

Remarque préliminaire

De nombreux problèmes, particulièrement en mécanique des fluides, sont difficiles à résoudre exactement. Sans les résoudre, nous pouvons obtenir des propriétés intéressantes de leur solution en considérant les dimensions des grandeurs pertinentes. Pour cela, nous pouvons exploiter l'une des trois démarches suivantes.

1. Si une grandeur dimensionnée a est fonction inconnue de grandeurs dimensionnées b, c, d , cherchons les exposants β, γ, δ tels que la relation $a = kb^\beta c^\gamma d^\delta$ soit une relation homogène, k, β, γ, δ étant sans dimension. Si la solution en β, γ, δ est unique, nous avons trouvé la fonction inconnue, au facteur k près, qui est une constante inconnue.

2. Théorème de Vaschy-Buckingham.

Toute relation entre N grandeurs dépendant de p dimensions peut être mise sous la forme d'une relation entre $N - p$ monômes sans dimension.

La démarche 1 correspond au cas $N - p = 1$.

Exemple de cas $N - p > 1$: exprimer la force F sur une boule de diamètre D en mouvement relatif de vitesse v par rapport à un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η .

$$N = 5 \quad p = 3 \quad N - p = 2$$

La relation est de la forme :

$$\left(\frac{F}{\rho v^2 D^2}, \frac{\rho v D}{\eta} \right) = 0$$

soit :

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{\pi D^2}{4} C_x \left(\frac{\rho v D}{\eta} \right)$$

où C_x est une fonction universelle du nombre de Reynolds $\frac{\rho v D}{\eta}$.

3. Faire des changements de variables qui ramènent à un problème portant sur des grandeurs non dimensionnées.

I. Écoulement de fluide en micro-canal

I.1. Écoulement sous un gradient de pression constant.

I.1.1.

✕ Le membre de gauche de l'équation de Navier Stokes représente :

- ☛ l'accélération particulaire du fluide multiplié par la masse volumique.
- ☛ La dérivée de la résultante cinétique volumique de la particule fluide.
- ☛ La densité volumique de la résultante dynamique de la particule fluide.



Le terme de gauche n'est pas homogène à une accélération

✕ Les termes du membre de droite représentent respectivement les forces volumiques de pesanteur de pression et de viscosité.



Pas de point si le terme « volumique » n'est pas mentionné.

I.1.2.

- ✕ Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension comparant les effets diffusifs et les effets convectifs dans un écoulement : il est d'autant plus élevé que les effets convectifs sont élevés.



Ne pas oublier : nombre sans dimension

- ✕ Son expression est :

$$Re = \frac{DV}{\nu}$$

où V est la vitesse relative du fluide (loin de l'obstacle dans le cas de l'écoulement autour d'un obstacle), D est longueur caractéristique de l'obstacle et où ν est la viscosité cinématique du fluide.

- ✕ Pour établir l'expression de Re , on a différentes solutions :

- Rapport du vecteur densité de courant convectif de quantité de mouvement et du vecteur densité de courant diffusif de quantité de mouvement

- ✓ Le vecteur densité de courant convectif de quantité de mouvement, dans le cas d'un écoulement tel que $\vec{V} = V(y)\vec{e}_x$ est tel que :

$$\vec{j}_{conv} = \mu V^2 \vec{e}_x$$

- ✓ Le vecteur densité de courant convectif de quantité de mouvement, dans le cas d'un écoulement tel que $\vec{V} = V(y)\vec{e}_x$ est tel que :

$$\vec{j}_{diff} = \eta \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y$$

- ✓ Le rapport de la norme de ces deux vecteurs, en utilisant les grandeurs caractéristiques, donne le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\|\vec{j}_{conv}\|}{\|\vec{j}_{diff}\|} = \frac{\mu V^2}{\eta \frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{\mu V^2}{\eta V/L} = \frac{\mu V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}$$

- Rapport de l'accélération convective et de la résultante massique des forces de viscosité

- ✓ L'accélération convective vaut de manière générale :

$$\vec{a}_{conv} = (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V}$$

- ✓ La résultante massique des forces de viscosité vaut :

$$\vec{f}_{visc,m} = \frac{\eta}{\mu} \Delta \vec{V} = \nu \Delta \vec{V}$$

- ✓ Le rapport de la norme de ces deux vecteurs, en utilisant les grandeurs caractéristiques, donne le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\|\vec{a}_{conv}\|}{\|\vec{f}_{visc,m}\|} = \frac{\|(\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V}\|}{\|\nu \Delta \vec{V}\|} = \frac{\frac{V^2}{L}}{\frac{\nu}{L^2}} = \frac{V L}{\nu}$$

