

# EPREUVE DE TIPE PARTIE D

**TITRE : "La fin de vie des étoiles de faible masse"**

- Temps de préparation : **2h15**
- Temps de présentation devant le jury : **10 minutes**
- Entretien avec le jury : **10 minutes**

## **1 - GUIDE POUR LE CANDIDAT**

Le dossier comporte 12 pages, les lignes et les formules possèdent des numérotations indépendantes.

Travail suggéré au candidat :

- Faire une synthèse du texte en dégagant les diverses problématiques évoquées
- Présenter plus en détail une des parties du texte.

## **2 - CONSEIL GÉNÉRAUX POUR LA PRÉPARATION DE L'ÉPREUVE**

Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.

Réservez du temps pour préparer l'exposé devant le jury.

Vous pouvez écrire sur le présent dossier, mais celui-ci est à remettre au jury en fin d'oral, ainsi que TOUS les autres dossiers, objets mis sur la table pendant votre prestation.

En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents dont vous comptez vous servir pendant l'oral, en entrant dans la salle vous devez être prêts à débiter votre exposé.

# 1 La vie sur la séquence principale

En physique comme ailleurs la pression  $P$  est une grandeur qui représente une force  $F$  exercée sur une surface  $S$

$$P = F/S \quad (1)$$

Dans le cas d'une étoile sphérique et de la force de gravitation de Newton nous avons donc

$$P_g = -\frac{GM^2}{R^2}/4\pi R^2 = -\frac{GM^2}{4\pi R^4} \quad (2)$$

où  $M$  et  $R$  représentent respectivement la masse et le rayon de l'étoile considérée. Tant que l'étoile est sur la séquence principale cette pression est contre-balançée par la pression cinétique ou thermique due à l'agitation des particules qui constituent l'étoile : En assimilant cette dernière à un gaz parfait formé de  $N$  particules occupant un volume  $V$  à la température  $T$ , on a la relation bien connue

$$PV = NkT \quad (3)$$

ou  $k$  est la constante de Boltzmann. Si l'étoile est sphérique et principalement constituée d'hydrogène, si  $m_p$  représente la masse du proton (en négligeant la masse de l'électron) on a  $N = M/m_p$  et  $V = 4\pi R^3/3$ . Ainsi

$$P_t = \frac{3MkT}{4\pi R^3 m_p} \quad (4)$$

La pression gravitationnelle est opposée à la pression thermique (dont elle est la source), une étoile de la séquence principale est simplement le résultat de l'équilibre entre ces deux termes antagonistes  $P_g + P_t = 0$ . Cette relation permet d'obtenir la température en fonction de la masse et du rayon

$$T = \frac{1}{3} \frac{GMm_p}{kR} \quad (5)$$

pour le Soleil ( $M_\odot = 2 \times 10^{30} kg$  et  $R_\odot = 6.95 \times 10^8 m$ ) on trouve une température de l'ordre de quelques millions de Kelvins. C'est bien l'ordre de grandeur de la température centrale du Soleil. Une autre pression peut aussi jouer son rôle, il s'agit de la pression de radiation donnée par la formule de Stefan-Boltzmann

$$P_r = \sigma T^4 \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{45 \hbar c^3} \quad (6)$$

Elle n'intervient globalement que pour 1% de la pression totale, mais elle demeure fondamentale dans les régions centrales où la température est la plus élevée. De plusieurs millions de Kelvins au centre, la température du Soleil décroît jusqu'à 5700 Kelvins en surface. Cette température centrale et le confinement gravitationnel sont suffisants pour déclencher des réactions de fusion thermonucléaire de



qui n'ont pourtant rien à voir avec les planètes. Quel est donc le stade ultime, dans lequel on s'attend à retrouver les cadavres d'étoile de masse inférieure à  $8M_{\odot}$ ? La réponse fut apportée vers 1930 par un jeune physicien indien qui allait devenir l'un des plus grand astrophysicien du XX<sup>ème</sup> siècle : Subrahmanyan Chandrasekhar.

