EXERCICE 1

Onde longitudinal dans les solides avec pertes.

On étudie la propagation d'une onde de compression dans un solide. Pour cela, on utilise le modèle de la chaine d'oscillateurs couplés en se plaçant dans l'approximation des milieux continus. Les collisions sont modélisées par une force de frottement fluide agissant sur chaque atome.

1. Établir l'équation de propagation vérifiée par $y(x,t)$.
2. En déduire la relation de dispersion du milieu. On notera : $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$ la projection du vecteur d'onde dans la direction de propagation.
3. Dans le cas d'un amortissement faible, montrer que le milieu est non dispersif. Calculer le vitesse de phase et la vitesse de groupe.
4. Dans le cas d'un amortissement plus élevé, montrer que le milieu devient dispersif. Calculer le vitesse de phase et la vitesse de groupe. L'enveloppe d'un paquet d'onde se déforme-t-elle au cours de la propagation ?

EXERCICE 2

Corde vibrante

On étudie le dispositif expérimental de Melde. Cette corde est de longueur L au repos, de masse linéïque μ. Elle est tendue entre deux points fixes $x = 0$ et $x = L$ à l'aide d'une masse M accrochée à la corde via une poulie parfaite (extrémité $x = L$). Au repos, la corde est horizontale. On appelle $h(x,t)$ le déplacement transversale d'un morceau de la corde de Melde située en x à l'instant t.

☛ *Effet du couplage avec l'air.*

On suppose la corde inextensible et, afin de tenir compte du couplage des mouvements de la corde avec l'air, on considère que , outre les forces qu'exercent les diverses parties de la corde entre elles, un élément de longueur dx de la corde est soumis en plus à la une force de frottement fluide, qui modélise la transmission de l'onde sonore dans l'air :

$$\overrightarrow{df} = -\alpha dx \frac{\partial h}{\partial t} \overrightarrow{u}_y$$

Cette étude se fera dans l'approximation de petits mouvements.

- ✘ Déterminer l'équation de propagation vérifiée par $h(x,t)$.
- ✘ En déduire la relation de dispersion de la corde.
- ✘ Quels sont les effets de ce couplage ?

☛ *Effet de la raideur de la corde.*

En pratique, la corde est plus élastique que inextensible (modèle plus plausible pour la corde de guitare mais dont les vibrations sont plus difficilement observables à l'œil).

En tenant donc compte de la raideur K de la corde, mais en négligeant cette fois le couplage avec l'air, l'équation de propagation devient :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{K}{\mu} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4}$$

avec $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

- ✘ Déterminer la relation de dispersion donnant l'expression de $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$.
- ✘ Exploiter au maximum cette relation de dispersion.

EXERCICE 3

Équation de Korteweg - De Vries

L' équation de Korteweg -De Vries est une équation de propagation d'onde non linéaire très connue. Elle permet de modéliser les ondes de pesanteur dans l'eau et notamment elle permet d'expliquer la propagation d'ondes solitaires à la surface de l'eau.

☛*Équation de Korteweg - De Vries linéarisée*

Soit un milieu de propagation régi par l'équation d'onde de Korteweg - De Vries linéaire :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + c\frac{\partial s}{\partial x} + \nu\frac{\partial^3 s}{\partial x^3} = 0\,,$$

où $s(x,t)$ est l'amplitude de l'onde et où $(c,\nu) \in [\mathbb{R}_+^*]^2$.

1. L'équation d'onde est-elle linéaire et pourquoi ? Que peut-on en déduire ?
2. Établir la relation de dispersion pour une OPPS et en déduire la vitesse de phase. Le milieu est-il dispersif et dans l'affirmative, quel terme de l'équation d'onde en est responsable ?
3. Exprimer la vitesse de groupe d'un paquet d'onde serré autour de la pulsation spatiale k. Le paquet d'onde se déforme-t-il lors de sa propagation ?

   ☛*Équation de Korteweg - De Vries / Soliton*
4. Si le paramètre c dépend de l'amplitude de l'onde selon une loi $c = a\,s$, l'équation d'onde demeure-t-elle linéaire ? Quelles conséquences cela implique-t-il ?
5. On considère la propagation d'un paquet d'onde particulier :

$$s(x,t) = \frac{A}{\cosh^2\left[\alpha\,(x - Vt)\right]}$$

   Où α, A et V sont des constantes.
   - ✘ Vérifier que $s(x,t)$ est bien solution de l'équation de propagation.
   - ✘ Représenter $s(x,t)$ à t fixé.
   - ✘ Que peut-on en conclure ?

