la lumière d'un angle α , le même dispositif constitué des molécules images déviara le plan de polarisation de la lumière d'un angle $-\alpha$.

V Mise en évidence et mesure de rotations faibles

V.1 Mise en évidence d'une rotation faible par décalage

V.1.1. • Les notations de cette question sont cohérentes avec celles de la question II.0.3. On a donc :

$$n_d = n_0 + \delta n \quad \text{et} \quad n_g = n_0 - \delta n \quad \text{où} \quad \delta n \triangleq \frac{n_d - n_g}{2} = \frac{c \alpha}{\omega \ell} = \frac{\lambda_0 \alpha}{2\pi \ell}$$

1. Il est remarquable qu'un modèle classique "relativement simple" rende compte d'un phénomène décrit plus exactement en physique quantique.

- La troisième loi de Snell-Descartes écrite pour les rayons lumineux polarisés circulairement droit et gauche est :

$$\boxed{n_{air} \sin \Phi = \underbrace{n_d}_{=n_0+\delta n} \sin i_d = \underbrace{n_g}_{=n_0-\delta n} \sin i_g}$$

- Cherchons à évaluer $\varepsilon \triangleq i_g - i_d$.

À partir de la troisième loi de Snell-Descartes : $\underbrace{n_d}_{=n_0+\delta n} \sin i_d = \underbrace{n_g}_{=n_0-\delta n} \sin \underbrace{i_g}_{i_d+\varepsilon}$,

on fait développement limité à l'ordre 1 (ε et δn sont des infiniment petits d'ordre 1) :

$$n_0 \sin(i_d) + \delta n \sin(i_d) = (n_0 - \delta n) [\sin(i_0) + \varepsilon \cos(i_d)]$$

En ne conservant que les termes d'ordre 1, on obtient : $\varepsilon = 2 \frac{\delta n}{n_0} \tan(i_d)$

S'agissant de donner un ordre de grandeur, on se contentera de l'expression :

$$\boxed{\varepsilon \sim \frac{1}{n_0} \frac{\lambda_0}{\pi} \frac{\alpha}{\ell} \tan(\phi)}$$

APPLICATION NUMÉRIQUE : $\varepsilon = \frac{1}{1,4740} \cdot \frac{632 \cdot 10^{-9}}{\pi} \cdot 7,5 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{10^{-2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,0 \cdot 10^{-6}$ rad

Cet écart angulaire, fort faible (les deux faisceaux seraient distants de 1 mm à 1 m du dioptre), serait certainement indétectable et non mesurable.

V.1.2. Le dispositif permet d'exalter l'angle que font les ondes circulaire gauche et droite après réfractions.

V.2 Mesure d'effet Faraday en utilisant une cavité

V.2.1. • L'onde qui émerge en $z = d^+$ après avoir fait p aller(s) et retour(s) a été :

- transmise deux fois (en $z = 0$ et en $z = d$),
- réfléchi $2p$ fois,
- déphasée de $\delta\phi + 2p\delta\phi$.

Il s'en suit que $\underline{E}_p(z = d^+) = \underline{E}(z = 0^-) t^2 r^{2p} \exp(i(2p+1)\delta\phi)$ soit :

$$\boxed{\underline{E}_p(z = d^+) = \underline{E}(z = 0^-) T R^p \exp(i(2p+1)\delta\phi)}$$

- $\underline{E}(z = d^+) = \sum_{p=0}^{\infty} \underline{E}_p(z = d^+) = \underline{E}(z = 0^-) T \exp(i\delta\phi) \sum_{p=0}^{\infty} (R \exp(2i\delta\phi))^p$ soit :

$$\boxed{\underline{E}_s = \frac{T e^{i\delta\phi}}{1 - R e^{i2\delta\phi}} \underline{E}_i}$$

V.2.2. • Il s'agit de trouver f tel que :

$$\left| \frac{\underline{E}_s - \sum_{p=0}^{p=f} \underline{E}_p}{\sum_{p=f+1}^{\infty} \underline{E}_p} \right| < \frac{1}{100} |\underline{E}_s|$$

Cette équation s'écrit aussi :

$$\left| \frac{\underline{E}_i \frac{\exp(i\delta\phi) \exp(i(f+1)\delta\phi) T R^{f+1}}{1 - R \exp(i2\delta\phi)}}{\underline{E}_i \frac{\exp(i\delta\phi) \exp(i(f+1)\delta\phi) T}{1 - R \exp(i2\delta\phi)}} \right| < \frac{1}{100}$$

Soit $R^{f+1} < \frac{1}{100}$ ce qui équivaut à $\boxed{f > -1 - \frac{\ln 100}{\ln R}}$

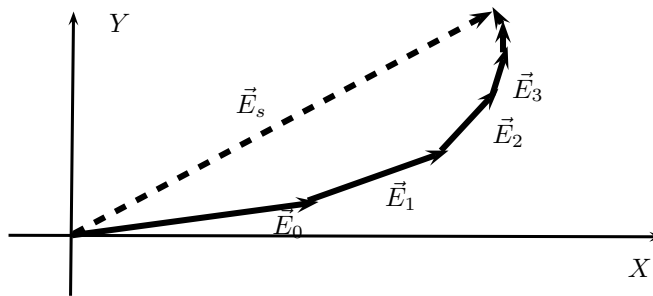
APPLICATION NUMÉRIQUE : $f \sim 4,6 \cdot 10^3$.

V.2.3. • Dans la question V.2.1, le champ électrique ayant traversé une fois la cavité puis fait p aller(s) et retour(s) conservait la même direction de sorte que sommer les amplitudes permettait d'accéder aisément au champ total émergent de la cavité. La situation est différente dans cette question puisque \vec{E}_p ne conserve pas une direction constante :

$$\vec{E}_s = \sum_{p=0}^{\infty} \vec{E}_p = E_0(1 - R) \sum_{p=0}^{\infty} R^p \vec{u}_p$$

Comme le plan de polarisation du champ électrique émergent associé \vec{E}_p fait un angle de $(2p + 1)\alpha$ par rapport à l'onde au champ incident et que le champ total résulte de la somme de chaque contribution, **l'idée de la question consiste à se convaincre graphiquement que l'angle du plan de polarisation du champ électrique total est de l'ordre de $f\alpha$: les allers-retours dans la cavité permettent d'exalter l'effet Faraday.**

Pour ce faire, faisons une représentation dans le plan XOY de la somme des \vec{E}_p :



Évidemment seul un calcul exact permettrait de conclure de manière probante (mais c'est plus long).

• Quant au cas de l'activité optique naturelle, on a justifié à la question II.0.4 que l'angle de rotation du plan de polarisation est compensé à chaque aller-retour : par un raisonnement similaire au précédent, on s'attend donc à un angle égal à α .