## 2 Physique de l'état dégénéré

### 2.1 La découverte de Sirius B

En 1838, en utilisant la méthode des parallaxes, F.W. Bessel détermina la distance de l'étoile 61 de la constellation du Cygne. Encouragé par ses résultats, il entreprit la mesure de la distance de nombreuses étoiles dont Sirius, de la constellation du grand chien, l'étoile la plus brillante du ciel nocturne. Son angle de parallaxe de 0.377 seconde d'arc correspond à une distance de seulement 8,65 années lumière. En suivant le mouvement de cette dernière, il constata une perturbation périodique. Après 10 années de minutieuses observations, Bessel conclut que Sirius était en fait un système binaire, et bien qu'incapable d'observer le compagnon de l'étoile brillante, il déduisit que celui-ci avait une période orbitale d'environ 50 ans. C'est ainsi que de nombreux astronomes tentèrent d'observer le chiot, compagnon ténu de l'étoile du chien. Cette quête fut réalisée en 1862 par A. Clark qui utilisa pour cet exploit une nouvelle génération de télescopes de 50 cm fabriqués par son père. La brillante Sirius A se révéla environ mille fois plus brillante que son chiot Sirius B. Le détail des orbites permit de peser ces deux étoiles, et l'on conclut que Sirius A avait une masse de  $2,3M_{\odot}$  et son chiot  $1M_{\odot}$ . Les mesures de Clark avaient été rendues possibles par le passage au périastre de Sirius B, seul moment favorable aux observations, compte tenu de la différence de luminosité ( $L_A = 23.5L_{\odot}$  et  $L_B = 0.03L_{\odot}$ ). Au passage suivant (... 50 ans plus tard ...!), les progrès de la spectroscopie allaient permettre de mesurer la température de surface de Sirius B. Les faibles caractéristiques de celle-ci laissaient présager un astre froid et rouge. En 1915, les observations de W. Adams qui travaillait au fameux observatoire du Mont Wilson montrèrent un chiot bleu émettant dans l'ultraviolet et dont la température d'environ 27 000 Kelvins, est bien supérieure aux 9910 de Sirius A.

Les toutes nouvelles lois du rayonnement du corps noir, qui permirent à Planck et Einstein de poser les bases de la mécanique quantique, s'appliquent à Sirius B : la détermination de son rayon ( $0.008 R_{\odot}$ ) et donc de la densité de Sirius B (environ 4 tonnes par  $cm^3$ ) furent un véritable coup de tonnerre dans la communauté des astrophysiciens. Si certains trouvaient cette valeur absurde, d'autres, comme A. Eddington, voyaient en elle la source de nouvelles avancées en physique : Profitant du champ gravitationnel intense que devrait créer un tel astre, il calcula la déviation que celui devait induire sur les rayons lumineux conformément à la toute nouvelle théorie de la relativité générale. La vérification expérimentale de cette déviation en 1925, toujours par Adams, fit d'une pierre deux coups. La nouvelle théorie d'Einstein se voyait couronnée d'un nouveau succès et le ciel des astronomes se voyait, pour la première fois, irréfutablement orné d'un objet compact.

### 2.2 La théorie de Chandrasekhar

Bien qu'Eddington fut l'un des premiers à prendre en considération les propriétés extraordinaires de ces naines blanches, il ne pensait pas qu'un nouveau type de pression pourrait les expliquer. Il fut d'ailleurs l'un des principaux détracteurs de la nouvelle théorie proposée par un jeune indien.

A l'âge de 17 ans, en 1928 dans la ville de Madras sur le golfe du Bengale, le jeune et brillant étudiant Subrahmanyan Chandrasekhar sollicite une entrevue à l'éminent A. Sommerfeld, alors en visite dans son université. C'est selon la légende, sur les conseils du Maître, à l'issue de cette entrevue,

que le jeune homme se serait tourné vers le couplage entre deux nouvelles théories la mécanique quantique et la relativité restreinte. En 1930, âgé de 19 ans, il s'embarque, la dernière semaine de juillet, pour un voyage de 18 jours vers Cambridge où il venait d'être accepté pour un doctorat dans le prestigieux laboratoire de ses héros Eddington et Fowler. Il avait décidé de s'intéresser durant la traversée au problème soulevé par Eddington sur l'origine de ces naines blanches et d'étudier une piste proposée par Fowler. Il réalisera en fait un travail qui marquera l'histoire des sciences et qui lui vaudra le prix nobel 54 ans plus tard!

