

REGIMES STATIONNAIRES.

En régime stationnaire les différentes grandeurs étudiées ne dépendent pas explicitement du temps : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

I. LOI DE CONSERVATION DE LA CHARGE EN REGIME STATIONNAIRE.

1. LOI DES NŒUDS.

a. LE VECTEUR DENSITE DE COURANT EST A FLUX CONSERVATIF EN REGIME STATIONNAIRE.

Partons de l'équation de la charge :

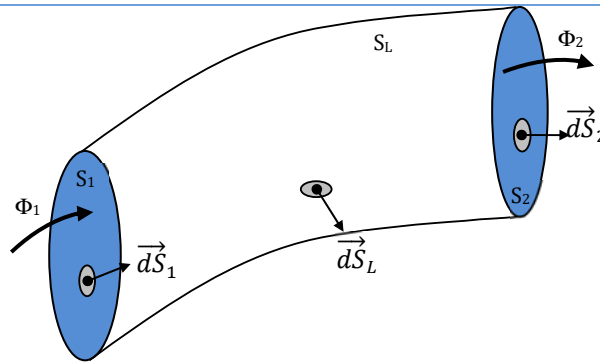
Forme locale : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}_M \vec{j} = 0$ et forme intégrale : $\iiint_{M \in V} \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} d\tau_M + \oint_{P \in S} \vec{j}(P,t) \cdot \vec{dS}_P = 0$

\Rightarrow En régime stationnaire, on a donc : $\oint_{P \in S} \vec{j}(P,t) \cdot \vec{dS}_P = 0$ et $\text{div}_M \vec{j} = 0$

Le vecteur densité de courant est à flux conservatif en régime stationnaire.

b. CONSEQUENCES :

CONSERVATION DU FLUX DE \vec{j} DANS UN TUBE DE COURANT :



Soit $I_1 = \Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS}_1$ le flux de \vec{j} à travers S_1 égal à l'intensité traversant S_1 .

Soit $I_2 = \Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS}_2$ le flux de \vec{j} à travers S_2 égal à l'intensité traversant S_2

Soit $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_L$. Une surface fermée $\Rightarrow \oint_{P \in \Sigma} \vec{j}(P,t) \cdot \vec{dS}_P = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\iint_{S_1} \vec{j} \cdot (-\vec{dS}_1)}_{-\Phi_1} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS}_2}_{\Phi_2} + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{j} \cdot \vec{dS}_L}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$$

Notons que la surface d'un conducteur étant un tube de courant, on peut conclure que **l'intensité dans un conducteur en régime stationnaire se conserve**. C'est le cas notamment des circuits filiformes.

2. COURANT DANS LES CONDUCTEURS OHMIQUES.

a. LOI D'OHM - RESISTANCE.

On étudie un **conducteur ohmique** vérifiant la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ étudié en régime stationnaire.

Le champ électrique stationnaire est relié au potentiel électrostatique par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Leftrightarrow dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr}^1$$

¹ Attention, cette relation est valable uniquement en régime stationnaire. Notons que cette relation est liée à une propriété du champ électrostatique : La circulation du champ électrostatique sur un contour fermé est nulle (voir page 13).

RESISTANCE ELEMENTAIRE D'UN ELEMENT DE COURANT.

On considère un élément de courant centré sur une ligne de courant avec $\vec{j} \parallel \vec{dS} \parallel \vec{dl}$:

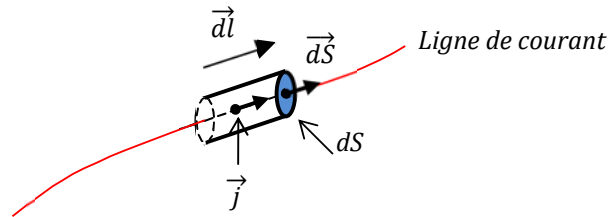
L'intensité traversant l'élément de courant est :

$$dI = \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

La tension aux bornes de l'élément de courant est :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{j \cdot dl}{\gamma}$$

$$\Rightarrow dV = -\left(\frac{dl}{\gamma \cdot dS}\right) dI$$



Dans un conducteur ohmique dV est proportionnelle à dI . Le coefficient de proportionnalité est, en convention récepteur, la résistance de l'élément de courant : $d^3R = \frac{dl}{\gamma \cdot dS}$

RESISTANCE ELEMENTAIRE LE LONG D'UN TUBE DE COURANT.

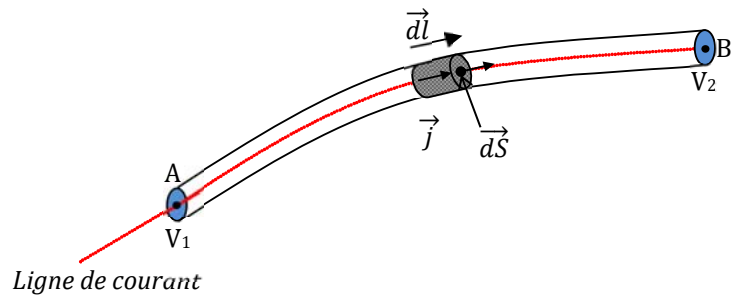
Soit un tube de courant de longueur L et de section dS .

La résistance élémentaire du tube de courant de longueur élémentaire dl est : $dV = -\left(\frac{dl}{\gamma \cdot dS}\right) dI$

\Rightarrow Les résistances le long de la ligne de courant étant en série, on les ajoute pour avoir la résistance totale du conducteur : $V_2 - V_1 = -\int_{AB} \left(\frac{dl}{\gamma \cdot dS}\right) dI$.

dI étant constante le long du tube de courant, on peut la sortir de l'intégrale : $V_2 - V_1 = -\left(\int_{AB} \left(\frac{dl}{\gamma \cdot dS}\right)\right) dI$.

\Rightarrow La résistance du tube de courant vaut : $d^2R = \int_{AB} \left(\frac{dl}{\gamma \cdot dS}\right)$



RESISTANCE D'UN CONDUCTEUR OHMIQUE PARCOURU PAR UN COURANT I DE SECTION S (A PRIORI VARIABLE).

On décompose le conducteur en conducteurs élémentaires de longueur L de section dS :

\Rightarrow Ces différents tubes de courant élémentaires de section dS étant en parallèle, on doit ajouter les conductances.

\Rightarrow Partons de la résistance d'un tube de courant élémentaire de longueur L : $V_2 - V_1 = -d^2R \cdot dI$ où

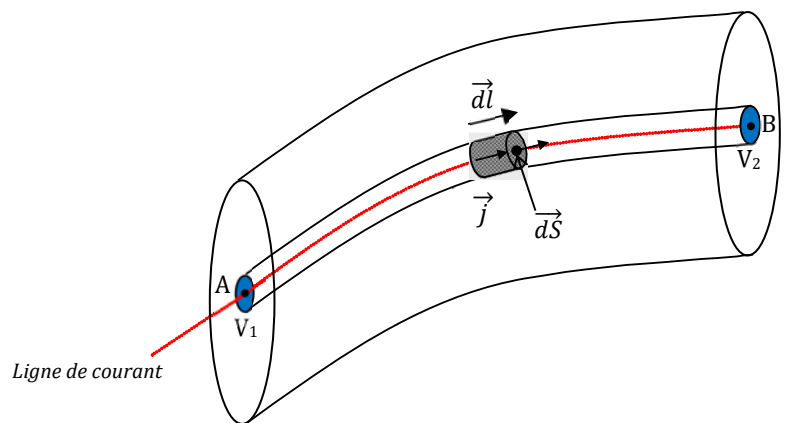
$$d^2R = \frac{1}{d^2G} = \int_{AB} \left(\frac{dl}{\gamma \cdot dS}\right)$$

$$\Rightarrow dI = -d^2G \cdot (V_2 - V_1) \Rightarrow I = -\left(\iint_S d^2G\right) \cdot (V_2 - V_1)$$

$G = \frac{1}{R}$

La résistance du conducteur ohmique de section S et de longueur $L=AB$ est de la forme :

$$R = \frac{1}{\iint_S \left(\frac{1}{\int_{AB} \frac{dl}{\gamma \cdot dS}}\right)}$$



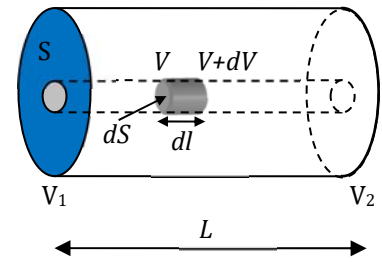
CAS D'UN CONDUCTEUR CYLINDRIQUE (SECTION S CONSTANTE, LONGUEUR L)

On part de la résistance de l'élément de courant : $d^3R = \frac{dl}{\gamma \cdot dS}$

⇒ La résistance élémentaire du tube élémentaire de longueur L et de section $dS=Cste$ est : $d^2R = \frac{L}{\gamma \cdot dS}$

⇒ $d^2G = \frac{\gamma dS}{L}$

⇒ $G = \frac{\gamma S}{L}$



La **résistance d'un conducteur cylindrique**, de conductivité γ , de longueur L et de section S vaut $R = \frac{L}{\gamma \cdot S}$

b. LOI DE JOULE.

Loi de Joule locale :

La puissance absorbée par un élément de volume $d\tau$ en un point M d'un conducteur est : $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

⇒ La **puissance absorbée par un conducteur** de volume V est : $P = \iiint_V (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau$

II. CHAMP ELECTRIQUE STATIONNAIRE.

Le champ électrique en M est **défini** par la force électrique exercée sur une charge q placée au point M :

$$\vec{f}(M) = q \vec{E}(M)$$

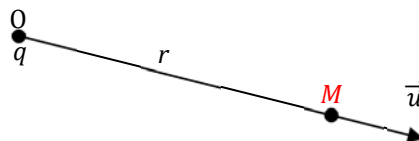
Le champ $\vec{E}(M)$ a pour origine les charges distribuées dans l'espace.

1. CHAMP CREE PAR DES DISTRIBUTIONS DISCRETES DE CHARGES.

a. EXPRESSIONS DE \vec{E} (VOIR ANNEXE 1)

CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE.

Soit une charge ponctuelle q placée en un point O.



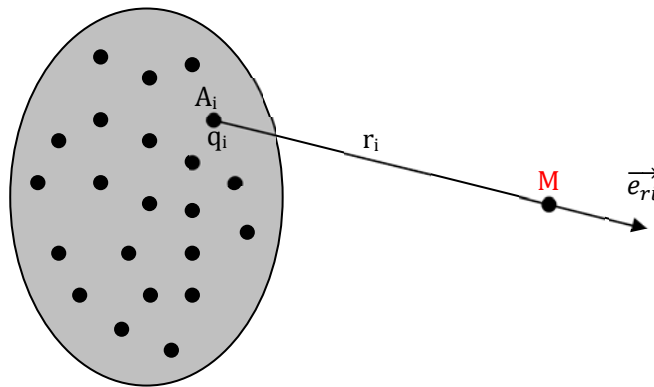
Le champ crée par q au point M est : $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \vec{u}$

CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION DISCRETE DE CHARGES PONCTUELLES.

Soit une **distribution de charges ponctuelles** :

Le champ électrique crée par la charge q_i en A_i au point M est : $\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_i^2} \vec{u}_i$

Le champ électrique crée par la distribution des charges au point M est : $\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_i^2} \vec{u}_i$



b. INVARIANCES ET SYMETRIE.

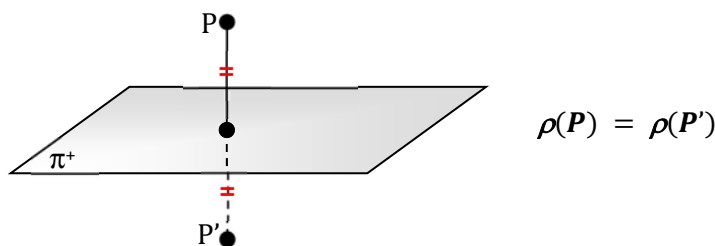
SYMETRIES.

Principe de Curie² : Le champ \vec{E} crée a les mêmes propriétés de symétrie que celles de la distribution de charges.

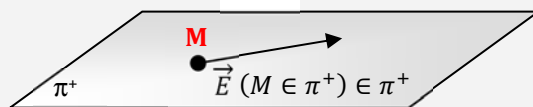
PLAN DE SYMETRIE :

Soit un plan, noté (π^+) , **plan de symétrie de la distribution de charges**.