Figure 1 – Exemple de soliton

.

EXERCICE 4

Paquets d'onde particuliers

☛*Paquet d'onde du type porte*

Soit un paquet d'ondes, $y(x,t)$, se propageant selon l'axe Ox dans un milieu linéaire de relation de dispersion $\omega(k) = kc$, de densité spectrale $\underline{a}(k)$, vérifiant $\Delta k \ll k_0$ et :

$$\begin{cases} \underline{a}(k) = \pi\, a = cste \;\Leftrightarrow\; k \in \left[k_0 - \dfrac{\Delta k}{2};\, k_0 + \dfrac{\Delta k}{2}\right] \times \left[-k_0 - \dfrac{\Delta k}{2}; -k_0 + \dfrac{\Delta k}{2}\right], \\ \underline{a}(k) = 0 \;\text{ si } |k - k_0| > \dfrac{\Delta k}{2} \text{ et } \;| k + k_0 |> \dfrac{\Delta k}{2}. \end{cases}$$

1. Exprimer $y(x,t)$ du paquet. Commenter le résultat en terme de porteuse modulée.
2. Représenter graphiquement $\underline{a}(k)$ et $y(x,t)$. Rappeler les vitesses de propagation caractéristiques.

   ☛ *Paquet d'onde Gaussien*

   On considère un paquet d'ondes serré autour du centre spectral (k_0, ω_0) et de densité spectrale constituée de 2 pics gaussiens centrés en $\pm k_0$, de largeur Δk :

   $\forall k > 0 \;:\; \underline{a}(k) = \dfrac{\pi a}{\Delta k} \exp\left[\dfrac{-\pi(k-k_0)^2}{(\Delta k)^2}\right],\; \forall k < 0 \;:\; \underline{a}(-k) = \underline{a}(k)\,.$
3. Comment décrire la propagation de ce paquet selon un axe Ox dans un milieu linéaire de relation de dispersion $\omega(k) = kc$ supposée connue ?

Données :

- ✘ Cacluls avec les transformées de Fourier :

$$TF\left[\mathrm{rect}\left(\frac{k}{\Delta k}\right)\right] = \frac{\Delta k}{2\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$TF\left[\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\right] = 2\cos(k_0 x)$$

$$TF\left[\exp^{-\dfrac{k^4}{4\alpha^2}}\right] = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}}\exp^{-\alpha^2 x^2}$$

- ✘ Calculs directs :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-K^2}\exp^{2jK\alpha}\,\mathrm{d}K = \sqrt{\pi}\exp^{-\alpha^2}$$

EXERCICE 5

Paquet d'onde

Soit un paquet d'ondes d'expression :

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\,\delta k}\mathrm{Re}\left[\int_{k_0-\delta k}^{k_0+\delta k} \exp\left[\mathrm{j}k\,x - \mathrm{j}\,\omega(k)\,t\right]\mathrm{d}k\right],$$

se propageant avec la relation de dispersion approximative :

$$\omega(k) = \omega_0 + c\,k \quad \text{où} \quad (k_0, \omega_0, c) \in [\mathbb{R}_+^*]^3\,.$$

1. Montrer qu'il correspond à une fonction porteuse (l'onde moyenne) modulée par une fonction modulante (l'enveloppe) et les expliciter.

2. Exprimer les vitesses de phase v_Φ et de groupe v_g au voisinage de k_0, puis les comparer à c. Le milieu est-t-il dispersif, peu dispersif, notablement dispersif ?
3. Exprimer pour la porteuse et la modulante :
   (a) les longueurs d'onde λ et Λ,
   (b) les périodes τ et T.
4. Représenter le paquet à $t = 0$ puis à date t. Le milieu propage-t-il les paquets en les déformant ? Qu'en serait-il si $\omega(k)$ n'était pas affine ?
5. Si Ψ est un paquet d'ondes électromagnétiques et c la vitesse de la lumière dans le vide, la comparaison de v_Φ à c pose-t-elle un problème ?