### 2.2.1 Un nouveau type de pression

La nouveauté introduite par Fowler est la prise en compte d'un nouveau type de pression d'origine quantique : La pression de dégénérescence des fermions. Un des fondements de la nouvelle mécanique quantique est la dualité onde-corpuscule étendue à tous les types de particules (Einstein l'avait compris avec le photon dans l'effet photo-electrique dès 1905, de Broglie l'étendra à une particule quelconque dans les années 20), la conséquence pour la pression est claire : si on comprime de plus en plus un ensemble de particules, "l'espace" alloué à chaque particule, que l'on peut imaginer comme une boîte, va diminuer, si d'autre part on associe une longueur caractéristique à une particule (sa longueur d'onde), il va exister un taux de compression tel que la taille de la boîte va devenir égal à la longueur d'onde de la particule. Si l'on continue à comprimer le système la taille des boites diminuera et la longueur d'onde des particules dans chaque boîte devra retrécir pour ne pas empiéter sur la particule d'à coté ... Une diminution de la longueur d'onde est une augmentation de l'énergie de la particule, et donc, de sa vitesse. Pour un photon de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda$ , nous avons en effet

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (9)$$

où  $h$  est la constante de Planck, et pour une particule de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$ , l'énergie cinétique est donnée par (en introduisant l'impulsion  $\vec{p} = m\vec{v}$ )

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (10)$$

L'augmentation de la vitesse amplifie l'intensité des chocs entre les particules et fait donc croître la pression. Ce type de pression ne s'applique qu'à l'une des deux familles de particules distinguées par la mécanique quantique : les fermions. Le principe d'exclusion de Pauli interdit en effet à 2 fermions d'être dans le même état quantique, alors que tout est possible pour les bosons. Cette pression de claustrophobie fermionique est appelée pression de dégénérescence quantique car toutes les particules dégènèrent dans leur état le plus fondamental. Bien sur ce type de pression existe dans tous les états de la matière, mais ne devient non négligeable que pour les très fortes densités comme c'est le cas dans les naines blanches.

Le traitement de ce problème peut s'envisager sous plusieurs formes, nous considèrerons l'approche suivie par Fowler puis Chandrasekhar, c'est-à-dire celle de la physique statistique quantique.

### 2.2.2 Principes de la physique statistique

Nous considèrons que notre naine blanche est une sphère de rayon  $R$  composée de  $n$  atomes de carbone, pour simplifier les calculs nous supposerons que la densité  $\rho$  est constante dans l'étoile. La température de plusieurs dizaines de milliers de Kelvins assure une ionisation complète des atomes de carbone. Le confinement gravitationnel assure donc l'existence d'un gaz de  $N = Zn$  électrons et de masse  $M = ANm_p/Z$ . Dans cette dernière relation nous avons négligé la masse de l'électron devant

120 celle du proton (prise égale à celle du neutron),  $A$  représente le nombre de nucléons dans le noyau (12 pour le carbone ordinaire) et  $Z$  le numéro atomique, nous avons donc pour le carbone ( $Z = 6$ )

$$6n = N, \quad M = 2Nm_p \quad \text{soit} \quad N = \frac{M}{2m_p} \quad (11)$$

La pression de dégénérescence est due<sup>3</sup> aux électrons qui sont les plus rapides et peuvent être considérés libres de toute force entre deux collisions : On parle d'un gaz parfait quantique.

125 Considérons l'ensemble  $\mathbb{E}$  de tous les états accessibles à ces électrons (on parle en physique d'espace des phases), et découpons-le en cellules regroupant tous les électrons ayant la même énergie  $\varepsilon_i$  à  $d\varepsilon_i$  près. Chaque cellule contient  $n_i$  électrons. Nous avons donc de façon formelle

$$N = \sum_i n_i \quad \text{et} \quad E = \sum_i n_i \varepsilon_i \quad (12)$$

où  $E$  représente l'énergie totale des électrons contenue dans l'étoile. L'idée même de la physique statistique est d'abandonner la vision discrète des choses contenue dans les relations (12), pour une vision continue et probabiliste. Prenant comme axiome que les particules sont indépendantes, elles 130 sont décrites par une seule densité de probabilité de présence dans l'espace des phases  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ , qui représente la probabilité pour qu'à l'instant  $t$  une particule (représentative de toutes) soit en  $\vec{r}$  à  $d\vec{r}$  près, avec une impulsion  $\vec{p}$  à  $d\vec{p}$  près.