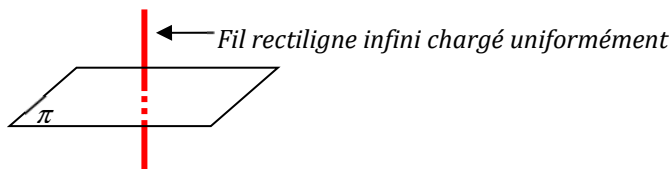
⇒ Pour tout point P de la distribution de charge, on a :



Soit un point M appartenant à ce plan alors le champ crée en M appartient à ce plan :



Exemple :

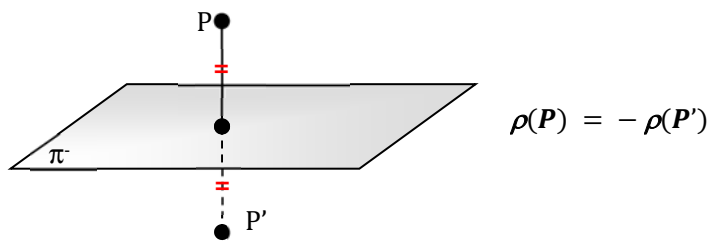


PLAN D'ANTISYMETRIE :

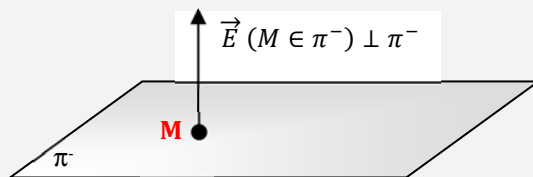
Soit un plan, noté (π^-) , **plan d'antisymétrie de la distribution de charges** :

² Principe de Curie (1894) : Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance

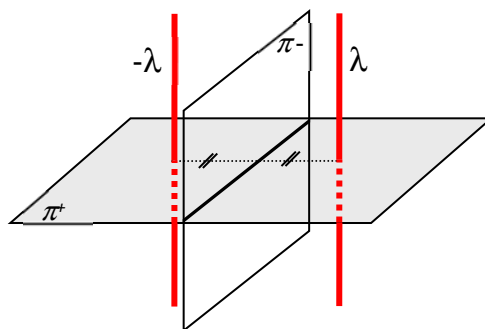
Pour tout point P de la distribution de charge, on a :



Soit un point M appartenant à ce plan alors le champ crée en M est perpendiculaire à ce plan :



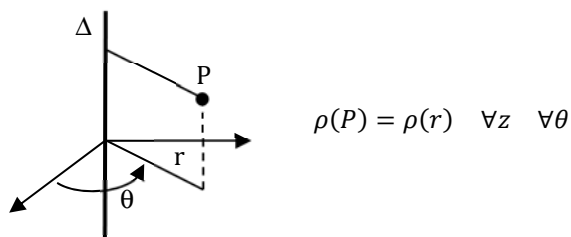
Exemple :



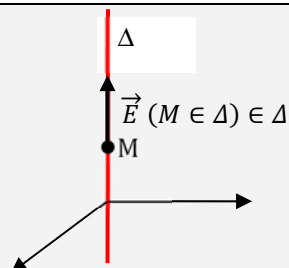
AXE DE SYMETRIE.

Soit un **axe de symétrie de la distribution des charges** :

Pour tout point P de la distribution de charge, on a :



Soit un point M appartenant à un axe de symétrie de la distribution des charges, alors :

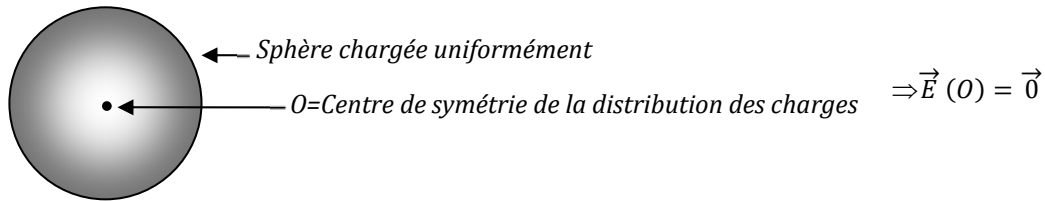


Exemple :



CENTRE DE SYMETRIE :

Le champ \vec{E} crée au **centre de symétrie de la distribution des charges** est nul :



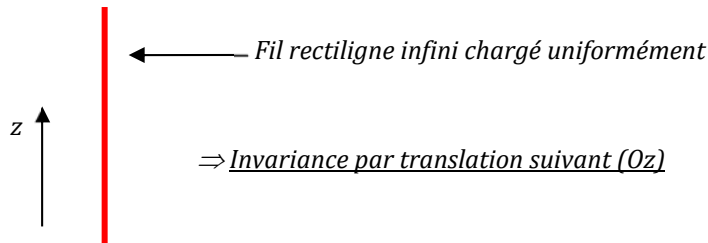
INVARIANCES.

Principe de Curie : Le champ \vec{E} crée suit les mêmes invariances que celles de la répartition des charges.

INVARIANCE PAR TRANSLATION :

Soit une distribution de charge invariante par translation parallèle à (Oz) : $\rho_P(x_p, y_p, z_p) = \rho_P(x_p, y_p)$ alors le champ \vec{E} crée en $M(x, y, z)$ ne dépend pas de z : $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y)$

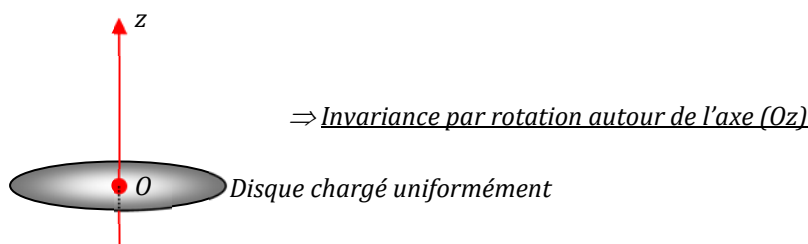
Exemple :



INVARIANCE PAR ROTATION :

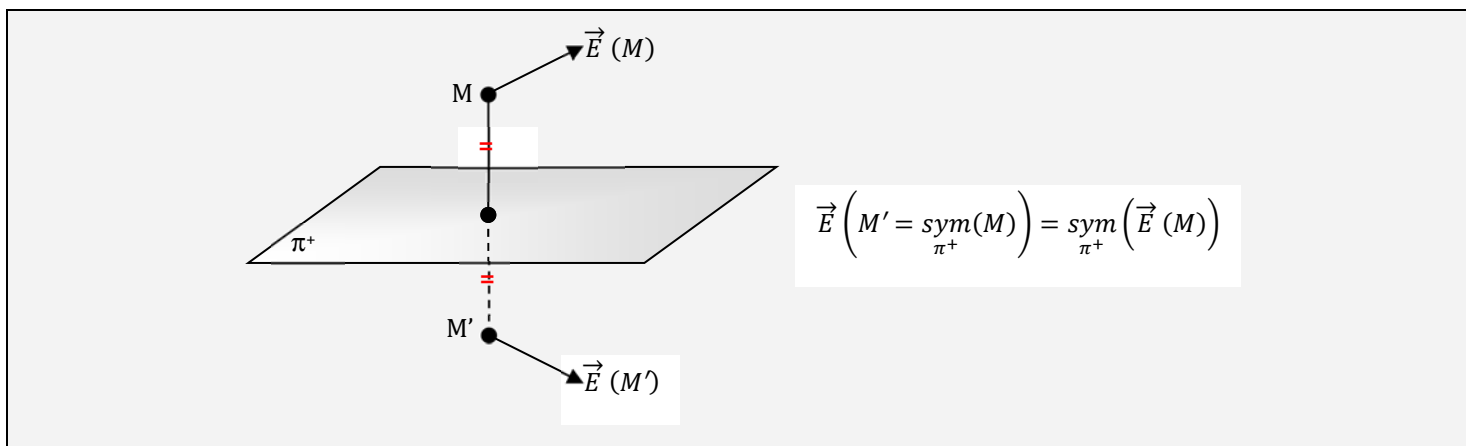
Soit une distribution de charge invariante par rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz) : $\rho_P(r_p, \theta_p, z_p) = \rho_P(r_p, z_p)$
Alors le champ \vec{E} crée en $M(r, \theta, z)$ ne dépend pas de θ : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, z)$

Exemple :



INVARIANCE PAR SYMETRIE :

Soit un plan (π^+) de symétrie, alors le champ en M' , symétrique de M par rapport au plan (π^+) , est le symétrique du champ en M par rapport au plan (π^+) .

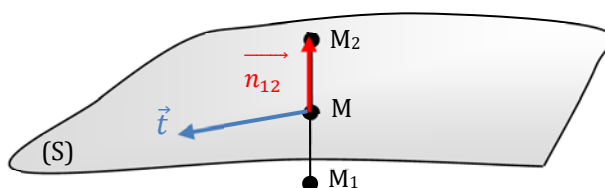


RELATION DE PASSAGE (NON EXIGIBLE)

On étudie l'évolution du champ \vec{E} à la **traversée d'une surface chargée** en un point M de la surface. Pour cela on introduit le vecteur normal \vec{n}_{12} perpendiculaire à (S) en M et un vecteur tangent \vec{t} appartenant à (S) tel que le champ \vec{E} en un point quelconque de l'espace s'écrive :

$$\vec{E} = E_{\perp} \vec{n}_{12} + E_{\parallel} \vec{t}$$

Le champ en M étant à priori discontinu, on introduit les points M_1 et M_2 au voisinage immédiat de M, M_1 étant juste « au dessous » de (S) et M_2 étant juste « en dessus » de (S) :



Les résultats sont alors les suivants :

- Continuité de la composante tangentielle de \vec{E} : $E_{\parallel}(M_1) = E_{\parallel}(M_2)$
- Discontinuité de la composante normale de \vec{E} : $E_{\perp}(M_1) \neq E_{\perp}(M_2)$

⇒ Plus précisément on a :

$$\Delta \vec{E}_{\perp} = (E_{\perp}(M_2) - E_{\perp}(M_1)) \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

Ainsi, seule la composante normale de \vec{E} subit une discontinuité à la traversée d'une surface chargée : $\Delta \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$

C. TOPOGRAPHIE DU CHAMP ELECTROSTATIQUE.

- ✓ Les lignes de champ de \vec{E} sont toujours ouvertes.
- ✓ Leur orientation est donnée par les règles suivantes : Les lignes de champ vont soit d'une charge +q vers l'infini, soit d'une charge +q vers une charge -q soit de l'infini vers une charge -q
- ✓ Lorsque les lignes de champ s'éloignent, la norme du champ électrostatique diminue. A l'inverse, lorsqu'elles se rapprochent, la norme du champ augmente.

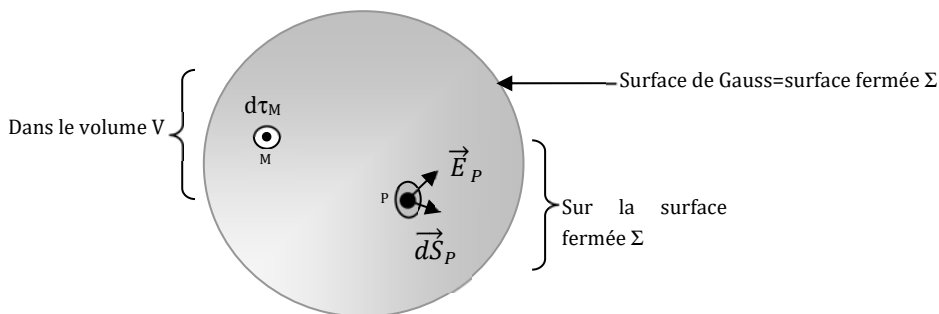
2. PROPRIETES DU CHAMP ELECTROSTATIQUE.

a. PROPRIETES INTEGRALES.

FLUX DE \vec{E} A TRAVERS UNE SURFACE FERMEE : THEOREME DE GAUSS.

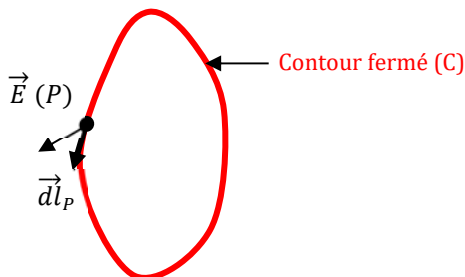
Le flux du champ \vec{E} à travers une surface fermée est égal à la charge à l'intérieur de cette surface divisée par ϵ_0 :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}_p \cdot \vec{dS}_p = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \text{ où } Q = \iiint_V \rho_M d\tau_{M_{int}}$$



CIRCULATION DE \vec{E} SUR UN CONTOUR FERME.