EXERCICE 6

Élargissement d'un paquet d'onde

Un phénomène ondulatoire unidimensionnel $X(x,t)$ de mécanique classique se développe sur un milieu dispersif non absorbant, régi par une équation d'onde linéaire à coefficients réels. La relation de dispersion des OPPS est $k(\omega)$. On adopte un paquet d'ondes dans le formalisme :

$$X(x,t) = \mathscr{R}\mathrm{e}\left[\underline{X}(x,t)\right] \quad \text{avec} \quad : \ \underline{X}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\ e^{\mathrm{j}\,[k\,x-\omega(k)t]}\ \mathrm{d}k\ ,$$

où $A(k) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}(x,0)\ e^{-\mathrm{j}\,k\,x}\mathrm{d}x$ est l'amplitude du mode de nombre d'onde k. On suppose que :

- ✘ le spectre $A(k)$ n'est notable qu'au voisinage de k_0 et on le suppose à peu près nul hors de $[k_0 - \Delta k\,;\,k_0 + \Delta k]$,
- ✘ la relation de dispersion admet un développement de Taylor au voisinage de k_0, dont les restes sont rapidement décroissants avec le rang.

1. Avec une relation de dispersion $\omega(k)$ assimilée à son développement limité au premier ordre en k_0 :
   (a) mettre le paquet d'onde sous forme du produit d'une onde moyenne $\underline{M}(x,t)$ et d'une enveloppe $\underline{F}(x,t)$,
   (b) définir une vitesse de phase et une vitesse de groupe,
   (c) dire si le paquet se déforme lors de sa propagation et tracer un graphe spatial du paquet à deux dates distinctes, dans le cas d'un spectre plat.
   (d) dire si l'onde moyenne circule sous l'enveloppe.
2. On veut pousser le développement limité de la relation de dispersion.
   (a) Écrire le DL de la fonction $\omega(k)$ à l'ordre deux au voisinage de k_0. On notera $\omega_{(k_0)} = \omega_0$.
   (b) Pour un paquet initialement gaussien : $\underline{X}(x,0) = A_0 \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\,L^2}\right) e^{\mathrm{j}\,k_0\,x}$, de spectre :

   $$A(k) = A_0\,L\ \exp\left(-\frac{(k-k_0)^2L^2}{2}\right)$$

   établir l'expression aux $t > 0$ de l'amplitude complexe du paquet :

   $$\underline{X}(x,t) = \frac{A_0\,L}{2\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{L^2 + \mathrm{j}\,\omega''_{(k_0)}\,t}} \times \exp\left[-\frac{(x-\omega'_{(k_0)}\,t)^2}{2\,(L^2\ + \mathrm{j}\,\omega''_{(k_0)}\,t)}\right] \times e^{\mathrm{j}\,[k_0\,x-\omega_0\,t]}\ .$$

On posera : $\tilde{L}^2(t) = L^2 + \mathrm{j}\,\omega"_{(k_0)}\,t$ et on utilisera, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^* \times [\mathbb{R}]^2$, l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left[x\sqrt{a + \mathrm{j}b} + \mathrm{j}c\right]^2\right)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a + \mathrm{j}b}}\,.$$

(c) Pour le paquet d'onde, exprimer l'amplitude $\underline{G}(x,t)$ des oscillations, la hauteur du maximum $X_m(t)$ et la largeur $L(t)$.

(d) À quelles évolutions de la largeur $L(t)$ et de la hauteur $X_m(t)$ la prise en compte du terme $\omega"_{(k_0)}$ conduit-elle ?

(e) Que dire du produit $X_m^2(t) \times L(t)$? Commenter.

(f) Le signe de la courbure $\omega"_{(k_0)}$ a t-il un effet ?

(g) Commenter la figure 2.