- Rapport de la trainée convective et de la trainée de Stokes

- ✓ La trainée convective vaut :

$$\vec{T}_{conv} = -\frac{1}{2}\mu V^2 C_x S \frac{\vec{V}}{V}$$

- ✓ La trainée de Stokes est de la forme :

$$\vec{T}_{Stokes} \approx -\eta L \vec{V}$$

- ✓ Le rapport de la norme de ces deux vecteurs, en utilisant les grandeurs caractéristiques, donne le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\|\vec{T}_{conv}\|}{\|\vec{T}_{Stokes}\|} = \frac{\|\frac{1}{2}\mu V^2 C_x S \frac{\vec{V}}{V}\|}{\|\eta L \vec{V}\|} = \frac{\mu V^2 L^2}{\eta L V} = \frac{\mu V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}$$

- ☛ Rapport du temps caractéristique de diffusion et du temps caractéristique de convection

- ✓ Le temps caractéristique de convection est lié au trajet d'une particule fluide :

$$\tau_{conv} = \frac{L}{V}$$

où L est la distance caractéristique de l'écoulement et où V est la vitesse caractéristique de l'écoulement.

- ✓ Le temps caractéristique de diffusion est lié à l'équation de diffusion :

$$\tau_{diff} = \frac{L^2}{D} = \frac{L^2}{\nu}$$

- ✓ Le rapport de la norme de ces deux temps nous donne le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} = \frac{\left(\frac{L^2}{\nu}\right)}{\left(\frac{L}{V}\right)} = \frac{L V}{\nu}$$

- ✗ Très souvent la longueur caractéristique D est la dimension transversale de l'objet déviant le fluide ; toutefois, lorsque que l'on étudie le développement de la couche limite autour de l'obstacle, la distance caractéristique est la distance longitudinale comptée à partir du point d'arrêt (pour une aile d'avion, D est la dimension de l'aile dans la direction parallèle à la vitesse.
- ✗ Dans le cas du canal $D = h$ de dimension transversale la plus petite. Les longueurs w et L ne jouent pas de rôle, tout se passe comme si elles étaient infinies.

$$Re = \frac{\rho V_0 h}{\eta} = \frac{10^3 \times 10^{-4} \times 10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-3}$$

Comme $Re \ll 1$, l'écoulement est laminaire les forces d'inertie sont négligeables.

I.1.3

- ✗ L'écoulement étant suivant Ox , on a :

$$\vec{v} = v(x, y, z, t) \vec{e}_x$$

- ✗ A l'approximation w infini, le problème est invariant par translation parallèle à Oy , donc $\vec{v}$ ne dépend pas de y .

✕ Le fluide étant incompressible, $\text{div } \vec{v} = 0$, soit $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$: $\vec{v}$ ne dépend pas de x .

✕ Conclusion :

$$\vec{v} = v_x(z, t) \vec{e}_x$$

I.1.4.

✕ On montre facilement que l'accélération de la particule fluide est nulle.

✕ Projetons l'équation de Navier Stokes sur Oz :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g$$



On ne néglige pas le poids à ce stade là du sujet

✕ Projetons sur Ox l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2}$$



$\frac{\partial P}{\partial x}$ est encore a priori une fonction de x et de z à ce stade là de la résolution

✕ Expression de $\frac{\partial P}{\partial x}$ à partir de $\frac{\partial P}{\partial z}$:

$$P(x, z) = -\rho g z + f(x) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{df}{dx} = g(x)$$

✕ Ainsi, dans l'équation :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2}$$

on a l'égalité d'une fonction de x et d'une fonction de z et ce quelque soit x et z : chaque terme de cette équation est donc une constante et donc $\frac{\partial P}{\partial x}$ est une constante.

✕ Par intégration, on obtient facilement :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L}$$

✕ d'où l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = -\frac{\Delta P}{\eta L}$$



Attention au signe de ΔP : vous choisissez son signe et veillez à la cohérence des résultats

I.1.5.

✕ La solution de l'équation différentielle est :

$$v_x = -\frac{\Delta P z^2}{2\eta L} + az + b$$

✕ La condition de non glissement en $z = \pm \frac{h}{2}$, donne après calculs :

$$v_x(z) = \frac{\Delta P}{2\eta L} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right)$$

✕ La vitesse est maximale pour $z = 0$:

$$V_{max} = \frac{\Delta P h^2}{8\eta L}$$

✕ La vitesse moyenne est :

$$V_0 = \frac{1}{S} \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} v_x(z) dz$$

Soit :

$$V_0 = \frac{\Delta P h^2}{12\eta L}$$



Attention aux CL : elles sont en $\pm h/2$

I.1.6.

Le débit volumique vérifie :

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint v dy dz = hw V_0 = \frac{h^3 w \Delta P}{12\eta L}$$

I.1.7.