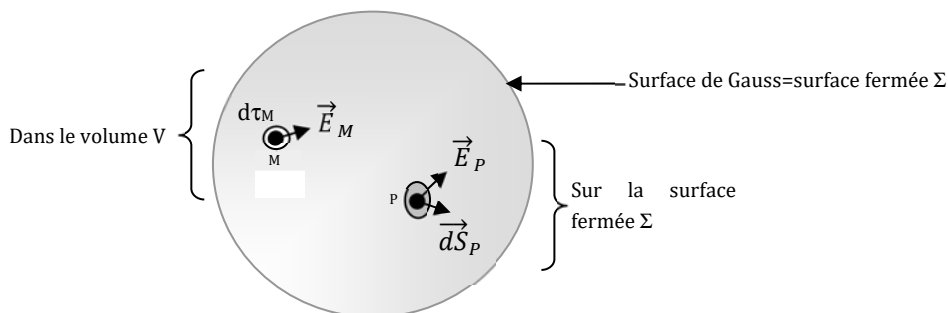
La circulation de \vec{E} sur un contour fermé (C) est égale à 0 : $\oint_{(C)} \vec{E}_p \cdot \vec{dl}_p = 0$



Cette propriété est liée au fait que la force électrique est une force conservative.

b. EQUATIONS LOCALES.

DIVERGENCE DE \vec{E} : FORME LOCALE DU THEOREME DE GAUSS.



Partons de $\oiint_{\Sigma} \vec{E}_p \cdot \vec{dS}_p = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ avec $Q = \iiint_V \rho_M d\tau_{M_{int}}$

⇒ D'après le théorème d'Ostrogradsky, on a :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}_p \cdot \vec{dS}_p = \iiint_V \text{div}_M(\vec{E}) \cdot d\tau_M$$

⇒ On a donc :

$$\iiint_V \operatorname{div}_M(\vec{E}) \cdot d\tau_M = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_M d\tau_M$$

$$\Rightarrow \iiint_V \left(\operatorname{div}_M(\vec{E}) - \frac{\rho_M}{\epsilon_0} \right) \cdot d\tau_M = 0$$

$$\operatorname{div}_M(\vec{E}) - \frac{\rho_M}{\epsilon_0} = 0 \quad \forall M$$

⇒ Cette équation est la **forme locale du théorème de Gauss**, c'est l'équation de **Maxwell-Gauss** : Elle signifie que le champ \vec{E} diverge à partir des charges qui sont des sources.

ROTATIONNEL DE \vec{E} .

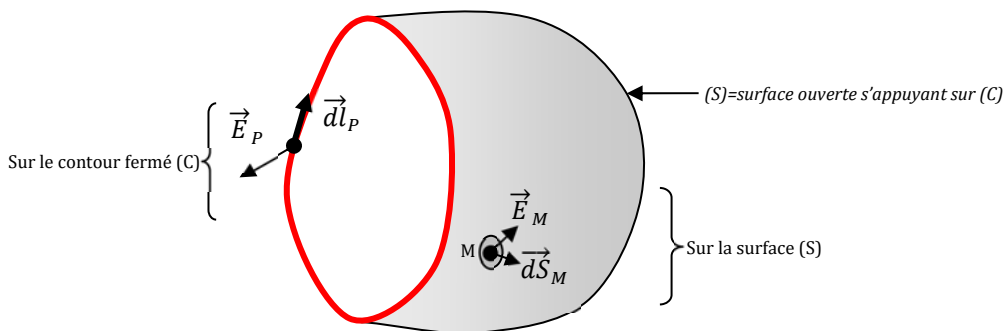
Partons de la circulation de \vec{E} sur un contour fermé : $\oint_{(C)} \vec{E}_P \cdot d\vec{l}_P = 0$

⇒ D'après le théorème de Stokes, on a :

$$\oint_{(C)} \vec{E}_P \cdot d\vec{l}_P = \iint_S \operatorname{rot}_M(\vec{E}) \cdot d\vec{S}_M$$

⇒ On a donc :

$$\operatorname{rot}_M(\vec{E}) = \vec{0} \quad \forall M$$



CONSEQUENCE : \vec{E} DERIVE D'UN POTENTIEL SCALAIRE.

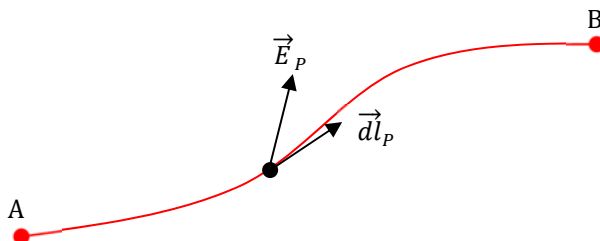
Sachant que $\forall X \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(X)) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} X) = \vec{0}$, on en déduit que on peut écrire \vec{E} sous la forme d'un gradient :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}(V) \Leftrightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

L'expression intégrale de cette équation locale est :

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Delta V = -(V_B - V_A)$$

⇔ La circulation de \vec{E} sur un contour ouvert est égale à l'opposé de la variation du potentiel V.



EQUATION DE POISSON.

$$\text{Partons de : } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \text{ et } \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow -\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\underbrace{\quad}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = \Delta V}$$

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 : \text{Équation de Poisson.}$$

L'équation de Poisson est une équation locale reliant le potentiel électrostatique aux sources.

⇒ L'intégration de cette équation conduit à l'expression du potentiel créée par une distribution de charge (en supposant la distribution à extension finie et le **potentiel étant nul à l'infini**) : voir annexe 3

REMARQUE 1 :

Sachant que $\vec{F} = q \vec{E}$ et que $\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \\ \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \end{cases}$, on en déduit que $E_p = q \cdot V$

⇒ Le potentiel électrostatique est une énergie potentielle par unité de charge : **Il varie de manière continue** comme l'énergie potentielle électrique.

Notons que l'on a également : $dE_p = q dV = -q \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB} = -\int_A^B (q \vec{E}) \cdot d\vec{l}$

La circulation de $q\vec{E}$ un contour (C) est égale au travail de la force électrique sur ce contour.

REMARQUE 2 :

\vec{E} étant défini par $\vec{F} = q \vec{E}$, on en déduit que \vec{E} ne dépend pas de la convention d'orientation des trièdres : C'est un **vrai vecteur ou vecteur polaire**.

3. APPLICATION : CALCUL DE CHAMP ELECTRIQUE PAR APPLICATION DU THEOREME DE GAUSS.

L'utilisation du théorème de Gauss est intéressante dans les trois cas suivants :

- ✓ Distributions planes (infinies).
- ✓ Distributions à symétrie sphérique.
- ✓ Distributions à symétrie cylindrique (infinie).

Dans tous les cas, l'analyse systématique du problème se déroule de la manière suivante :

- ✓ Choix du système de coordonnées.
- ✓ Étude des symétries et des invariances de \vec{E}
- ✓ Choix de Σ .
- ✓ Calcul de Φ .
- ✓ Application du théorème de Gauss avec calcul de Q_{int} .
- ✓ Détermination finale de \vec{E} .
- ✓ Calcul éventuel de V .

a. DISTRIBUTIONS PLANES.

CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UN PLAN INFINI UNIFORMEMENT CHARGE.

Soit un plan uniformément chargé de densité surfacique de charge σ .

On cherche à déterminer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace.

Vue la symétrie du système, on utilise un repère cartésien pour repérer le point $M : M(x, y, z)$

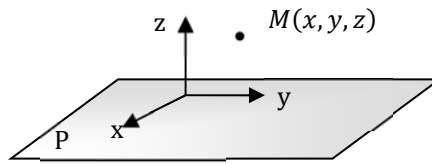
⇒ Le champ créé en M s'écrit : $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z)$

SYMETRIE :

Tout plan perpendiculaire au plan (P) et passant par M est un plan de symétrie.

⇒ Le champ $\vec{E}(M)$ étant à l'intersection de ces plans est donc suivant (Oz)

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{u}_z$$



INVARIANCE :

- ✓ La distribution est invariante par translation suivant x et y
 \Rightarrow Le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de x et y : $\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$
- ✓ Invariance par symétrie : Le plan (P) étant un plan de symétrie, le champ en M' , symétrique de M par rapport à (P), est le symétrique du champ en M : $\vec{E}(M') = E(-z) \vec{u}_z = -E(z) \vec{u}_z$

CHOIX DE Σ :

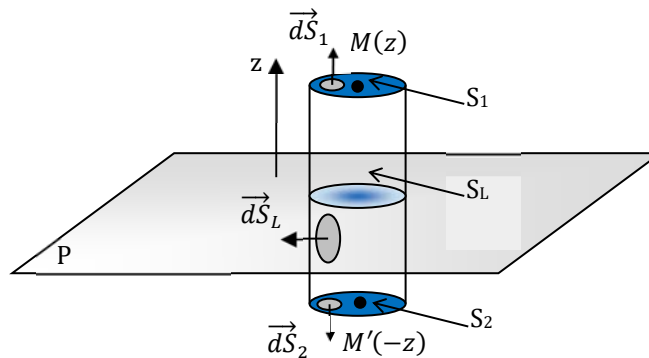
Cylindre de section S dont la base supérieure passe par M et la base inférieure passe par M' .

$$\Rightarrow \Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_L \text{ avec } S = S_1 = S_2$$

CALCUL DE Φ :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = \underbrace{\iint_{S_1} (E(z) \vec{u}_z) \cdot (dS_1 \vec{u}_z)}_{E(z)S} + \underbrace{\iint_{S_2} (-E(z) \vec{u}_z) \cdot (-dS_2 \vec{u}_z)}_{E(z)S} + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L}_0$$

$$\Rightarrow \Phi = 2E(z) \cdot S$$



APPLICATION DU THEOREME DE GAUSS :

La charge à l'intérieur de Σ étant Q_{int} , on a : $\Phi = 2E(z) \cdot S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \\ \vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$

POTENTIEL CREE :

On part de $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$ avec $\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$ et $d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z \Rightarrow dV = -E(z) \cdot dz$

Pour $z > 0$: $dV = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz \Rightarrow V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + Cste_1$

Pour $z < 0$: $dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + Cste_2$

Sachant que la distribution de charge s'étend à l'infini, on ne peut pas prendre $V(\infty) = 0$

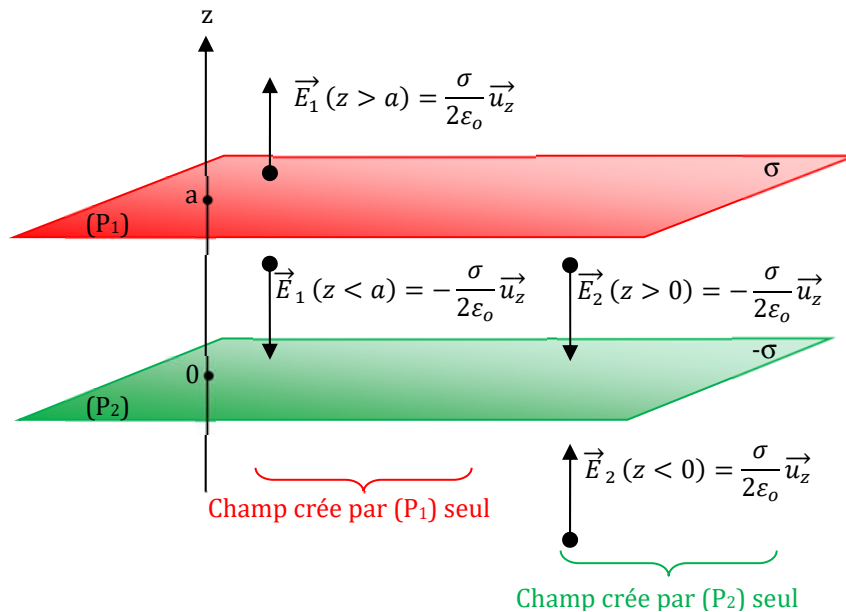
Pour déterminer les constantes d'intégration, on peut par convention choisir $V(0) = 0$, on a alors $Cste_1 = Cste_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(z > 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z \\ V(z < 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z \end{cases} \Rightarrow \text{Les équipotentielles sont des plans parallèles à (P)}$$

APPLICATION : CONDENSATEUR PLAN.

CHAMP CREE A L'INTERIEUR D'UN CONDENSATEUR PLAN.