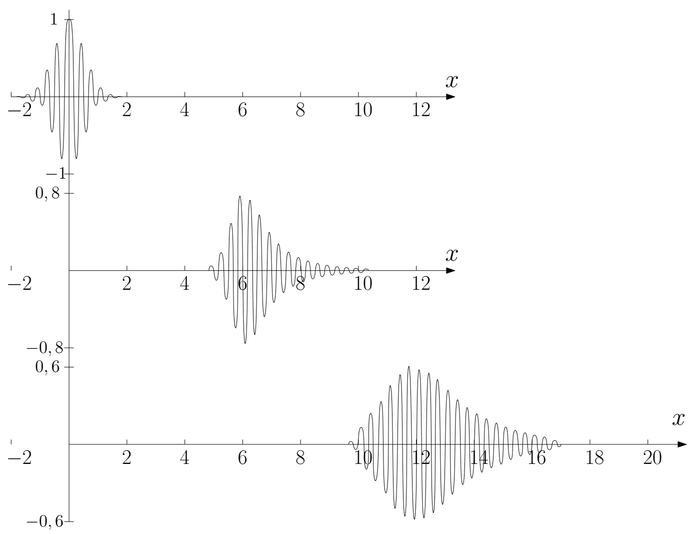

FIGURE 2 – Évolution d'un paquet d'ondes en milieu dispersif non absorbant

EXERCICE 7

Guide d'onde d'un four à micro ondes

D'un point de vue simplifié, un four à micro-ondes est constitué d'un générateur d'ondes appelé magnétron, d'une cavité rectangulaire appelée guide d'onde chargé de «conduire» les ondes vers la cavité où cuisent les aliments en absorbant des ondes dont les fréquences correspondent à des modes propres de vibration des molécules des aliments, l'eau en particulier.

On s'intéresse ici au flux d'énergie pouvant être transporté par le guide guide d'onde, sur lequel aucune connaissance spécifique n'est requise au préalable. Celui-ci est modélisé par une cavité à parois métalliques, de section rectangulaire, ouverte sur le magnétron à une extrémité, sur le four à l'autre extrémité.

On admet que le champ électrique de l'onde se propageant dans ce dispositif a pour expression

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)}\,\vec{u}_y$$

1. L'air dans lequel l'onde évolue est assimilé à du vide sans charges ni courants. Établir la relation de dispersion pour l'onde étudiée.

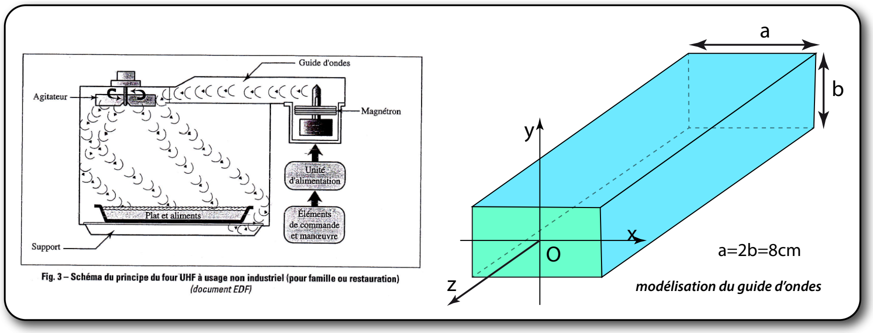

FIGURE 3 –

2. L'onde étudiée a la même fréquence f qu'aurait une onde plane progressive monochromatique (ou harmonique) de longueur d'onde λ_0=12,5cm se propageant dans le vide illimité. Justifier que la propagation peut se faire sans atténuation, mais que ce ne serait pas forcément le cas pour d'autres fréquences.

3. Le champ électrique doit rester inférieur à $E_{max} = 3\,\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$, sinon, des étincelles apparaissent, ce qui nuit au transport des ondes et peut endommager les parois du guide. Calculer la puissance maximale pouvant être transportée par ce guide.

4. En se basant sur des temps de cuisson observés dans la vie courante, estimer si il y aura des risques d'étincelles dans le guide d'onde d'un four à micro-ondes domestique.

EXERCICE 8

Comment dimensionner la section d'un guide d'onde ?

Un guide d'onde est un parallélépipède de très grande longueur L selon l'axe Oz, de section rectangulaire : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$, empli d'air et de parois métalliques très conductrices.

1. Pourquoi une onde progressive peut-elle y être guidée ?
2. Les équations de Maxwell à l'intérieur du guide, les relations de passage entre intérieur et parois, autorisent plusieurs jeux de modes propres. Les modes $TE_{n,0}$, indexés par $n \in \mathbb{N}^*$ et caractérisés par $k_{c_n} = \dfrac{n\pi}{a}$, forment un de ces jeux, de champs et densités de courant :

   - ✘ $\vec{E}_n = E_0 \sin(k_{c_n} x)\cos(\omega t - kz)\vec{e}_y$
   - ✘ $\vec{B}_n = B_{x_n}\vec{e}_x + B_{z_n}\vec{e}_z$
   - ✘ $B_{x_n} = \dfrac{-E_0 k}{\omega}\sin(k_{c_n} x)\cos(\omega t - kz)$
   - ✘ $B_{z_n} = \dfrac{-E_0 k_{c_n}}{\omega}\cos(k_{c_n} x)\sin(\omega t - kz)$.
   - ✘ Condition de passage sur la paroi en $x = 0$: $\vec{j}_s = \dfrac{-B_{z_n}(x=0,t)}{\mu_0}\vec{e}_y$
   - ✘ Condition de passage sur la paroi en $y = 0$: $\vec{j}_s = \dfrac{B_{z_n}}{\mu_0}\vec{e}_x - \dfrac{B_{x_n}}{\mu_0}\vec{e}_z$.