Il est bien connu qu'un état d'énergie peut être occupé par plusieurs particules, par exemple chacun des niveaux d'énergie

$$E_n = -\frac{m_p e^4}{2\hbar} \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

135 accessibles à un électron de charge  $e$  dans l'atome d'hydrogène est composé de  $g_n = n^2$  états quantiques. On dit que chaque état d'énergie est dégénéré. On dispose donc de  $N$  particules réparties dans des cellules indépendantes, chaque cellule contient  $n_i$  particules, et se subdivise en  $g_i$  micro-cellules. On appelle complexion, une façon de répartir ces  $N$  particules dans toutes ces micro-cellules.

Le grand mérite de L. Boltzmann fût de comprendre que l'on pouvait relier l'état d'équilibre d'un 140 système au nombre de complexions qui le caractérise. En définissant l'entropie par le logarithme du nombre  $\Omega$  de complexions distinctes multiplié par la constante de Boltzmann,

$$S = k \ln \Omega \quad , \quad (14)$$

il comprit que l'état d'équilibre d'un système était celui qui rendait l'entropie maximale.

Le nombre total de complexions distinctes réalisables dépend fortement des particules que l'on considère et des propriétés qu'on leur attribue, c'est un simple calcul de dénombrement :

145 – En mécanique classique, les particules sont discernables et ne sont pas soumises à un principe d'exclusion

$$\Omega_{cla} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad (15)$$

– En mécanique quantique, les particules de même type sont indiscernables. Il existe 2 familles de particules : Les fermions et les bosons. Les fermions sont soumis au principe d'exclusion de

---

<sup>3</sup>tout au moins dans un premier temps ...

Pauli : Un état est occupé par un seul fermion à la fois, on ne peut donc pas en mettre plus d'un par micro-cellule. Les bosons n'y sont pas soumis ...

$$\begin{aligned}\Omega_{bos} &= \prod_i C_{g_i}^{g_i+n_i} && \text{pour les bosons} \\ \Omega_{bos} &= \prod_i C_{n_i}^{g_i} && \text{pour les fermions}\end{aligned}\tag{16}$$

En cherchant le maximum de  $S$  sous les contraintes  $N = cste$  et  $E = cste$ , et en utilisant la formule de Stirling

$$\text{Si } N \gg 1, \quad \ln N! \simeq N \ln N - N\tag{17}$$

on trouve les diverses distributions d'équilibre pour les gaz parfaits

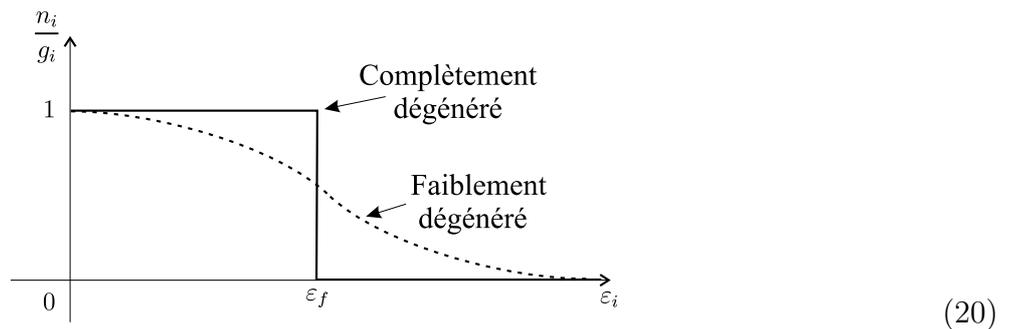
$$\begin{aligned}n_i^{mb} &= g_i e^{-\beta \varepsilon_i} && \text{Distribution de Maxwell-Boltzmann (Classique)} \\ n_i^{be} &= \frac{g_i}{e^{\beta \varepsilon_i - \mu} - 1} && \text{Distribution de Bose-Einstein pour les bosons (Quantique)} \\ n_i^{fd} &= \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_f)} + 1} && \text{Distribution de Fermi-Dirac pour les fermions (Quantique)}\end{aligned}\tag{18}$$

Le potentiel chimique  $\mu$  ou l'énergie de Fermi  $\varepsilon_f$ , sont des quantités associées à la conservation du nombre de particules. La grandeur  $\beta$  peut être reliée à la température d'équilibre  $T$  du système. En effet, en utilisant l'un des principes de la thermodynamique qui veut qu'à l'équilibre  $dE = TdS$ , on trouve

$$\beta = \frac{1}{kT}\tag{19}$$

Revenons à présent aux électrons libres dans notre naine blanche ...