Un **condensateur plan** est constitué de 2 plans (P₁) et (P₂) chargés de densités surfaciques de charge respectivement σ et $-\sigma$:



En utilisant l'additivité des champs, on détermine le champ crée en tout point de l'espace :

$$\begin{cases} \vec{E}(z > a) = \vec{0} \\ \vec{E}(0 < z < a) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_z \\ \vec{E}(z < 0) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{On en déduit le potentiel en tout point de l'espace : } dV = -E(z) \cdot dz \Rightarrow \begin{cases} V(z > a) = Cste_1 \\ V(0 < z < a) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}z + Cste_2 \\ V(z < 0) = Cste_3 \end{cases}$$

\Rightarrow La continuité du potentiel en $z = a$ et $z = 0$ impose :

$$Cste_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}a + Cste_2 \text{ et } Cste_2 = Cste_3$$

$$\Rightarrow \text{Soit, en posant } Cste_2 = 0^3 : \begin{cases} V(z > a) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}a \\ V(0 < z < a) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}z \\ V(z < 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{La tension aux bornes du condensateur vaut : } U = V(a) - V(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}a$$

Notons enfin, que si la tension appliquée aux bornes du condensateur est trop élevée, et donc si le champ électrostatique régnant entre les armatures est trop élevé, on observe un phénomène de claquage : l'air entre les armatures (ou l'isolant) devient conducteur et le condensateur se décharge.

Si le milieu entre les armatures est de l'air sec, le champ électrostatique pour lequel on observe ce claquage est appelé champ disruptif de l'air et vaut : $E_d \approx 36\,000 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$

³ Ce qui revient à poser $V(0) = 0$

CAPACITE D'UN CONDENSATEUR PLAN.

La capacité d'un condensateur est : $C = \frac{Q}{U}$ où Q est la charge portée par l'armature positive.

Ici, $Q = \sigma \cdot S$ où S est la surface en regard des deux armatures

$$\Rightarrow C = \frac{\sigma \cdot S}{\sigma \cdot a} \epsilon_0$$

D'où :

$$C = \frac{S \cdot \epsilon_0}{a} = \text{capacité d'un condensateur plan}$$

ASPECT ENERGETIQUE.

L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur chargé est :

$$E_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \Rightarrow E_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sigma \cdot S)^2}{(\epsilon_0 S/a)} = \frac{\sigma^2 \cdot S \cdot a}{2 \cdot \epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 \cdot (a \cdot S)$$

$\tau = \text{volume}$
où $\vec{E} \exists$

$$u_e = \frac{E_e}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \text{densité volumique d'énergie stockée dans le condensateur.}$$

COMPLEMENT SUR L'ENERGIE ELECTROSTATIQUE D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGE

Généralisation : A toute distribution de charges créant à priori dans tout l'espace un champ \vec{E} est associée une énergie répartie également dans tout l'espace ayant pour densité : $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

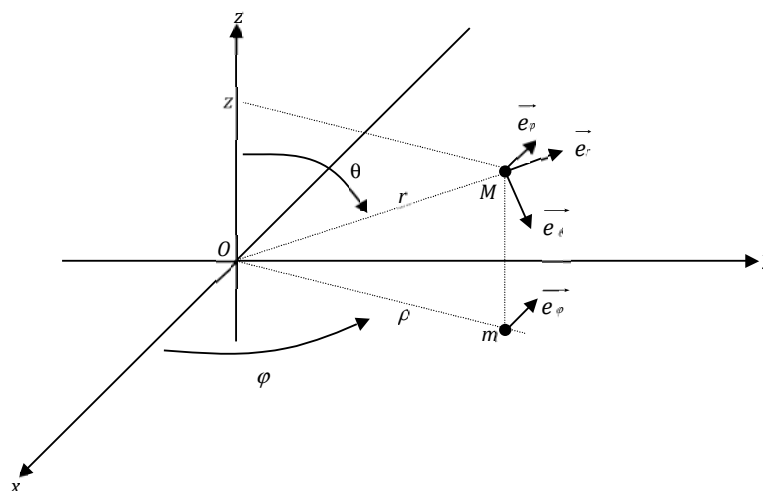
Définition :

L'énergie électrostatique d'une distribution continue de charges répartie sur un volume τ est égale à :

$$W_E = \frac{1}{2} \iiint_{\text{tout l'espace}} \epsilon_0 E^2 d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} V dq$$

b. DISTRIBUTIONS A SYMETRIE SPHERIQUE.

Vue la symétrie du système, on utilise les coordonnées sphériques.



Soit un point P de la distribution de charge $\rho_p(r_p, \theta_p, \phi_p)$:

La distribution est à symétrie sphérique si ρ_p ne dépend que de r_p : $\rho_p(r_p)$

Soit un point M où l'on calcule le champ créé par la distribution : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \phi)$

ETUDE DES SYMETRIES :

La droite (OM) étant un axe de symétrie, $\vec{E}(M)$ appartient à cette droite : $\vec{E}(M) = E(r, \theta, \phi) \vec{e}_r$

ETUDE DES INVARIANCES :

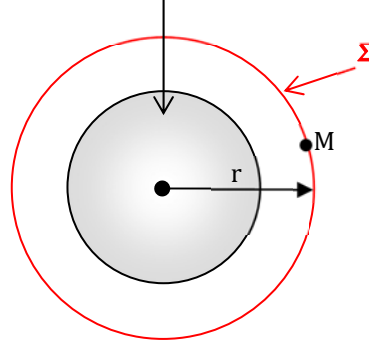
La distribution de charge est invariante par rotation d'angle θ et ϕ

\Rightarrow Le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend ni de θ ni de ϕ : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$

CHOIX DE Σ :

On choisit pour la surface de Gauss, la sphère de centre O passant par M et donc de rayon r :

Distribution à symétrie sphérique



CALCUL DE Φ :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\Sigma} = \oiint_{\Sigma} (E(r) \vec{e}_r) \cdot (d\Sigma \vec{e}_r) = \oiint_{\Sigma} \underbrace{E(r)}_{\text{Cste sur } \Sigma} \cdot d\Sigma = E(r) \underbrace{\oiint_{\Sigma} d\Sigma}_{4\pi r^2} \Rightarrow \Phi = 4\pi r^2 E(r)$$

APPLICATION DU THEOREME DE GAUSS :

Soit Q_{int} la charge à l'intérieur de la surface de Gauss, on a alors :

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

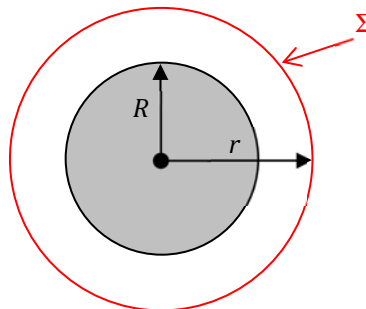
EXEMPLE :

CHAMP CREE PAR UNE SPHERE PLEINE DE RAYON R CHARGE UNIFORMEMENT :

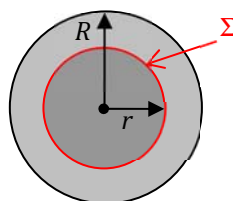
Soit Q la charge totale de la sphère : $Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$

Deux cas se présentent :

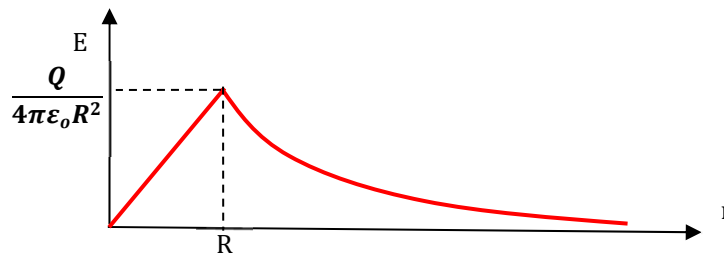
Si $r \geq R$ alors $Q_{int} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$



Si $r \leq R$ alors $Q_{int} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$



D'où :



On en déduit le potentiel électrostatique :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \text{ avec } \vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r \text{ et } d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r \cdot d\theta \vec{u}_\theta + r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \vec{u}_\varphi$$

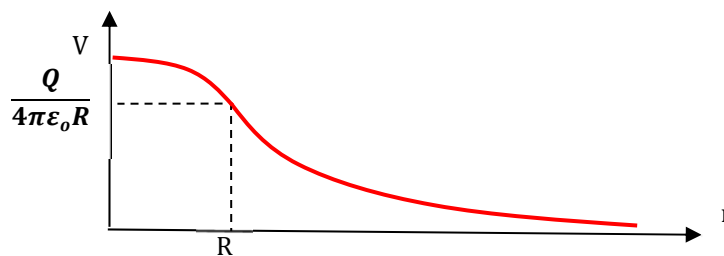
$$\Rightarrow dV = -E(r) \cdot dr \Rightarrow \begin{cases} r \geq R: V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + Cste_1 = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0 r} + Cste_1 \\ r \leq R: V(r) = -\frac{\rho \cdot r^2}{6\epsilon_0} + Cste_2 \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, on pose $V(r \rightarrow \infty) = 0$ et on utilise la continuité du potentiel en $r=R$

$$\Rightarrow Cste_1 = 0 \text{ et } Cste_2 = \frac{\rho \cdot R^2}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r \geq R: V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0 r} \\ r \leq R: V(r) = -\frac{\rho \cdot r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho \cdot R^2}{2\epsilon_0} \end{cases}$$

D'où :



Notons que dans le cas où $r \geq R$ tout se passe comme si la charge Q était placée en O .

Ce résultat est général :

Le champ et le potentiel créés par une distribution à symétrie sphérique à l'extérieur de la distribution est identique au champ et au potentiel créés par la charge totale supposée ponctuelle et placée au centre de la distribution.

ÉNERGIE DE CONSTITUTION DU NOYAU ATOMIQUE

Notons que cette distribution continue de charge peut servir à étudier le noyau atomique : celui-ci est modélisé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, de charge totale Q . On peut de fait exprimer l'énergie électrostatique du noyau à partir des intégrales données précédemment ou en considérant que l'on construit ce noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.

$$\text{On trouve}^4 : W_E = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

Sachant que $Q = Z \times e$ et que R est de l'ordre de grandeur du noyau atomique, on peut déterminer l'ordre de grandeur de W_E :

$$\begin{cases} R \approx 10^{-15} \text{ m} \\ W_E \approx Z^2 \times 1 \text{ MeV} \end{cases}$$

On peut affiner le calcul de W_E en considérant les deux points suivants :

⁴ Calcul explicitement au programme, fait en TD

- ✓ Le volume nucléaire est proportionnel au nombre A de nucléons qu'il contient. Pour une distribution à symétrie sphérique, on a : $V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \times A$ où r_0 est le rayon moyen d'un nucléon (on prendra $r_0 = 1,4 \text{ fm}$).

On obtient alors :

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$$

- ✓ Les charges qui constituent le noyau sont en réalité réparties par quantités discrètes. Pour $Z = 1$, l'énergie W_E devrait être nulle. Pour corriger cette expression, on remplace Z^2 par $Z(Z - 1)$.

On obtient alors :

$$W_E = \underbrace{\left(\frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} \right)}_{a_c} Z(Z - 1) A^{-\frac{1}{3}}$$

Avec $a_c \approx 0,7 \text{ MeV}$

Exemples : Pour le noyau de Fer (56), on trouve : $W_E \approx 120 \text{ MeV}$

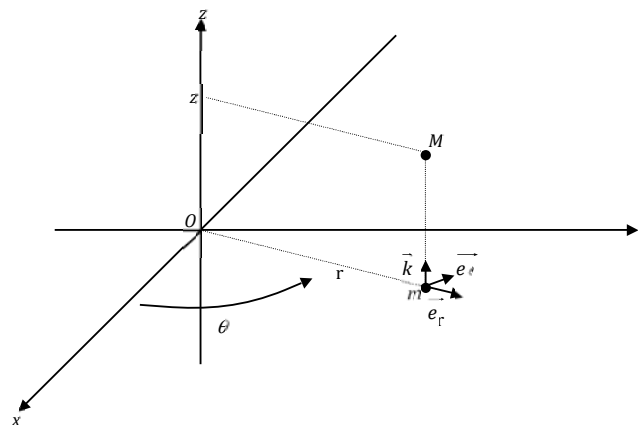
Notons enfin que cette énergie est une énergie de répulsion électrostatique et qu'elle n'est en rien responsable de la stabilité du noyau : C'est l'interaction forte, non décrite ici, qui assure cette cohésion.

AUTRES EXEMPLES :

Sphère chargée uniformément en surface, sphère chargée avec $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right) \dots$

C. CHAMP CREE PAR UNE DISTRIBUTION A SYMETRIE CYLINDRIQUE.

Vue la symétrie du système, on se place en coordonnées cylindrique.