   (a) Qualifier un tel mode.

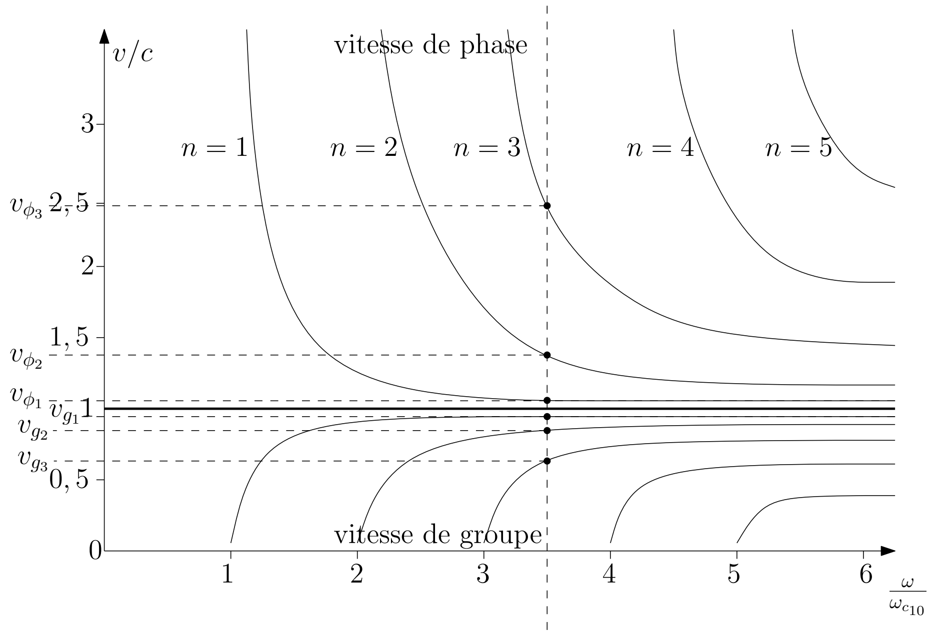

FIGURE 4 – Vitesses de phase et de groupe *vs* pulsation

(b) Établir la relation de dispersion $k(\omega)$, le minimum $\omega_{c_{(n0)}}$ de ω permettant au mode $TE_{n,0}$ de se propager et la plus petite fréquence modale (fréquence fondamentale) susceptible de se propager.

(c) Que dire du guide si sa fréquence fondamentale est 5GHz ?

(d) La figure 4 donne, pour les cinq premiers modes $TE_{n,0}$, les graphes des vitesses de phase v_φ et de groupe v_g en fonction du rapport $\dfrac{\omega}{\omega_{c_{10}}}$.

Exprimer ces vitesses, commenter leurs graphes. Pour $\omega = 3.5\,\omega_{c_{(10)}}$, que propage le guide ?

(e) Commenter l'évolution sur trois dates, du paquet d'onde serré autour de la pulsation $\omega_0 = 2.5\omega_{c_{(10)}} = 1.25\omega_{c_{(20)}}$ (figure 5). On note $Z_0(t)$ l'abscisse de la crête.

3. (a) Exprimer le vecteur de Poynting et la puissance véhiculée à travers une section du guide. Commenter.

(b) La moyenne temporelle de l'énergie électromagnétique contenue dans un mètre de guide est : $u_l = \dfrac{\varepsilon_0\, a\, b\, E_0^2}{4}$.
Exprimer la vitesse v_ε de l'énergie.

4. (a) Quelles lois relient $\vec{j}_s$ aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$? Que signifient des courants répartis en surface de parois ?

(b) Le champ électromagnétique imprime à l'élément $\mathrm{d}S(M)$ de paroi, une force de pression de radiation $\mathrm{d}\vec{F} = \dfrac{1}{2}\vec{j}_s(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)\,\mathrm{d}S$ où $\vec{B}(M,t)$ est le champ magnétique.