✕ Pour $h = 10 \mu\text{m}$, on obtient :

$$\Delta P = \frac{12\eta L Q}{h^3 w} = \frac{12 \times 10^{-3} \times 10^{-3} \times 10^{-12}}{(10^{-5})^3 \times 10^{-4}} = 120 \text{ Pa}$$

$$\Delta H = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{120}{10^3 \times 9,8} = 0,0122 \text{ m} = 12,2 \text{ mm}$$

✕ Si $h = 100 \mu\text{m}$, la formule de Hagen-Poiseuille donne $\Delta H = 0,012 \text{ mm}$, plus difficile à régler, d'autant qu'il faut tenir compte de la tension superficielle (voir II.4). A noter aussi que $h \ll w$ ne serait plus vraie.

I.2. Écoulement biphasique Remarques préliminaires.

Remarque préliminaire

Les fluides 1 et 2 sont non miscibles. Habituellement, leur interface est horizontale, mais ici une interface verticale minimise l'aire de cette interface et l'énergie de tension superficielle est beaucoup plus grande que celle de pesanteur. L'équilibre de l'interface exige la continuité de la vitesse $v_1(z) = v_2(z)$ pour $y = \alpha w$; mais, comme $w \gg h$, ceci n'agit sur le champ de vitesse que dans une zone de faible largeur, de sorte qu'on peut oublier cette condition et supposer v_1 et v_2 indépendants de y et différents.

I.2.1.

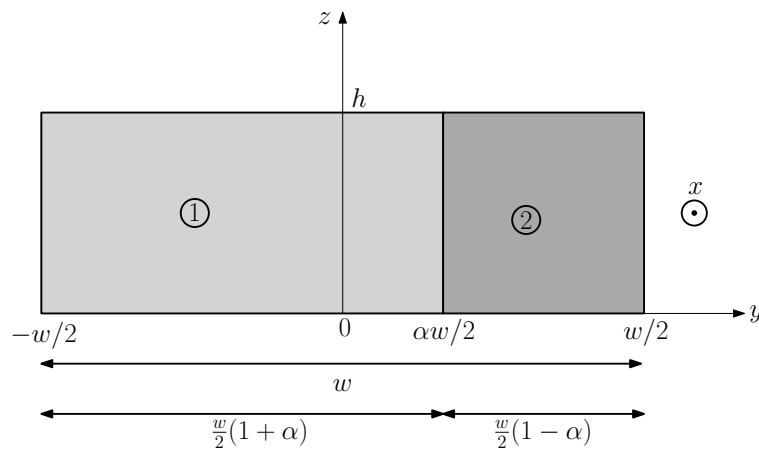


Figure 1



Beaucoup d'erreurs dans les calculs des largeurs : surtout pour ceux qui n'ont pas fait de schéma

On réécrit les débits, en modifiant w :

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{(1+\alpha)h^3w\Delta P}{24L\eta_1} \\ Q_2 &= \frac{(1-\alpha)h^3w\Delta P}{24L\eta_2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1+\alpha}{\eta_1 Q_1} = \frac{1-\alpha}{\eta_2 Q_2} \Rightarrow \alpha = \frac{\eta_1 Q_1 - \eta_2 Q_2}{\eta_1 Q_1 + \eta_2 Q_2}$$



inutile de tout recalculer, il fallait juste modifier w

I.2.2.

$$\alpha = \frac{50 \times 10^{-3} - 10^{-1}}{50 \times 10^{-3} + 10^{-1}} = -0,333$$

II. Analogie électrique des canaux microfluidiques.

II.1. Analogues hydrauliques du courant et de la tension électrique.

II.1.1.

- ✗ L'intensité du courant électrique est un débit de charge obtenu en calculant le flux du vecteur densité de courant électrique à travers une section du conducteur. Dans le cas d'un régime stationnaire, cette intensité se conserve.
- ✗ Le débit volumique dans un écoulement est un débit de volume obtenu en calculant le flux du vecteur vitesse à travers une section de l'écoulement. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, ce débit se conserve.
- ✗ on a donc une analogie formelle pour ces deux débits, le débit de volume étant ici :

$$Q = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = V_0 A$$



Confusion en débit et flux : le mot clefs attendu était débit !!

II.1.2.

- ✕ La puissance mécanique P_m reçue par le fluide est une somme de termes constitués du produit scalaire de la force extérieure, soit :

$$(P + \Delta P) \vec{dS}$$

, à l'entrée et :

$$-P \vec{dS}$$

, à la sortie, par la vitesse :

$$P_m = \iint_{\text{entrée}} (P + \Delta P) \vec{dS} \cdot \vec{v} - \iint_{\text{sortie}} P \vec{dS} \cdot \vec{v}$$

- ✕ Comme le débit de volume Q est le même à l'entrée et à la sortie, on obtient :

$$P_m = Q \Delta P$$

- ✕ Cette formule, analogue à l'expression de la puissance électrique $P = UI$, montre que l'analogue de la tension est la différence de pression et que l'analogue du potentiel électrique est la pression.

II.2. Résistance hydraulique. Application au tri de gouttelettes.**II.2.1.**

$$R_{hd} = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{12\eta L}{h^3 w}$$

II.2.2.

$$r_e = \frac{R_{hd}}{L}$$

c'est la résistance linéique de l'eau.