Soit un point P de la distribution de charge $\rho_p(r_p, \theta_p, z_p)$:

La distribution est à symétrie cylindrique si ρ_p ne dépend que de r_p : $\rho_p(r_p)$

Soit un point M où l'on calcule le champ crée par la distribution : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z)$:

ETUDE DES SYMETRIES.

Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ sont des plans de symétrie de la distribution des charges.

⇒ Le champ $\vec{E}(M)$ est porté par \vec{e}_r : $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{e}_r$

ÉTUDE DES INVARIANCES.

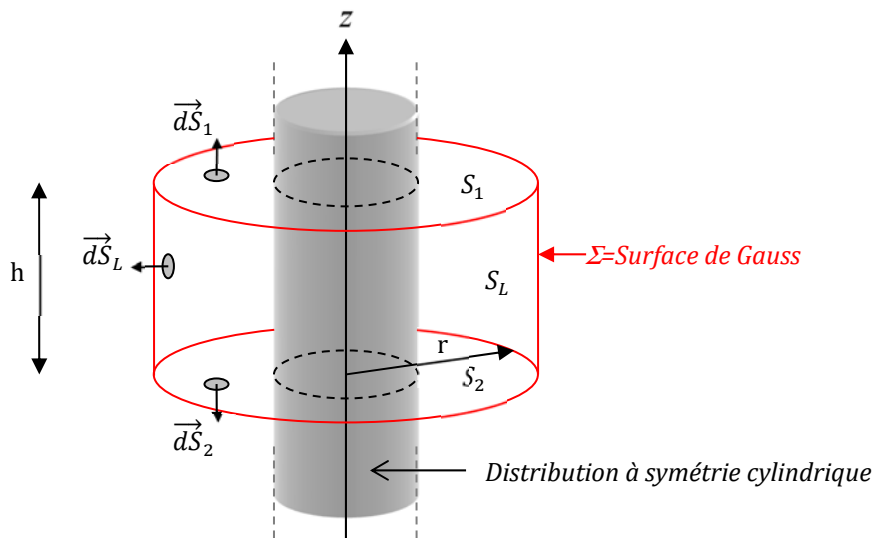
La distribution des charges est invariante par translation parallèle à (Oz) et par rotation d'angle θ .

⇒ Le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend ni de θ ni de z : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$

CHOIX DE Σ :

La surface Σ est un cylindre de base de rayon r (et donc passant par le point M où l'on calcule $\vec{E}(M)$) de hauteur h quelconque.

$\Rightarrow \Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_L$ avec $S = S_1 = S_2$



CALCUL DE Φ :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L$$

$$\Phi = \underbrace{\iint_{S_1} (E(r) \vec{u}_r) \cdot (dS_1 \vec{u}_z)}_0 + \underbrace{\iint_{S_2} (E(r) \vec{u}_r) \cdot (dS_2 \vec{u}_z)}_0 + \iint_{S_L} \underbrace{(E(r) \vec{u}_r) \cdot (dS_L \vec{u}_r)}_{E(r) \cdot dS_L}$$

$E(r)$ étant constant sur la surface latérale, on obtient :

$$\Phi = \iint_{S_L} E(r) \cdot dS_L = E(r) \underbrace{\iint_{S_L} dS_L}_{2\pi r h}$$

$\Rightarrow \Phi = 2\pi r h E(r)$

APPLICATION DU THEOREME DE GAUSS :

Soit Q_{int} la charge à l'intérieur de la surface de Gauss, on a alors : $\Phi = 2\pi r h E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi \epsilon_0 r h}$

EXEMPLE :

CHAMP CREE PAR UN CYLINDRE INFINI DE RAYON R CHARGE UNIFORMEMENT

Deux cas se présentent :

Si $r \geq R$ alors $Q_{int} = \pi R^2 h \rho$ et donc : $E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi \epsilon_0 r h} = \frac{R^2 \rho}{2 \epsilon_0 r}$

Si $r \leq R$ alors $Q_{int} = \pi r^2 h \rho$ et donc : $E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi \epsilon_0 r h} = \frac{R^2 r}{2 \epsilon_0}$

III. CHAMP MAGNETIQUE STATIONNAIRE.

Le champ magnétique en un point M de l'espace est défini par la force magnétique exercée sur une charge q placée en M se déplaçant à la vitesse $\vec{V}(M)$: $\vec{f}(M) = q \vec{V}(M) \wedge \vec{B}(M)$

Le champ magnétique est créé par des aimants et des courants répartis dans l'espace.

1. CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION DE COURANTS.

a. LOI DE BIOT ET SAVART (HP)

Les lois de Biot et Savart, hors programme de PC et données en Annexe 2, permettent de déterminer le champ magnétique créée par des distributions de courant quelconque.

b. INVARIANCES ET SYMETRIES.

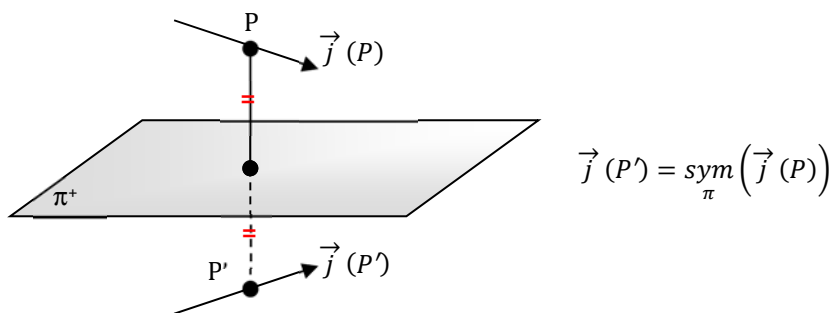
SYMETRIES.

Principe de Curie : Le champ \vec{B} créée a les mêmes propriétés de symétrie que celles de la distribution de courant.

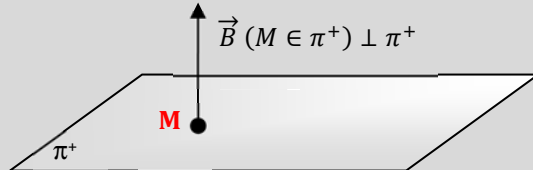
PLAN DE SYMETRIE :

Soit un plan, noté (π^+) , **plan de symétrie de la distribution de courant** :

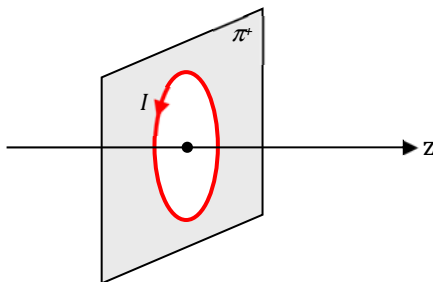
Pour tout point P de la distribution de courant, on a :



Soit un point M appartenant à ce plan alors le champ crée en M est perpendiculaire à ce plan :

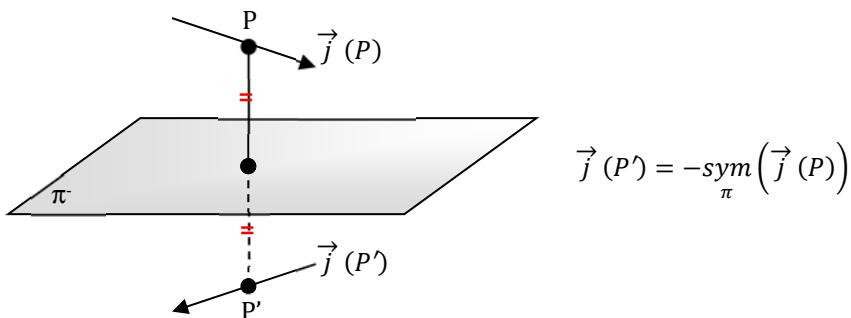


Exemple :

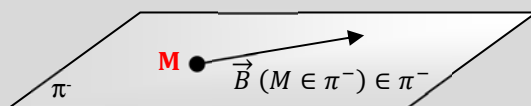


PLAN D'ANTISYMETRIE :

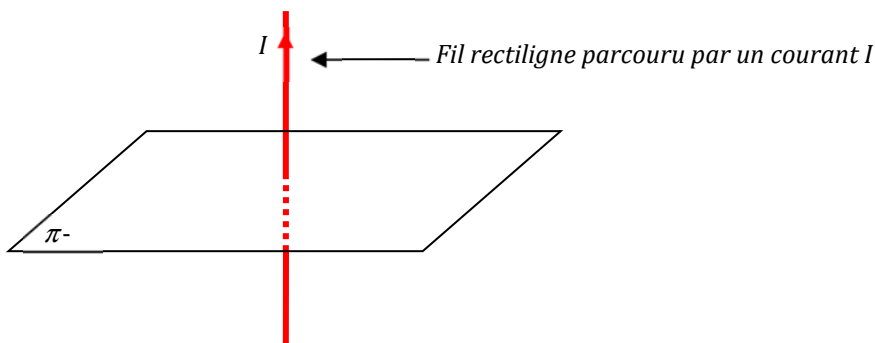
Soit un plan, noté (π^-) , plan d'antisymétrie de la distribution des courants :
Pour tout point P de la distribution de charge, on a :



Soit un point M appartenant à ce plan alors le champ crée en M appartient à ce plan :



Exemple :



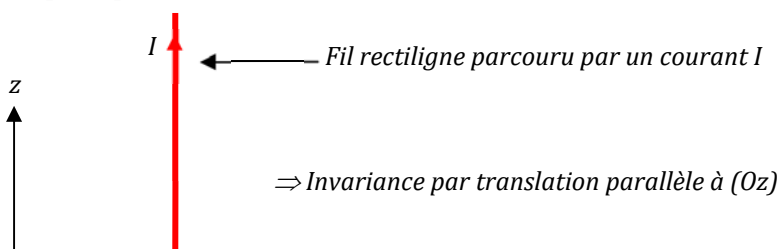
INVARIANCES.

Principe de Curie : Le champ B crée suit les mêmes invariances que celles de la répartition des courants.

INVARIANCES PAR TRANSLATION :

Soit une distribution de courant invariante par translation parallèle à (Oz) : $\vec{j}_p(r_p, \theta_p, z_p) = \vec{j}_p(r_p, \theta_p)$ alors le champ \vec{B} crée en $M(r, \theta, z)$ ne dépend pas de z : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta)$

Exemple :



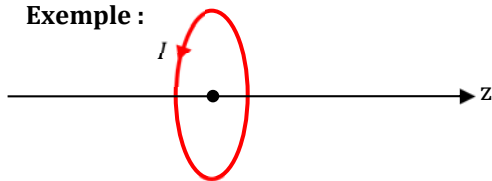
INVARIANCE PAR ROTATION :

Soit une distribution de charge invariante par rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz) :

$$\vec{j}_p(r_p, \theta_p, z_p) = \vec{j}_p(r_p, z_p)$$

Alors le champ \vec{B} crée en $M(r, \theta, z)$ ne dépend pas de θ : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z)$

Exemple :

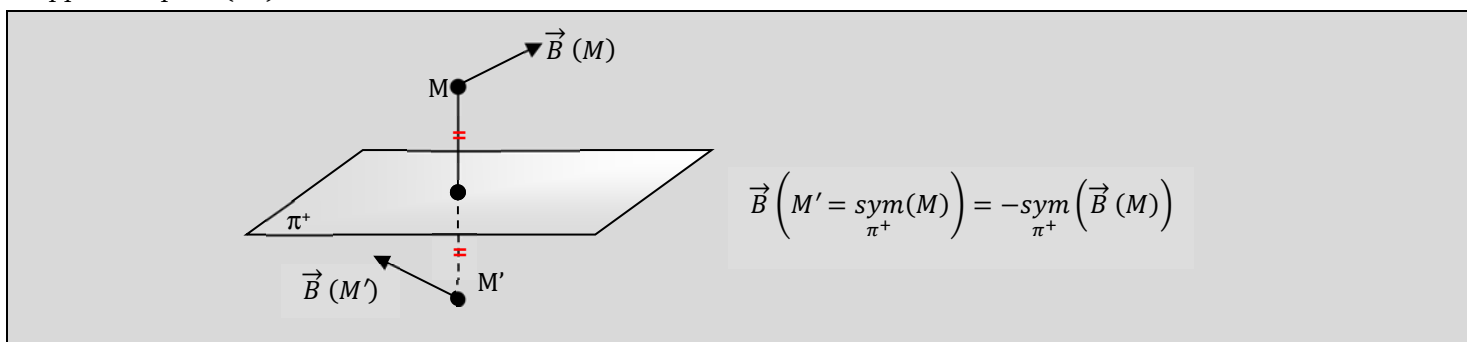


\Rightarrow Invariance par rotation autour de l'axe (Oz)

INVARIANCE PAR SYMETRIE :

Soit un plan (π^+) de symétrie.