- ✘ Quelle en est l'origine ?
- ✘ Exprimer en moyenne les pressions de radiation subies par les faces $x = 0$ et $y = 0$.
- ✘ En évaluer l'ordre de grandeur pour un guide monomode ($L = 8$m, $a = 3$cm, $b = 2$cm), véhiculant par un signal de 5.5GHz, la puissance moyenne $< P >= 10$W.

5. On veut relier le foyer d'une antenne parabolique à un démodulateur *via* un guide d'ondes à section rectangulaire.

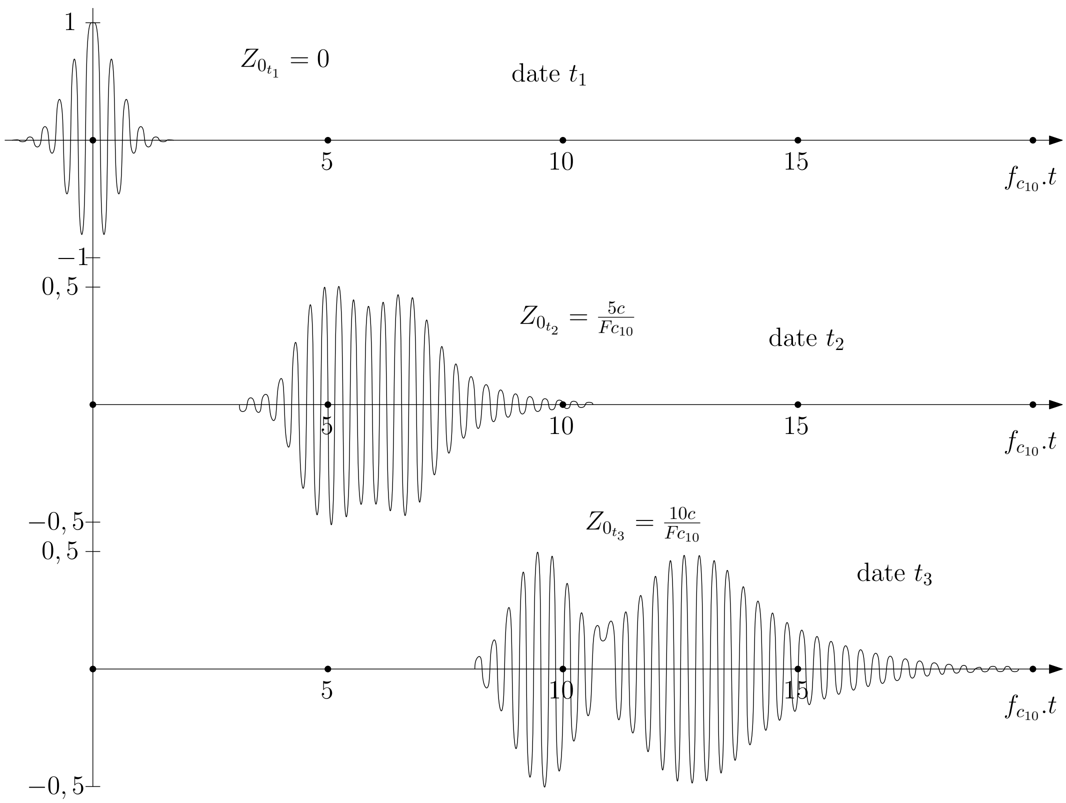

FIGURE 5 – Propagation d'un paquet d'onde serré autour de $\omega_0 = 2.5\,\omega_{c_{(10)}}$

(a) Quel est l'intérêt d'un guide monomode ?

(b) Pour une réception par satellite dans la bande [4 , 6GHz], si on souhaite que seul $TE_{1,0}$ se propage, quelles dimensions a et b donner à la section ?

6. Il existe des modes propres $TE_{n,m}$, à champ électrique $\vec{E} = E_y\vec{e}_y + E_x\vec{e}_x$:

$$E_y = E_{y_0}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos\left(\omega t - kz\right)\vec{e}_y,$$

$$E_x = E_{x_0}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos\left(\omega t - kz\right)\vec{e}_x \text{ où } (n,m) \in \mathbb{N}^2\backslash(0,0).$$

Cette information permet-elle d'affiner le dimensionnement du guide ?