II.2.3. Les résistances sont en série, on les ajoute donc :

$$\Delta P = n \left(\frac{12\eta_e (\lambda - L_g) Q_0}{h^3 w} + \frac{12\eta_h L_g Q_0}{h^3 w} \right) = Q_0 r_e \left(L + n L_g \left(\frac{\eta_h}{\eta_e} - 1 \right) \right) \approx Q_0 r_e \left(L + n L_g \frac{\eta_h}{\eta_e} \right)$$



! Trop de précipitation : vous êtes beaucoup à avoir ajouté les débits !

II.2.4.

Si les fluides sont incompressibles et les canaux complètement remplis, le volume $Q_0 dt$ qui arrive à la bifurcation pendant dt est égal à celui $Q_1 dt + Q_2 dt$ qui en repart. D'où :

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

, qui est l'équivalent de la loi des nœuds de Kirchhoff.

II.2.5.

En l'absence de gouttelettes, la loi de Hagen-Poiseuille dit que :

$$Q_1 L_1 = Q_2 L_2$$

, donc les gouttelettes partent du côté 1.

II.2.6.

Comme les deux bras secondaires sont soumis à la même différence de pression :

$$Q_1 \left(L_1 + n_1 L_g \frac{\eta_h}{\eta_e} \right) = Q_2 L_2$$

Comme les gouttelettes vont dans le bras secondaire où le débit est le plus grand, $Q_1 > Q_2$.
Il en résulte que l'écoulement n'est stable que si :

$$L_1 + n_1 L_g \frac{\eta_h}{\eta_e} < L_2$$

Comme :

$$n_1 = \frac{L_1}{\lambda}$$

, on obtient :

$$\frac{L_g}{\lambda} < \frac{\eta_e}{\eta_h} \frac{L_2 - L_1}{L_1}$$

Remarque : λ est la période spatiale des gouttelettes dans le bras 1 ; cette distance varie quand L_1 ou L_2 varient, ce qui réduit l'intérêt de la condition demandée.

II.3. Inertance hydraulique.

II.3.1.a.

La quantité de mouvement du fluide dans le canal est :

$$\vec{p} = \rho L \iint \vec{v} dS = \rho L Q \vec{e}_x$$

II.3.1.b.



Bilan attendu

- ✕ Considérons le système fermé constitué par l'ensemble du fluide situé dans le micro-canal à l'instant t (coïncidant avec un système ouvert fixe) et qui entre t et $t+dt$ va circuler dans le canal et appliquons lui le théorème de la quantité de mouvement :

$$\vec{F} = \frac{D\vec{P}}{Dt}$$

- ✕ à l'instant t :

$$\vec{P}^*(t) = \vec{P}(t) = \rho L Q(t) \vec{e}_x$$

- ✕ à l'instant $t + dt$:

$$\vec{P}^*(t + dt) = \rho L Q(t + dt) \vec{e}_x + \delta m_s \vec{V}_s - \delta m_e \vec{V}_e = \rho L Q(t) \vec{e}_x$$

- ✕ Sachant que le débit volumique (et donc massique ici) se conserve et que les vitesses d'entrée et de sortie sont égales, on obtient :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \rho L \frac{dQ}{dt} \vec{e}_x$$

- ✕ D'où :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \rho L \frac{dQ}{dt} \vec{e}_x$$

✕ En considérant que seules les forces de pression entrée/sortie interviennent, on obtient :

$$\vec{F} = A(P_e - P_s)\vec{e}_x = A\Delta P_i\vec{e}_x$$

D'où :

$$A\Delta P_i = \rho L \frac{dQ}{dt}$$

Conclusion

$$\Delta P_i = I_{hd} \frac{dQ}{dt}$$

, où :

$$I_{hd} = \frac{\rho L}{A}$$

II.3.1.c.

I_{hd} représente l'inertie du fluide dans le canal. C'est l'analogue de l'inductance.

II.3.2.a.

Supposons l'équation différentielle du régime transitoire analogue à celle :

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri$$

, d'une bobine.

On obtient donc :

$$\Delta P = I_{hd} \frac{dQ}{dt} + R_{hd}Q$$

Remarque : cette analogie est approximative, car le freinage du courant électrique est proportionnel à la vitesse et exercé par le volume du conducteur, tandis que celui du liquide est proportionnel au gradient de la vitesse et exercé par les parois ; la suite montre que cette approximation est suffisante pour le problème.

II.3.2.b.

Cette équation différentielle a pour solution :

$$Q = \frac{\Delta P}{R_{hd}} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \right)$$

où :

$$\tau_L = \frac{I_{hd}}{R_{hd}} = \frac{\rho h^2}{12\eta}$$

II.3.2.c.

$$\tau_L = \frac{10^3 \times (10^{-5})^2}{12 \times 10^{-3}} = 8,33\mu s$$

Pour une expérience typique, d'une durée de l'ordre de la minute ou de l'heure, l'inertance est négligeable et le régime permanent s'établit instantanément.