En tant que fermions, ils sont décrits par la distribution de Fermi-Dirac, dont la courbe représentative est indiquée ci-dessous



Si la densité est faible, le gaz n'est que faiblement dégénéré, les électrons peuvent occuper tous les états d'énergie. Dans le cas des fortes densités, ils sont au contraire forcés de "s'empiler" dans tous les états d'énergie les plus bas à raison de  $n_i/g_i = 1$  par micro-cellule. Dans cet état dégénéré, les relations (12) deviennent donc

$$N = \sum_i g_i \quad \text{et} \quad E = \sum_i g_i \varepsilon_i\tag{21}$$

En remplaçant la somme discrète par une somme continue (intégrale) sur tout l'espace des phases, pondérée par la densité de probabilité, il vient à l'équilibre

$$N = 2 \times \int \int d\vec{r} d\vec{p} \frac{f(\vec{r}, \vec{p})}{\Delta \vec{r} \Delta \vec{p}}\tag{22}$$

Le facteur 2 est un raffinement qui vient signaler qu'en fait chaque état quantique peut être occupé par deux électrons de spin opposés mais pas plus ! Le facteur  $\Delta \vec{r} \Delta \vec{p}$  représente le volume minimal d'une micro-cellule de l'espace des phases dont l'inverse est simplement le facteur de dégénérescence. A ce stade, le principe d'incertitude de Heisenberg vient nous renseigner sur le fait que

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim \Delta y \cdot \Delta p_y \sim \Delta z \cdot \Delta p_z \sim h \quad (23)$$

il convient donc de choisir  $\Delta \vec{r} \Delta \vec{p} = h^3$ .

Dans notre état dégénéré, tant que  $\varepsilon < \varepsilon_f$ , on est sur de trouver à chaque fois une particule dans chaque micro-cellule, ainsi

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon < \varepsilon_f \\ 0 & \text{si } \varepsilon \geq \varepsilon_f \end{cases} \quad (24)$$

l'intégration (22) peut donc se faire en deux temps : sur les positions d'abord on trouve le volume total occupé par le gaz d'électrons, soit le volume  $V$  de la naine blanche, sur les impulsions ensuite où l'on passe en coordonnées sphériques pour avoir

$$N = \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_f} 4\pi p^2 dp \quad (25)$$

La borne supérieure de l'intégrale se comprend aisément : comme l'énergie est limitée à  $\varepsilon_f$  et que pour une particule libre  $E = p^2/2m$ , le module de l'impulsion est limité à l'impulsion de Fermi

$$p_f = \sqrt{2m\varepsilon_f} \quad (26)$$

Comme tout le monde sait intégrer un carré, la relation (25) devient

$$N = \frac{8\pi V p_f^3}{3h^3} \quad (27)$$

Ce petit calcul nous permet d'obtenir sur un plateau l'expression de l'impulsion de Fermi (où l'on a introduit comme habituellement en mécanique quantique  $\hbar = h/2\pi$ )

$$p_f = \hbar \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} \quad (28)$$

Nous sommes à présent en mesure d'expliquer le raisonnement de Fowler pour calculer la pression de dégénérescence quantique.

### 2.2.3 Le calcul de Fowler

Comment trouver la pression de notre gaz parfait quantique d'électrons dégénérés ? C'est là toute la magie de la physique statistique qui permet de relier entre elles les diverses grandeurs thermodynamiques.

En considérant d'éventuelles variations quasistatiques du volume, le second principe de la thermodynamique s'écrit

$$dE = TdS - PdV \quad (29)$$

Dans notre état complètement dégénéré et si toutes les particules sont indiscernables, il n'existe qu'une seule façon de répartir les  $N$  particules dans toutes les micro-cellules, ainsi  $\Omega = 1$  : l'entropie

est nulle et ne varie pas. <sup>4</sup> La relation (29) nous indique donc que l'énergie ne dépend que du volume et que la pression du gaz est simplement donnée par

$$P = -\frac{dE}{dV} \quad (31)$$

195 Nous avons remarqué dès le début de notre exposé que l'énergie du système est accessible par une sommation discrète (cf. (12)). Un passage à la limite continue et la prise en compte de la dégénérescence complète donne pour l'énergie (via un raisonnement en tout points identiques à celui fait pour le calcul de  $N$ )

$$E = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_f} \varepsilon p^2 dp \quad (32)$$