Alors le champ en M' , symétrique de M par rapport au plan (π^+), est l'opposé du symétrique du champ en M par rapport au plan (π^+) :



c. TOPOGRAPHIE DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE.

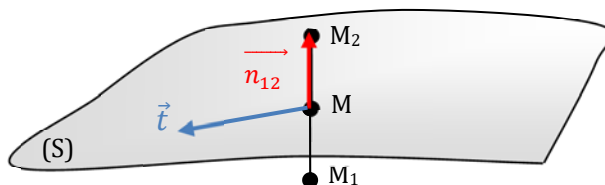
- ✓ Les lignes de champ de \vec{B} sont toujours fermées.
- ✓ Leur orientation est donnée par les règles suivantes par la règle des trois doigts de la main droite.
- ✓ Notons que les lignes de champ peuvent aller de l'infini à l'infini.

d. RELATIONS DE PASSAGE (NON EXIGIBLE).

On étudie l'évolution du champ \vec{B} à la traversée d'une surface parcourue par des courants surfaciques en un point M de la surface.

Pour cela on introduit le vecteur normal \vec{n}_{12} perpendiculaire à (S) en M et un vecteur tangent \vec{t} appartenant à (S) tel que : $\vec{B} = B_{\perp} \vec{n}_{12} + B_{\parallel} \vec{t}$

Le champ en M étant à priori discontinu, on introduit les points M_1 et M_2 au voisinage immédiat de M , M_1 étant juste « au dessous » de (S) et M_2 étant juste « en dessus » de (S) :



Les résultats sont alors les suivants :

Continuité de la composante normale de \vec{B} : $B_{\perp}(M_1) = B_{\perp}(M_2)$

Discontinuité de la composante tangentielle de \vec{B} : $B_{\parallel}(M_1) \neq B_{\parallel}(M_2)$

⇒ Plus précisément on a : $\Delta \vec{B}_{\parallel} = (B_{\parallel}(M_2) - B_{\parallel}(M_1)) \vec{t} = \mu_0 \vec{n}_{12} \wedge \vec{j}_s$

En conclusion : seule la composante tangentielle de \vec{B} subit une discontinuité à la traversée d'une surface chargée :

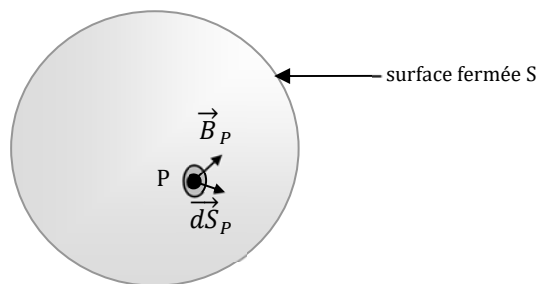
$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{n} \wedge \vec{j}_s$$

2. PROPRIETES DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE.

a. PROPRIETES INTEGRALES.

FLUX DE \vec{B} A TRAVERS UNE SURFACE FERMEE : \vec{B} EST A FLUX CONSERVATIF.

LE FLUX DU CHAMP \vec{B} A TRAVERS UNE SURFACE FERMEE EST NUL :



$$\oiint_S \vec{B}_p \cdot d\vec{S}_p = 0$$

CONSEQUENCES :

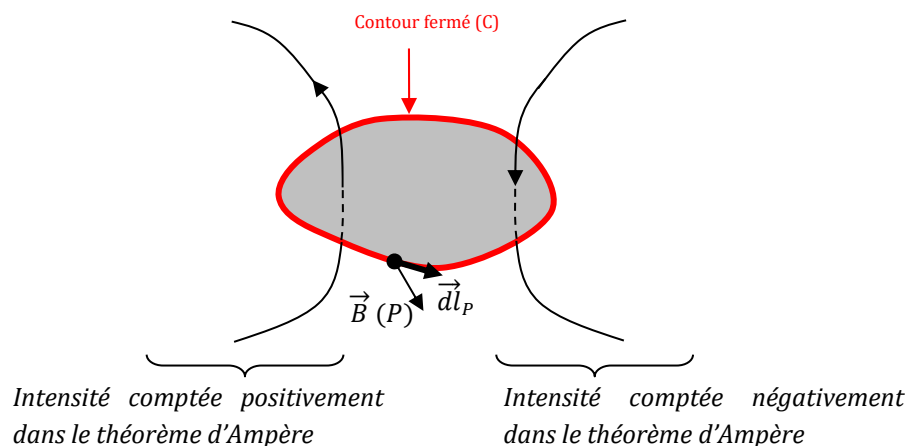
Le flux de \vec{B} dans un tube de champ se conserve.

Le flux de \vec{B} à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé est indépendant de la forme de la surface.

CIRCULATION DE \vec{B} SUR UN CONTOUR FERME.

La circulation de \vec{B} sur un contour fermé (C) est donnée par le **théorème d'Ampère** :

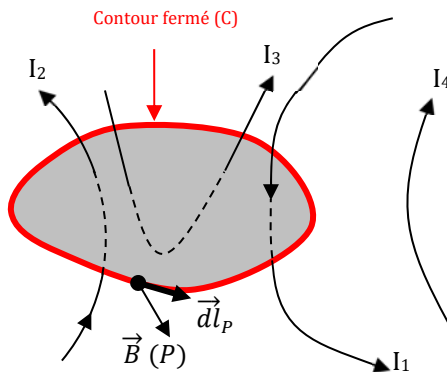
$\oint_{(C)} \vec{B}_p \cdot d\vec{l}_p = \mu_0 \underline{I}$ où \underline{I} est l'**intensité enlacée**, comptée positivement si elle sort par la face nord du contour fermé :



EXEMPLES :

CAS DES CIRCUITS FILIFORMES :

$$\Rightarrow C = \oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0(-I_1 + I_2 - I_3 + I_4).$$



CAS DES DISTRIBUTIONS VOLUMIQUES DE COURANT :

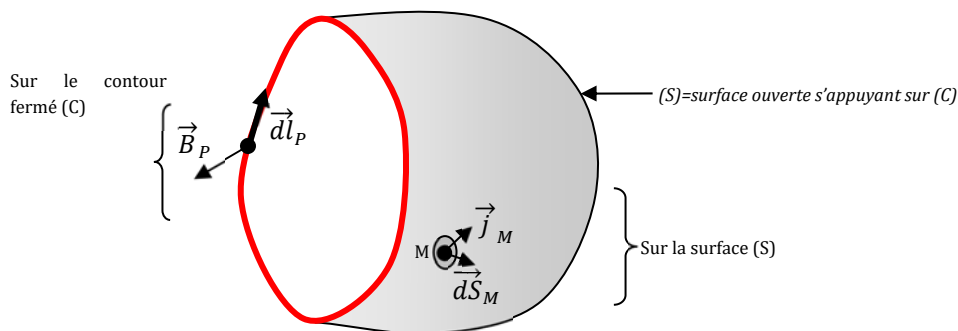
Dans ce cas là :

$$I = \iint_S \vec{j}_M \cdot d\vec{S}_M$$

où S est la surface s'appuyant sur le contour fermé.

⇒ Le théorème d'Ampère s'exprime donc comme suit :

$$\oint_{(C)} \vec{B}_P \cdot d\vec{l}_P = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{j}_M \cdot d\vec{S}_M$$

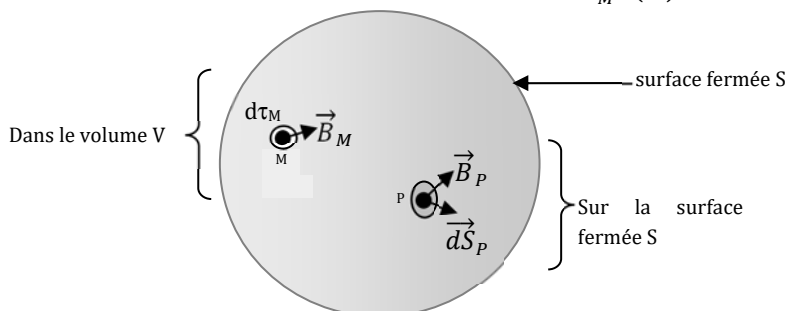


b. EQUATIONS LOCALES.

DIVERGENCE DE \vec{B} : EQUATION DE MAXWELL-FLUX.

Partons de $\oiint_S \vec{B}_p \cdot d\vec{S}_p = 0$

⇒ D'après le **théorème d'Ostrogradsky**, on a : $\oiint_S \vec{B}_p \cdot d\vec{S}_p = \iiint_V \text{div}(\vec{B}) \cdot d\tau_M$



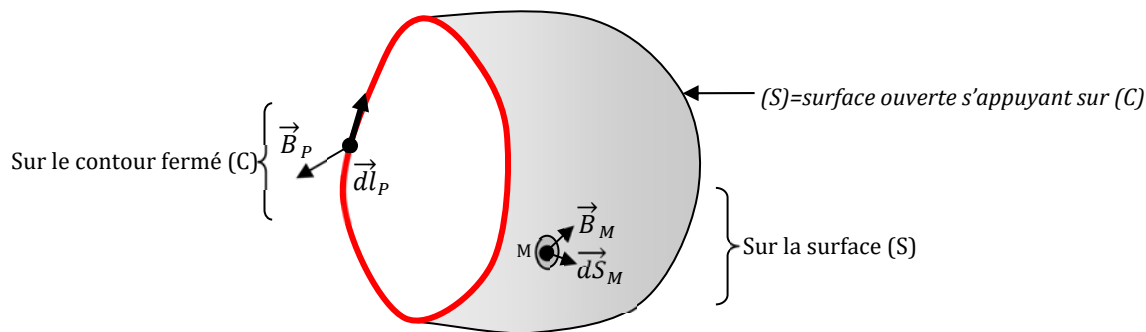
⇒ On a donc : $\iiint_V \operatorname{div}(\vec{B}) \cdot d\tau_M = 0$

$$\operatorname{div}_M(\vec{B}) = 0 \quad \forall M$$

⇒ Cette équation est l'**équation de Maxwell-Flux**.

ROTATIONNEL DE \vec{B} :

Partons du théorème d'Ampère : $\oint_{(C)} \vec{B}_P \cdot d\vec{l}_P = \mu_0 I$



⇒ D'après le théorème de Stokes, on a : $\oint_{(C)} \vec{B}_P \cdot d\vec{l}_P = \iint_S \operatorname{rot}_M(\vec{B}) \cdot d\vec{S}_M$

⇒ On a donc : $\iint_S \operatorname{rot}_M(\vec{B}) \cdot d\vec{S}_M = \mu_0 \iint_S \vec{j}_M \cdot d\vec{S}_M$

$$\operatorname{rot}_M(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}_M \quad \forall M$$

⇒ Ceci est la forme locale du théorème d'Ampère. Cette équation, appelée aussi **équation de Maxwell-Ampère** n'est valable qu'en régime stationnaire : Elle n'est plus vérifiée en régime variable contrairement aux équations de Maxwell-Flux et Maxwell-Gauss.

3. APPLICATION : CALCUL DE CHAMP MAGNETOSTATIQUE PAR APPLICATION DU THEOREME D'AMPERE

L'utilisation du théorème d'Ampère est intéressante dans les trois cas suivants :

- ✓ Distributions planes de courant (infinies).
- ✓ Distributions de courant à symétrie cylindrique (infinies).
- ✓ Bobinages.

Dans tous les cas, l'analyse systématique du problème se déroule de la manière suivante :

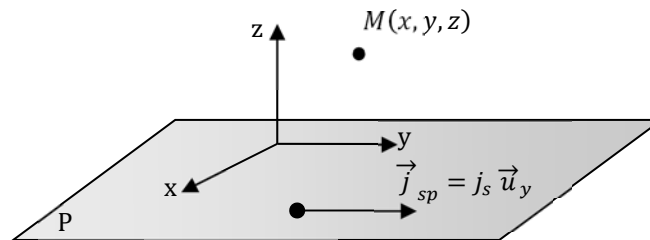
- ✓ Choix du système de coordonnées.
- ✓ Etude des symétries et des invariances de \vec{B}
- ✓ Choix du contour fermé (C).
- ✓ Calcul de la circulation de \vec{B}
- ✓ Application du théorème d'Ampère avec calcul de \underline{I} .
- ✓ Détermination finale de \vec{B} .
- ✓ Calcul éventuel de \vec{A} .

a. DISTRIBUTIONS PLANES DE COURANT.