II.4. Compliance hydraulique.



Erreur d'énoncé : C'est la pression dans le liquide qui est la plus élevée

II.4.1.a.

$$\Delta P_{\text{cap}} = \frac{2 \times 7 \times 10^{-2}}{10^{-5}} = 14000 \text{ Pa} = 0,14 \text{ bar}$$

$$\Delta P_{\text{hyd}} \approx \rho g h = 0,1 \text{ Pa} \ll \Delta P_{\text{cap}}$$

La pression dans le liquide est à gauche 1,14 bar et à droite 1 bar ; ce déséquilibre provoque l'aspiration de l'eau par le micro-canal.

II.4.1.b.



Rappeler les hypothèses pour Bernoulli

Comme la surface du réservoir est très grande, on peut négliger la vitesse au niveau de cette surface dans la relation de Bernoulli, qui s'écrit :

$$\frac{P_0}{\rho} = \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} \dot{x}^2 \Rightarrow P_0 - P_A = \frac{1}{2} \rho \dot{x}^2$$

II.4.1.c.

$$(P_A + \Delta P_{\text{cap}}) - (P_0) = r_e x Q \Rightarrow P_A - P_0 = r_e A x \dot{x} - \frac{2\gamma}{h}$$

II.4.1.d.

$$\frac{1}{2} \rho \dot{x}^2 + r_e A x \dot{x} - \frac{2\gamma}{h} = 0$$

II.4.1.e. La dimension de la pression est :

$$[P] = ML^{-1}T^{-2}$$

, et celle de la viscosité :

$$[\eta] = [P]T = ML^{-1}T^{-1}$$

D'où :

$$[r_e A] = \left[\frac{12\eta_e}{h^2} \right] = ML^{-3}T^{-1}$$

$$[\theta] = \left[\frac{\rho}{2r_e A} \right] = \frac{ML^{-3}}{ML^{-3}T^{-1}} = T$$

, qui montre que $T = t/\theta$ est sans dimension.

$$[b^2] = \left[\frac{\rho\gamma}{h(r_e A)^2} \right] = \frac{ML^{-3}ML^{-1}T^{-2}}{(ML^{-3}T^{-1})^2} = L^2$$

, qui montre que $Y = x/b$ est sans dimension.

Remplaçons x et $\dot{x}$ dans l'équation différentielle par bY et $\frac{b}{\theta} \frac{dY}{dT}$:

$$\frac{\rho b^2 h}{4\gamma\theta^2} \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 + \frac{r_e A b^2 h}{2\gamma\theta} Y \frac{dY}{dT} - 1 = 0$$

$$\frac{\rho b^2 h}{4\gamma\theta^2} = \frac{\rho 4\rho\gamma h 4(r_e A)^2}{(r_e A)^2 h 4\gamma\rho^2} = 4 \quad \frac{r_e A b^2 h}{2\gamma\theta} = r_e A \frac{4}{(r_e A)^2} \frac{\rho\gamma}{h} \frac{h}{2\gamma} \frac{2r_e A}{\rho} = 4$$

On obtient :

$$4 \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 + 4Y \frac{dY}{dT} - 1 = 0$$

II.4.1.f.

$$\theta = \frac{10^3 \times (10^{-5})^2}{24 \times 10^{-3}} = 4,17 \mu s$$

(moitié de τ_L de II.3.2.c) ;

$$b = \frac{h^2}{6\eta_e} \sqrt{\frac{\rho 3\gamma}{h}} = \frac{(10^{-5})^2}{6 \times 10^{-3}} \sqrt{\frac{10^3 \times 7 \times 10^{-2}}{10^{-5}}} = 44,1 \mu m$$

II.4.1.g. A $T = 0, Y = 0$. Au début du mouvement, $Y \ll 1$ et l'équation différentielle peut être approximée par :

$$4 \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 - 1 = 0$$

, comme la pression capillaire force Y à augmenter, $\frac{dY}{dT} > 0$, d'où :

$$\frac{dY}{dT} = +\frac{1}{2}$$

, et :

$$Y = \frac{T}{2}$$

Cette approximation n'est valable que si :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 &\gg Y \frac{dY}{dT} \\ \frac{1}{2} &\gg Y \\ T &\ll 1 \end{aligned}$$

Au bout d'un temps suffisant, il faut donc considérer une autre approximation : $Y \gg 1$

$$4Y \frac{dY}{dT} - 1 = 0$$

$$2Y^2 - T = cste$$

Pour déterminer cette constante, faisons l'approximation, manifestement fautive, mais incontournable, d'étendre ces deux approximations jusque $Y = 1$ et d'écrire la continuité de $Y(T)$ à cette limite : $T = 2$ et donc : $cste = 0$.



Ne pas utiliser $T(0) = 0$ car on considère $T \gg 1$

Dans ce cadre d'approximation, la solution est :

si $T < 2, Y = \frac{T}{2}$;

si $T > 2, Y = \sqrt{\frac{T}{2}}$.