Fowler note alors que  $\varepsilon = p^2/2m$  et obtint

$$E = \frac{V}{2m\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_f} p^4 dp \quad \text{soit} \quad E = \frac{V p_f^5}{10m\pi^2 \hbar^3} \quad (33)$$

en remplaçant  $p_f$  par sa valeur calculée précédemment (formule (28)), on trouve finalement

$$E = \left( \frac{243\pi^4}{1000} \right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{m} N^{5/3} V^{-2/3} \quad (34)$$

200 Il ne reste plus qu'à utiliser la relation (31) pour obtenir la pression

$$P = \frac{(9\pi^4)^{1/3} \hbar^2}{5 m} \left( \frac{N}{V} \right)^{5/3} \quad (35)$$

En utilisant des calculs que nous avons déjà oubliés reliant  $N$  et  $M$  (cf. (11)), et l'hypothèse de sphéricité pour le calcul du volume, on parvient finalement à

$$P = \frac{\hbar^2}{15m \pi^{1/3}} \left( \frac{9M}{8m_p} \right)^{5/3} \frac{1}{R^5} \quad (36)$$

205 Nous avons vu qu'une étoile est le résultat de l'équilibre entre la pression gravitationnelle et sa pression interne, dans le cas d'une naine blanche, on peut invoquer la pression de dégénérescence quantique des électrons pour soutenir l'étoile. La condition d'équilibre  $P_g + P = 0$  s'écrit maintenant (en se souvenant de (2))

$$\frac{\hbar^2}{15m \pi^{1/3}} \left( \frac{9M}{8m_p} \right)^{5/3} \frac{1}{R^5} = \frac{GM^2}{4\pi R^4} \quad (37)$$

soit

$$RM^{1/3} = \frac{9 (3\pi^2)^{1/3} \hbar^2}{40 G m m_p^{5/3}} \simeq 5.37 \times 10^{16} m.kg^{1/3} \quad (38)$$

---

<sup>4</sup>Celà revient à supposer que la température est négligeable devant la température de Fermi  $\theta_f$  du système. Par définition, nous avons

$$\theta_f = \frac{\varepsilon_f}{k} = \frac{\hbar^2}{2mkR^2} \left( \frac{9\pi M}{9m_p} \right)^{2/3} \quad (30)$$

qui vaut presque 4 milliard de Kelvins, face à la poussive centaine de millions de Kelvins du centre de la naine blanche ...

Pour quelques masses solaires ( $1M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ ), on trouve bien une naine blanche dont le rayon est de l'ordre de celui de la Terre, tout ceci conformément aux observations de Sirius B, et des nouvelles naines blanches observées depuis.

Le résultat de Fowler, poussa Eddington au raisonnement suivant : Quelles que soit leurs masses, les étoiles termineront toutes leur existence dans un état de naine blanche vérifiant la relation de Fowler. En rayonnant leur énergie dans l'espace, leur température diminuera au fil du temps, de blanche la naine deviendra progressivement grise, puis noire. Quel fabuleux destin pour une étoile que de finir en un diamant<sup>5</sup> ...

Lorsque Chandrasekhar s'embarque sur ce bateau à destination de l'Angleterre, avec dans son cartable l'article de Fowler et dans son esprit les conseils de Sommerfeld, l'espoir d'Eddington va voler en poussière, tout au moins en partie.

#### 2.2.4 Le calcul de Chandrasekhar

En y regardant de loin bien peu de choses changent dans le nouveau calcul du jeune indien. En fait, tant dans les principes que dans résultats, il est révolutionnaire !

L'idée de départ de Chandrasekhar vient du principe d'incertitude d'Heisenberg : Si l'on "connait" bien la position d'une particule quantique, on "connait" moins bien sa vitesse et réciproquement ! La conclusion est donc claire : si, comme le prouve le calcul de Fowler, les électrons sont à ce point confinés (et donc localisés) que leur dégénérescence provoque une pression suffisante pour empêcher l'effondrement gravitationnel, alors ils sont animés d'une très grande vitesse<sup>6</sup> ...