NAPPE DE COURANT.

Soit une distribution surfacique plane et uniforme de courant de densité surfacique de courant $\vec{j}_{sp} = j_s \vec{u}_y$.

Vue la symétrie du système, on utilise un repère cartésien :



⇒ Le champ magnétostatique crée par la distribution en un point $M(x, y, z)$ de l'espace est donc de la forme :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(x, y, z)$$

SYMETRIES :

Le plan (M, y, z) est un plan (π^+) ⇒ Le champ $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan ⇒ $\vec{B}(M) = B(x, y, z) \vec{u}_x$

INVARIANCES.

INVARIANCE PAR TRANSLATION :

La distribution de courant est invariante par translation parallèle à (Ox) et (Oy)

⇒ Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend ni de x ni de y

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_x$$

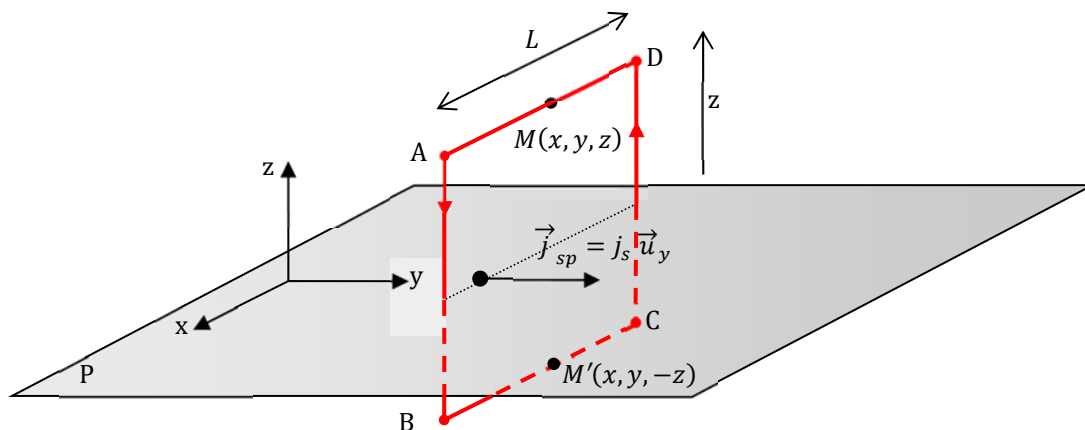
INVARIANCES PAR SYMETRIE :

Le plan (P) étant un plan de symétrie, le champ en M' , symétrique de M par rapport à (P) , est l'opposé du symétrique du champ en M :

$$\Rightarrow \vec{B}(M') = B(-z) \vec{u}_x = -B(z) \vec{u}_x$$

CHOIX DU CONTOUR FERME (C) :

On choisit un contour rectangulaire passant par M et M' et perpendiculaire à (Oy) de façon à enlacer la densité surfacique $\vec{j}_{sp} = j_s \vec{u}_y$:



CALCUL DE LA CIRCULATION :

$$C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l}}_0 + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l}}_0 + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$C = \int_{BC} \begin{pmatrix} B(-z) \vec{u}_x \\ -B(z) \end{pmatrix} \cdot (-dx \vec{u}_x) + \int_{DA} (B(z) \vec{u}_x) \cdot (dx \vec{u}_x)$$

$$\Rightarrow C = 2B(z)L$$

APPLICATION DU THEOREME D'AMPERE ET CALCUL DE \underline{I} :

$$\oint_{(C)} \vec{B}_p \cdot d\vec{l}_p = \mu_0 I$$

où :

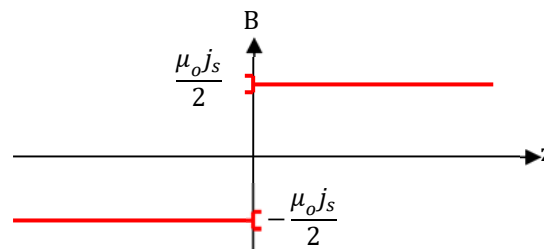
$$\underline{I} = \int_{A_1 A_2} \vec{j}_{sp} \cdot d\vec{r}_p = j_s L$$

$$\Rightarrow C = 2B(z)L = \mu_0 j_s L$$

$$\Rightarrow B(z) = \frac{\mu_0 j_s}{2}$$

D'où :

$$\begin{cases} \vec{B}(z > 0) = \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_x \\ \vec{B}(z < 0) = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_x \end{cases}$$



\Rightarrow On observe la discontinuité de la composante tangentielle de $\vec{B}(M)$: $\Delta \vec{B} = \mu_0 j_s \vec{u}_x = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$

RUBAN DE COURANT

On considère une nappe de courant d'épaisseur a parcouru par une densité volumique de courant uniforme :

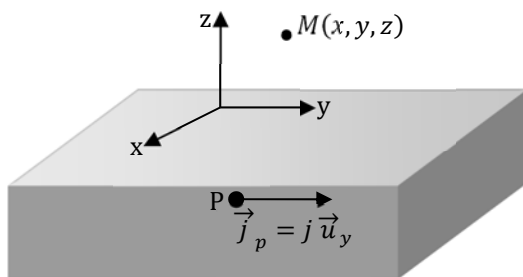
$$\vec{j}_p = j \vec{u}_y$$

Vue la symétrie du système, on utilise un repère cartésien :

SYMETRIE ET INVARIANCES :

L'étude des symétries et invariances et identique à ce qui a été réalisé précédemment, on obtient :

$$\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_x \text{ et } \vec{B}(M') = B(-z) \vec{u}_x = -B(z) \vec{u}_x$$



CHOIX DU CONTOUR FERME :

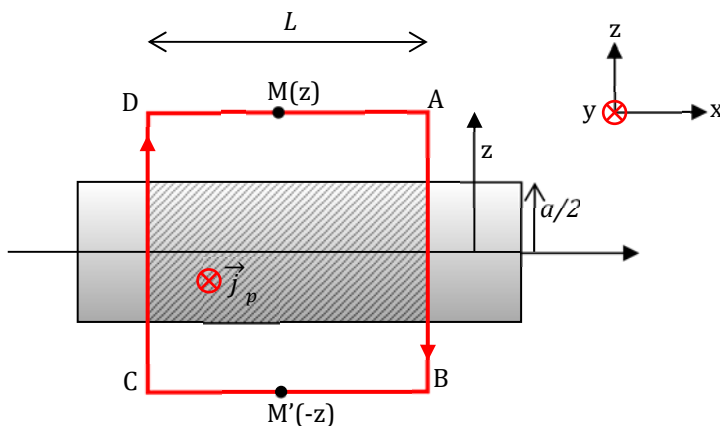
Comme précédemment, on choisit une circulation rectangulaire, passant par $M(z)$ et son symétrique par rapport au plan (Oxy) : $M'(-z)$.

On doit distinguer deux cas.

1^{ER} CAS : M EST A L'EXTERIEUR DE LA NAPPE DE COURANT :

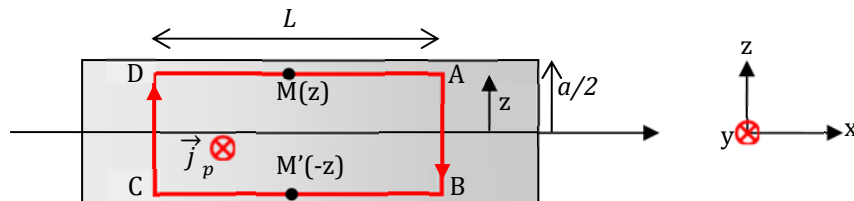
$$\Rightarrow \underline{I} = \iint_S \vec{j}_p \cdot \vec{dS}_p = j \cdot a \cdot L$$

$$\Rightarrow C = 2B(z)L = \mu_o j a L$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{B} \left(z > \frac{a}{2} \right) = \frac{\mu_o j a}{2} \vec{u}_x \\ \vec{B} \left(z < -\frac{a}{2} \right) = -\frac{\mu_o j a}{2} \vec{u}_x \end{cases}$$

2^{EME} CAS : M EST A L'INTERIEUR DE LA NAPPE DE COURANT :

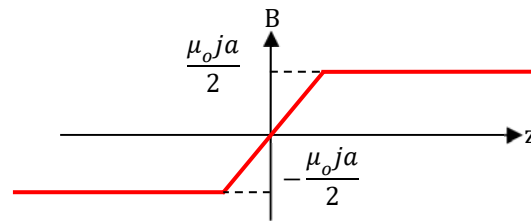


$$\Rightarrow \underline{I} = \iint_S \vec{j}_p \cdot \vec{dS}_p = j \cdot 2z \cdot L \Rightarrow C = 2B(z)L = 2\mu_o j z L$$

CONCLUSION

$$\begin{cases} \vec{B} \left(0 < z < \frac{a}{2} \right) = \mu_o j z \vec{u}_x \\ \vec{B} \left(-\frac{a}{2} < z < 0 \right) = -\mu_o j z \vec{u}_x \end{cases}$$

D'où :



b. DISTRIBUTIONS DE COURANT A SYMETRIE CYLINDRIQUE (INFINIE).

Vue la symétrie du système, on se place en coordonnées cylindrique.

Soit un point P de la distribution de courant $\vec{j}_p(r_p, \theta_p, z_p)$.

On appelle distribution de courant à symétrie cylindrique « infinie » toute distribution où \vec{j}_p ne dépend que de r_p et est suivant (Oz) : $\vec{j}_p(M) = j_p(r_p) \vec{u}_z$

Soit un point M où l'on calcule le champ crée par la distribution : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$

ÉTUDE DES SYMETRIES.

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution des courants.

⇒ Le champ $\vec{B}(M)$ est porté par \vec{e}_θ

⇒ $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$

ÉTUDE DES INVARIANCES.

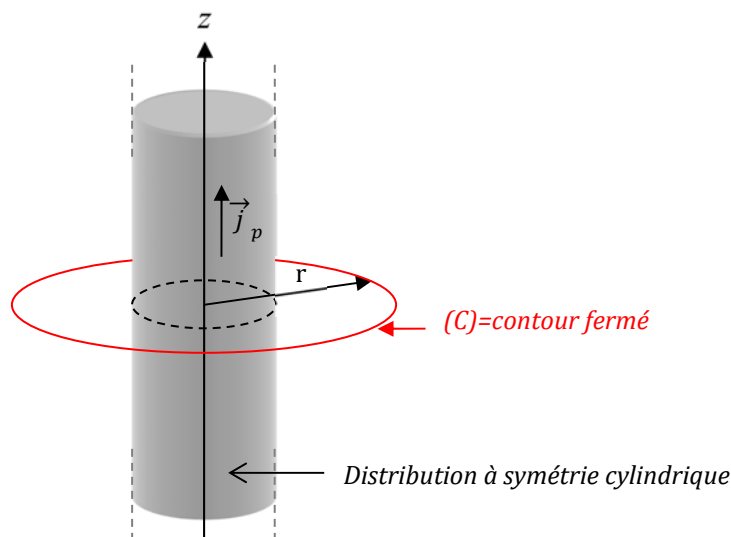
La distribution des courants est invariante par translation parallèle à (Oz) et par rotation d'angle θ .

⇒ Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend ni de θ ni de z .

⇒ $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$

CHOIX DU CONTOUR FERME :

Le contour fermé choisi est cercle d'axe (Oz) de rayon r , et donc passant par le point M où l'on calcule le champ $\vec{B}(M)$



CALCUL DE LA CIRCULATION :

$$C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(C)} (B(r) \vec{u}_\theta) \cdot (dl \vec{u}_\theta) = \oint_{(C)} B(r) \cdot dl$$

⇒ $B(r)$ étant constant sur la circulation, on a donc : $C = 2\pi r \cdot B(r)$

APPLICATION DU THEOREME D'AMPERE :

Soit \underline{I} l'intensité enlacée par la circulation, on a alors :

$$C = 2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \underline{I} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi r}$$

Attention \underline{I} peut dépendre de r !!

EXEMPLE :

CHAMP CREE PAR UN CIRCUIT FILIFORME RECTILIGNE INFINI PARCOURU PAR UN COURANT I :

Dans ce cas là : $\underline{I} = I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

CHAMP CREE PAR UN CONDUCTEUR RECTILIGNE INFINI DE SECTION DE RAYON R ET PARCOURU PAR UN COURANT I.