Vérifions que chaque approximation est valable dans son domaine de validité :

Si $Y \ll 1$:

$$\left(\frac{dY}{dT} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

, et :

$$Y \frac{dY}{dT} = \frac{Y}{4} : \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 \gg Y \frac{dY}{dT}$$

est bien vérifié ;

Si $Y \gg 1$:

$$\frac{dY}{dT} = \frac{1}{2\sqrt{2T}}, \left(\frac{dY}{dT}\right)^2 = \frac{1}{8T} = \frac{1}{16Y^2}$$

, et :

$$Y \frac{dY}{dT} = \frac{1}{4} : \left(\frac{dY}{dT}\right)^2 \ll Y \frac{dY}{dT}$$

est bien vérifié.

II.4.1.h.

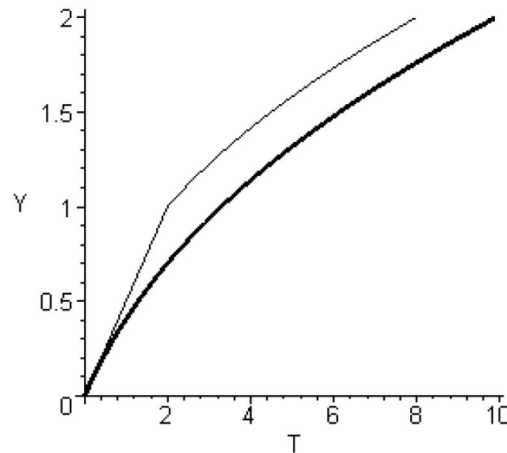


Figure 2

En gras, la solution exacte $Y(T)$, en plus fin la solution approximative proposée par l'énoncé.

Comme on l'a vu plus haut, les deux approximations se raccordent pour $T = 2$, soit $t = 2\theta = 8\mu s$, qui est le temps caractéristique demandé.

Remarque :

Les approximations demandées donnent une solution mathématiquement médiocre (mais peut-être physiquement suffisante), car l'équation différentielle en $T(Y)$ se résout exactement et très simplement :

$$\left(\frac{dT}{dY}\right)^2 - 4Y \frac{dT}{dY} - 4 = 0$$

$$\frac{dT}{dY} = 2Y \pm \sqrt{4Y^2 + 4}$$

comme $\frac{dT}{dY} > 0$, il faut choisir le signe + devant le radical ;

$$T = \int_0^Y dY (2Y + \sqrt{4Y^2 + 4}) = Y^2 + Y \sqrt{Y^2 + 1} + \operatorname{argsh} Y$$

Le terme en $\operatorname{argsh} Y$ implique que la constante d'intégration considérée en II.4.1.g n'est pas en réalité constante et qu'elle n'a pas de limite pour $Y \rightarrow \infty$.

Si $Y \ll 1$, on retrouve bien $T \approx 2Y$; si $Y \gg 1$, on retrouve bien $T \approx 2Y^2$.

II.4.2.a.

Appliquons la loi de Boyle à l'air renfermé :

$$P_0 L = P_{air}(L - x) \Rightarrow x = L \left(1 - \frac{P_0}{P_{air}}\right)$$

Le volume d'eau dans le tube est :

$$V_{eau} = hwx$$

, et le débit entrant :

$$Q = \frac{dV_{eau}}{dt} = \frac{hwLP_0}{P_{air}^2} \frac{dP_{air}}{dt}$$

de la forme :

$$Q = C \frac{dP_{air}}{dt}$$

, avec :

$$C = \frac{hwLP_0}{P_{air}^2}$$

II.4.2.b.

A l'équilibre :

$$P_{eq} = P_0 + \frac{2\gamma}{h} = 1.14 \text{ bar}$$

$$\frac{x_{eq}}{L} = 1 - \frac{1}{1.14} = 0.123$$

II.4.2.c.

Les relations entre P_{air} et Q sont :

$$\frac{2\gamma}{h} + P_0 - P_{air} = \frac{12\eta L}{h^3 w} \left(1 - \frac{P_0}{P_{air}}\right) Q$$

et,

$$Q = \frac{hwL}{P_{air}^2} \frac{dP_{air}}{dt}$$

Cela fait penser à :

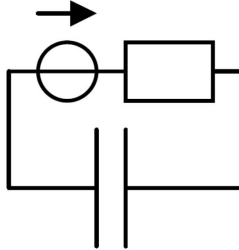


Figure 3

où la source de tension continue schématise la tension superficielle, la résistance la viscosité et le condensateur la variation de pression due à la loi de Boyle. Toutefois, les équations du micro-canal sont plus compliquées, comme si les valeurs de la résistance et de la capacité dépendaient de l'état électrique du réseau.

II.5. Actuateur de fluides diélectriques.