Et, suivant le conseil de Sommerfeld, il faut obligatoirement remplacer la mécanique de Newton par celle d'Einstein.

La conséquence technique est relativement simple : selon les lois de la relativité restreinte, il existe une vitesse infranchissable  $c$ , celle de la lumière dans le vide, et à toute masse est associé un énergie via la célèbre relation  $E_o = mc^2$ . Ainsi pour des électrons relativistes, l'énergie n'est plus simplement seulement donnée par la relation classique (10) utilisée par Fowler, mais doit être remplacée par la relation d'Einstein<sup>7</sup>

$$\varepsilon^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (39)$$

Reprenons dans ces conditions le calcul de l'énergie, la relation (32) devient

$$E = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_f} (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} p^2 dp \quad (40)$$

en posant  $x = p/mc$ , et donc  $x_f = p_f/mc$ , l'énergie devient

$$E = \frac{V m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{x_f} x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (41)$$

après deux intégration par partie, Chandrasekhar vint à bout de cette intégrale et obtint

$$E = \frac{V m^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} [2x_f(x_f^2 + 1)^{3/2} - x_f(x_f^2 + 1)^{1/2} - \arg \sinh x_f] \quad (42)$$

<sup>5</sup>Un arrangement macroscopique naturel d'atomes de carbone est en effet ce que l'on appelle plus couramment un diamant ...

<sup>6</sup>un rapide calcul d'ordre de grandeur donne  $v \simeq c/3$

<sup>7</sup>L'impulsion et l'énergie cinétique deviennent  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$  et  $E = \gamma mc^2$  où  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  est le facteur de Lorentz. En combinant le carré de ces deux relations on trouve la relation d'Einstein. Si  $v \ll c$ , on retrouve  $E = p^2/2m$ .

Il constate donc qu'un calcul exact de la pression va devenir farouchement compliqué, il tente donc la limite ultra-relativiste, c'est-à-dire la situation dans laquelle l'impulsion des électrons est très grande devant leur énergie de masse<sup>8</sup>

$$p_f \gg mc \quad \text{soit} \quad x_f \gg 1 \quad (43)$$

240 un développement limité à la portée de tout navigateur lui permet d'obtenir

$$\frac{[2x_f(x_f^2 + 1)^{3/2} - x_f(x_f^2 + 1)^{1/2} - \arg \sinh x_f]}{8} \underset{x_f \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x_f^4 + x_f^2}{4} - \frac{\ln 2x_f}{8} + \frac{1}{32} (1 - x_f^{-2} + O(x_f^{-4})) \quad (44)$$

en négligeant le terme logarithmique et les suivants, il obtient dans le cas ultra-relativiste

$$E = \frac{V m^4 c^5 x_f^4}{4\pi^2 \hbar^3} \left[ 1 + \frac{1}{x_f^2} \right] \quad (45)$$

en reportant la valeur inchangée de l'impulsion de Fermi (cf. relation (28)), il vient

$$E = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \hbar c (3\pi^2 N)^{4/3} V^{-1/3} + \frac{m^2 c^3}{\hbar} (3\pi^2 N)^{2/3} V^{1/3} \right] \quad (46)$$

et le calcul de la pression s'en déduit directement par dérivation sur  $V$

$$P = \frac{1}{4} \left[ \hbar c (3\pi^2)^{1/3} \left( \frac{N}{V} \right)^{4/3} - \frac{2m^2 c^3}{\hbar (3\pi^2)^{1/3}} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \right] \quad (47)$$

245 on y est presque ... en exprimant comme dans le cas classique  $N$  en fonction de  $M$  (relation (11)) et  $V$  en fonction de  $R$  pour la naine sphérique, quelques manipulations fournissent

$$P = \frac{\hbar c}{12\pi^{2/3}} \left( \frac{9M}{8m_p} \right)^{4/3} \frac{1}{R^4} \left[ 1 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \frac{R^2}{(9\pi M/8m_p)^{2/3}} \right] \quad (48)$$

en cherchant l'équilibre avec la pression gravitationnelle, on trouve à présent une relation de la forme

$$\frac{R}{R_c} = \left( \frac{M}{M_c} \right)^{1/3} \left[ 1 - \left( \frac{M}{M_c} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \quad (49)$$

où l'on a introduit la masse et le rayon de Chandrasekhar

$$M_c = \sqrt{3\pi} \left( \frac{3}{8m_p} \right)^2 \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \quad \text{et} \quad R_c = \frac{\hbar}{mc} \pi^{1/3} \left( \frac{9M_c}{8m_p} \right)^{1/3} \quad (50)$$