II.5.1.

$$C = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_0 w (x_{eq} + \xi)}{h} + \frac{\varepsilon_a \varepsilon_0 w (L - x_{eq} - \xi)}{h}$$

II.5.2.

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$

II.5.3.

$$\vec{F}_{el} = \frac{dW}{d\xi} \vec{e}_x = \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_a) \varepsilon_0 w U^2}{2h} \vec{e}_x$$

cette force tire le liquide vers l'intérieur du tube ; sous son effet, la pression dans l'air enfermé à l'équilibre passe de :

$$P_{air} = P_0 + \Delta P_{cap}$$

à :

$$P'_{air} = P_0 + \Delta P_{cap} + P_{el}$$

, avec :

$$P_{el} = \frac{F_{el}}{hw} = \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_a) \varepsilon_0 U^2}{2h^2}$$

II.5.4. Selon la loi de Boyle,

$$P_0 L = (P_0 + \Delta P_{cap}) (L - x_{eq}) = (P_0 + \Delta P_{cap} + P_{el}) (L - x_{eq} - \xi_{eq})$$

D'où :

$$\frac{\xi_{eq}}{L} = \frac{P_0 P_{el}}{(P_0 + \Delta P_{cap}) (P_0 + \Delta P_{cap} + P_{el})}$$

Si ΔP_{cap} et P_{el} sont petits devant P_0 , alors :

$$\frac{\xi_{eq}}{L} \approx \frac{P_{el}}{P_0}$$

II.5.5.

$$P_{el} = \frac{(80 - 1) \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^2}{2 \times (10^{-5})^2} = 350 \text{ Pa}$$

$$\xi_{eq} = 1000 \mu m \times \frac{10^5 \times 350}{(1,14 \times 10^5)^2} = 2,7 \mu m$$

Ce dispositif est efficace pour contrôler précisément un petit déplacement, mais ne peut créer un grand déplacement à cause de la limitation de U/h au champ disruptif, dans l'air sec $3 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$; en effet, avec les valeurs de l'énoncé, $U/h = 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

III. Microfluidique et diffusion moléculaire

III.1. Diffusion de traceurs dans un fluide au repos

III.1.1.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c = \frac{c_0}{2}$$

III.1.2.

✕ **Réponse 1 : Grandeurs caractéristiques** On part de l'équation de diffusion en considérant les grandeurs caractéristiques :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{c}{T_w} = D \frac{c}{\delta_y^2}$$

D'où :

$$T_w = \frac{\delta_y^2}{D}$$

✕ Réponse 2 : Théorème de Vaschy-Buckingham

- ☛ A priori, la solution de cette équation différentielle, avec les conditions aux limites :

$$j = -D \frac{\partial c}{\partial y} \left(y = \pm \frac{w}{2} \right) = 0$$

et :

$$c(t = 0) = 0$$

, dépend de y, t, D et w .

- ☛ T_w est une fonction de D, w qui a la dimension d'un temps, soit $T_w = k \frac{w^2}{D}$, où k est une constante universelle non dimensionnée, qui dépend de la façon dont on définit T_w .
- ☛ Si on suit l'énoncé, il existe une relation entre T_w, δ_y, w et D . Le théorème de Vaschy-Buckingham dit que cette relation est de la forme :

$$T_w = \frac{w^2}{D} f \left(\frac{\delta_y}{w} \right)$$

- ☛ L'analyse dimensionnelle ne permet pas de déterminer la constante k ou la fonction f et donc de faire le calcul demandé.

✕ Réponse 3 : recherche de solution pour l'équation

- ☛ Nous cherchons $c(y, t)$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \\ c(y, 0) = c_0 \text{ si } y > 0 \\ c(y, 0) = c_0 \text{ si } y < 0 \end{cases}$$

- ☛ Supposons d'abord w infini. Alors, la solution est :

$$c = \frac{c_0}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4Dt}} \right) \right)$$

, où :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du$$

- ☛ Le temps de relaxation est tel que :

$$\operatorname{erf} \left(\frac{\delta_y}{\sqrt{4DT_w}} \right) = \frac{1}{2}$$

, soit :

$$\frac{\delta_y}{\sqrt{4DT_w}} = 0,477$$

, soit environ :

$$T_w = \frac{\delta_y^2}{D}$$

- ☛ En réalité, comme w est fini, le temps de relaxation est inférieur, car l'absence de diffusion au delà de $|y| = w/2$ accélère la relaxation. Toutefois, le calcul de T_w étant difficile, nous allons appliquer la formule précédente.
- ☛ En prenant $\delta_y = \frac{w}{2}$, on trouve :

$$T_w = \frac{w^2}{4D} = \frac{(10^{-4})^2}{4 \times 10^{-11}} = 250 \text{ s}$$

III.2. Diffusion de traceurs dans un écoulement biphasique

III.2.1. La densité de courant de convection des traceurs est obtenue en considérant le débit de particules à travers une surface S pendant dt :

$$\frac{dN}{dt} = \iint \vec{j}_{conv} \cdot d\vec{S} = j_{conv} S$$

et :

$$dN = v_0 dt \times S \times c$$

D'où :

$$\vec{j}_{conv} = cv_0 \vec{e}_x$$

, cette expression est valable même si D est non nul.



Il ne s'agit pas du vecteur densité de courant convectif de quantité de mouvement

III.2.2. L'équation de conservation des traceurs est :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_{conv} + \vec{j}_{diff})$$

, où la densité de courant de diffusion est :

$$\vec{j}_{diff} = -D \vec{\text{grad}} c = -D \frac{\partial c}{\partial x} \vec{e}_x$$

D'où :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial c}{\partial x} + D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right)$$

En régime stationnaire, on obtient :

$$0 = v_0 \frac{\partial c}{\partial x} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right)$$

Remarque :

Une autre solution consiste à partir de l'équation de conservation en introduisant la dérivée particulière :

$$\frac{Dc}{Dt} = -\text{div}(\vec{j}_{diff})$$

Avec :

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}) c = \frac{\partial c}{\partial t} + v_0 \frac{\partial c}{\partial x}$$

En introduisant la loi de Fick, on obtient bien le même résultat.

III.2.3.

- ✗ Le temps caractéristique convectif est $\frac{h}{v_0}$; ce n'est pas $\frac{w}{v_0}$, car les tourbillons qui peuvent s'établir ont une dimension h et non w ; ainsi, dans une expérience de transport convectif de la chaleur entre deux plaques grandes et proches de températures différentes, la taille des cellules de convection est la distance entre plaques, et non la largeur des plaques.
- ✗ Le temps caractéristique diffusif sur une longueur h est $\frac{h^2}{D}$.
- ✗ On en déduit :

$$Pe = \frac{hv_0}{D} = \frac{10^{-5} \times 10^{-4}}{10^{-11}} = 100$$

- ✕ Comme ce nombre est élevé, on peut négliger la diffusion dans la direction de la convection et l'équation du problème se réduit à :

$$v_0 \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0$$

III.2.4.

- ✕ **Réponse 1 : Grandeurs caractéristiques** On réécrit l'équation différentielle avec des grandeurs caractéristiques en considérant que la diffusion suivant y prédomine :

$$v_0 \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow v_0 \frac{c}{x} = D \frac{c}{\delta_y^2}$$

Soit :

$$\delta_y = \sqrt{\frac{Dx}{v_0}}$$

- ✕ **Réponse 2 : Résolution de l'équation**

☛ Faisons le changement de variables qui rend le problème sans dimension : $Y = \frac{y}{w}$, $X = \frac{xD}{w^2 v_0}$.

☛ Alors :

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{D}{w^2 v_0} \frac{\partial c}{\partial X}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{w} \frac{\partial c}{\partial Y}$$

et :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2}$$

☛ La concentration $c(X, Y)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial c}{\partial X} = \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2}$$

☛ les conditions aux limites sont :

$$\frac{\partial c}{\partial Y} \left(X, \pm \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$c(0, Y) = 0 \text{ si } Y > 0$$

et

$$c(0, Y) = c_0 \text{ si } Y < 0$$

☛ Pensons au problème analogue : un tube infini est initialement dans l'état $c(x, 0) = 0$ si $x > 0$ et $c(x, 0) = c_0$ si $x < 0$; trouver $c(x, t)$ pour $t > 0$.

☛ La solution de :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

avec ces conditions aux limites est une fonction affine de :

$$\operatorname{erf} \left(-\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right)$$

, où :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy$$

- ☛ En faisant correspondre à tX et à xY , par analogie, la solution à notre problème de diffusion convective prend une valeur critique pour :

$$\operatorname{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{4X}}\right) = \frac{1}{2}$$

, soit :

$$Y = \sqrt{X}$$

- ☛ Par conséquent, δ_y correspond donc environ à $Y = \sqrt{X}$, soit :

$$\frac{\delta_y}{w} = \sqrt{\frac{xD}{w^2 v_0}}$$

ou :

$$\delta_y(x) = \sqrt{\frac{xD}{v_0}}$$

✕ Réponse 3 : Théorème de Vaschy-Buckingham

Si, comme le propose l'énoncé, on admet que $\delta_y = f(x, D, v_0)$, la démarche montre que :

$$\delta_y = kx^\alpha \left(\frac{D}{v_0}\right)^{1-\alpha}$$

, où $0 < \alpha < 1$, puisque δ_y doit être fonction croissante de x et D ; mais cette démarche ne permet pas de déterminer plus précisément α .

III.2.5.

Il suffit d'observer la limite de la partie colorée et d'exploiter la formule précédente pour une vitesse adaptée. La mesure de D dépend alors d'une seule observation, alors que la mesure d'un temps nécessite beaucoup plus d'observations sur une durée qui peut être importante, la diffusion étant un phénomène lent.