250 On aboutit donc à la conclusion suivante : Pour que la naine blanche puisse exister (ce qui revient par exemple à pouvoir définir une valeur réelle pour le rayon ...), il faut que la masse de l'étoile soit plus petite que la masse de Chandrasekhar. Au delà, la pression de dégénérescence quantique des électrons n'est plus suffisante pour contenir la pression gravitationnelle. Un calcul explicite de cette

<sup>8</sup>Si  $v \simeq c$ , alors  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$ , et comme  $mv \simeq mc$  on en déduit que  $p = \gamma mv \gg mc$  et donc  $x = p/mc \gg 1$ .

limite donne ici  $M_c = 0,78M_\odot$  et  $R_c = 5755km$ . Une théorie plus précise mais plus complexe<sup>9</sup> donne en fait  $M_c = 1.54M_\odot$ , c'est-à-dire le double de notre valeur.

255 Cette limite supérieure pour la masse d'une naine blanche a été, depuis le calcul nautique de Chandrasekhar, vérifiée aussi bien par des observations que par des résolutions numériques plus complètes du problème. Jusqu'à sa mort en 1944, Eddington lutta contre le fait que la gravité puisse l'emporter pour des étoiles massives. Dans un premier temps les faits lui donnèrent raison : Pour des étoiles plus massives que  $M_c$  la pression gravitationnelle finit par faire fusionner les électrons et les protons en neutrons dont la pression de dégénérescence est supérieure à celle des électrons. On forme  
260 alors une étoile à neutron dont le diamètre n'est plus que de quelques dizaines de kilomètres pour environ une masse solaire. Des calculs semblables, mais en relativité générale cette fois-ci, permettent de constater qu'une étoile à neutron de plus de 3 masses solaires doit s'effondrer. Rien alors ne peut plus arrêter la gravité, l'étoile devient dans ces conditions ce qu'il est convenu d'appeler un trou noir. C'est surtout de ce genre de chose dont Eddington avait horreur. Pourtant, dans la dernière moitié  
265 du XX<sup>ème</sup> siècle, on observa beaucoup de naines blanches mais jamais une dont la masse dépasse la limite autorisée, de nombreuses étoiles à neutrons, mais toujours dans le bon domaine de masse. On observe aussi, indirectement, de nombreux candidats trous noirs et dans tous les cas l'objet mystérieux à toujours une masse supérieure à  $3M_\odot$ .

270 La carrière de S. Chandrasekhar, si glorieusement débutée, se poursuivit jusqu'à la toute fin du XX<sup>ème</sup> siècle, après la publication de plus de 1500 articles dans de très nombreux domaines de l'astrophysique qu'il a su éclairer de son génie. Il recu en 1984 le prix nobel de physique pour ses travaux sur les naines blanches et ce fameux exposant 4/3 dans la densité qui vient limiter leur masse.

## Constante utilisées

Rayon de la Terre	$R_\oplus = 6.96 \times 10^8 m$
Masse de la Terre	$M_\oplus = 1.99 \times 10^{30} kg$
Masse de l'électron	$m = 9.1 \times 10^{-31} kg$
Masse du proton	$m = 1.67 \times 10^{-27} kg$
Constante de Boltzmann	$k = 1.38 \times 10^{-23} J.K^{-1}$
Constante de Planck	$\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34} J.s$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 2.9 \times 10^8 m.s^{-1}$
Constante de la gravitation	$G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-1}$

<sup>9</sup>Le calcul présenté ici revient à considérer que la densité est constante. L'existence d'une masse limite provient de l'équation d'état  $P = cste.\rho^{4/3}$  dite polytropique d'indice 4/3. Pour trouver la "bonne" valeur de la masse limite, il "suffit" de combiner les deux équations d'équilibres

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho \text{ et } \frac{dP}{dr} = -G\frac{M(r)\rho}{r^2} \quad (51)$$

On montre alors que  $\rho$  s'annule en un rayon  $R_c$ , on en déduit la masse limite

$$M_c = \int_0^{R_c} 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (52)$$