On a : $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot \pi R^2$

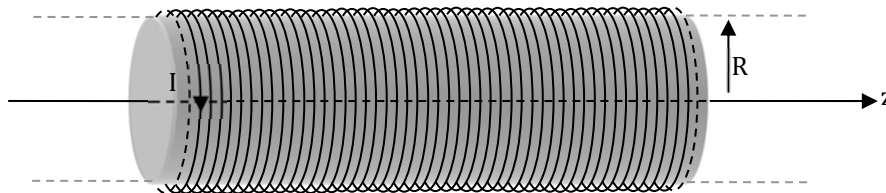
Deux cas se présentent :
 Si $r \geq R$ alors $\underline{I} = I$ et donc : $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 R^2}{2r} j$
 Si $r \leq R$ alors $\underline{I} = \pi r^2 j$ et donc : $B(r) = \frac{\mu_0 r}{2} j$

c. BOBINAGES

Il s'agit de solénoïdes infinis ou de bobinages toriques quelconques.

SOLENOÏDE INFINI.

On considère un solénoïde infini, d'axe (Oz) , de base de rayon R, comportant n spires par unités de longueur :



On cherche à déterminer le champ \vec{B} crée en tout point de l'espace.

Vue la symétrie du système, on utilise un repère cylindrique.

\Rightarrow Le champ crée en M est donc de la forme : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$

SYMETRIES :

Le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe (Oz) est un plan de symétrie

\Rightarrow Le champ $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan : il est donc suivant \vec{e}_z

$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_z$

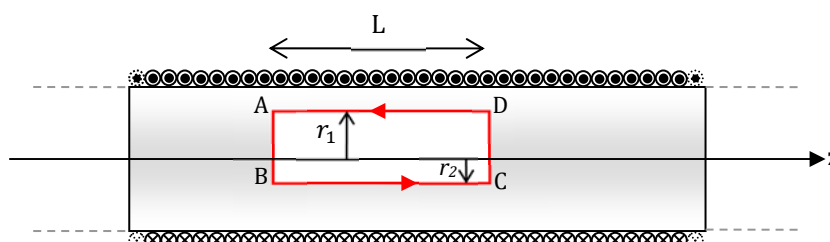
INVARIANCES :

La distribution de courant est invariante par translation parallèle à (Oz) et par rotation autour de l'axe (Oz) .

\Rightarrow Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend ni de z ni de $\theta \Rightarrow \vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$

CHOIX DU CONTOUR FERME :

On choisit un rectangle passant par le point M et contenant l'axe (Oz) . On aura par exemple :



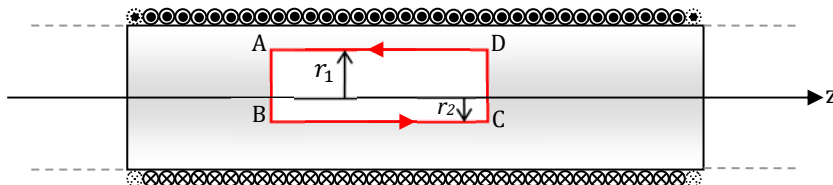
CALCUL DE LA CIRCULATION :

$$C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow C = \int_{BC} (B(r_2) \vec{u}_z) \cdot (dz \vec{u}_z) + \int_{DA} (B(r_1) \vec{u}_z) \cdot (-dz \vec{u}_z) \Rightarrow C = (B(r_2) - B(r_1))L$$

APPLICATION DU THEOREME D'AMPERE ET CALCUL DE \vec{B} :

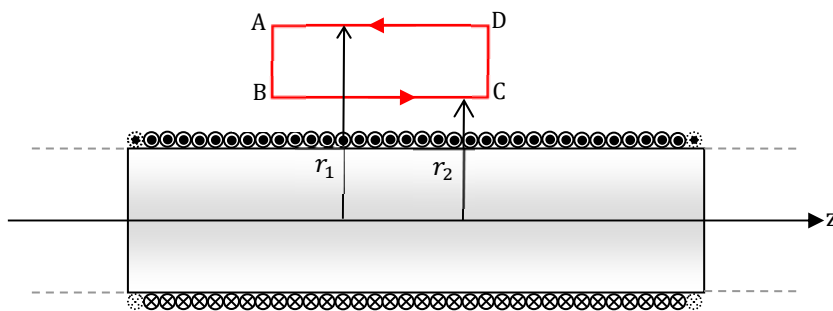
1^{ER} CAS : LA CIRCULATION RESTE A L'INTERIEUR DU SOLENOÏDE



On a alors : $\vec{I} = 0 \Rightarrow B(r_2) = B(r_1)$

\Rightarrow Le champ $\vec{B}(M)$ est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

2^{EME} CAS : LA CIRCULATION RESTE A L'EXTERIEUR DU SOLENOÏDE



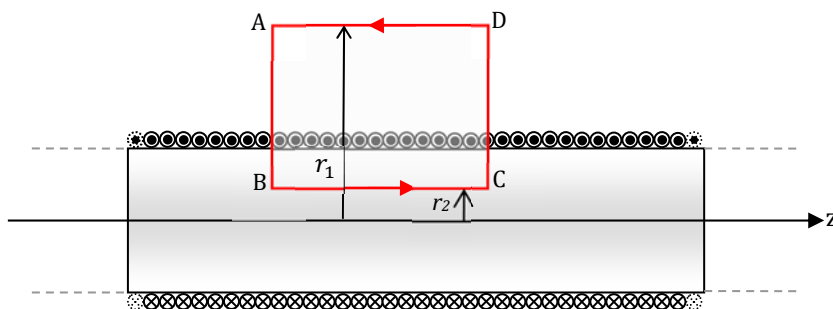
On a alors : $\vec{I} = 0 \Rightarrow B(r_2) = B(r_1)$

\Rightarrow Le champ $\vec{B}(M)$ est uniforme à l'extérieur du solénoïde.

Sachant qu'aucune ligne de champ ne parvient à sortir du solénoïde infini, on prend un champ extérieur nul :

$$\vec{B}_{ext}(M) = \vec{0}$$

3^{EME} CAS : LA CIRCULATION TRAVERSE LE SOLENOÏDE



On a lors : $\vec{I} = nLI$

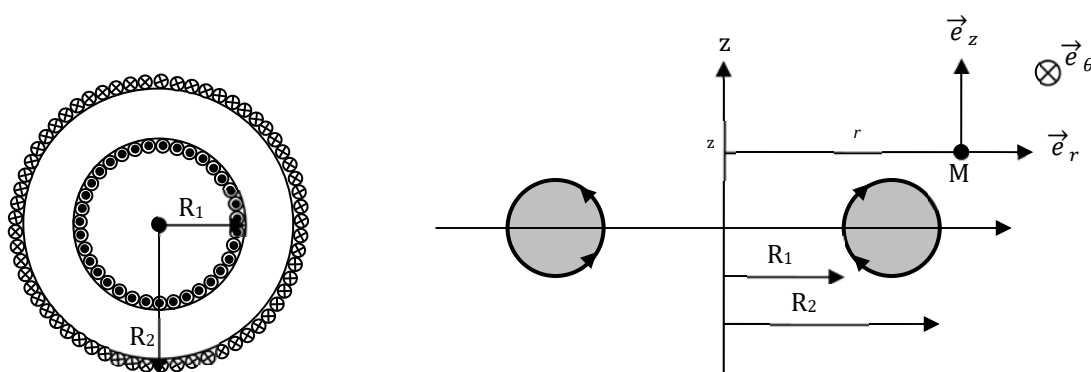
$$\Rightarrow C = \left(B(r_2) - \frac{B(r_1)}{0} \right) L = \mu_0 nLI \Rightarrow B(r_2) = \mu_0 nI$$

Le champ intérieur étant uniforme, on en déduit :

$$\vec{B}(M)_{int} = \mu_0 nI \vec{u}_z$$

BOBINAGE TORIQUE.

Soit un bobinage enroulé autour d'un tore (de section circulaire de rayon $a = \frac{R_2 - R_1}{2}$)



Vue la symétrie du système, on utilise un repère cylindrique.

⇒ Le champ $\vec{B}(M)$ créée par le bobinage est de la forme :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$$

SYMETRIES :

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution des courants.

⇒ Le champ $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan : il est donc suivant \vec{e}_θ

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

INVARIANCES :

La distribution est invariante par rotation d'angle θ

⇒ Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend pas de θ :

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta$$

CHOIX DU CONTOUR FERME :

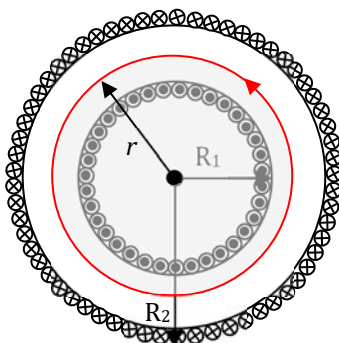
On choisit comme contour fermé le cercle d'axe (Oz) et de rayon r : Sur ce contour fermé r et z sont constants et le champ est tangent en tout point.

CALCUL DE LA CIRCULATION :

$$C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(C)} (B(r, z) \vec{e}_\theta) \cdot (dl \vec{e}_\theta) = \oint_{(C)} B(r, z) \cdot dl = 2\pi r \cdot B(r, z)$$

APPLICATION DU THEOREME D'AMPERE ET CALCUL DE \underline{I} :

$$C = 2\pi r \cdot B(r, z) = \mu_0 \underline{I}$$

1^{ER} CAS : LA CIRCULATION EST A L'INTERIEUR DU TORE :

Dans ce cas-là : $\underline{I} = N \cdot I$

$$\Rightarrow C = 2\pi r \cdot B(r, z) = \mu_0 N I$$

$$\Rightarrow B(r, z) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

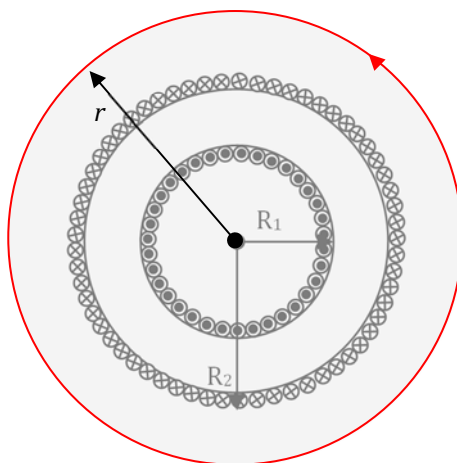
\Rightarrow Le champ $\vec{B}(M)$ à l'intérieur du bobinage torique vaut :

$$\vec{B}_{int}(M) = B_{int}(r, z) \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

2^{EME} CAS : LA CIRCULATION EST A L'EXTERIEUR DU TORE :

Dans ce cas là : $\underline{I} = 0 \Rightarrow B(r, z) = 0$

\Rightarrow Le champ $\vec{B}(M)$ à l'extérieur du bobinage torique est nul :

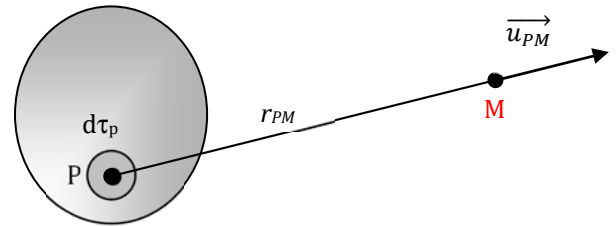


$$\vec{B}_{ext}(M) = \vec{0}$$

ANNEXE 1 : CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE PAR DES DISTRIBUTIONS CONTINUES (HP)

CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION VOLUMIQUE DE CHARGES

Soit une **distribution volumique de charge** (V). Soit un point P de cette distribution sur lequel est centrée la charge élémentaire $dq_p = \rho_p \cdot d\tau_p$ où ρ_p est la densité volumique de charge en P.



Le champ électrique crée en M par la charge dq_p en P vaut :

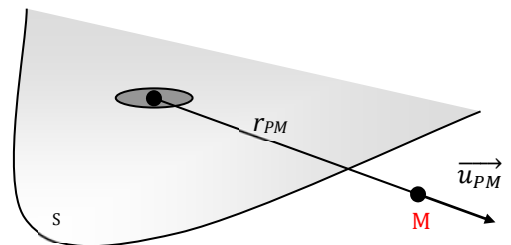
$$d\vec{E}(M, P) = \frac{dq_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} \vec{u}_{PM} = \frac{\rho_p \cdot d\tau_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} \vec{u}_{PM}$$

Le champ électrique crée en M par la distribution (C) est :

$$\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{\rho_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} \vec{u}_{PM} d\tau_p$$

CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION SURFACIQUE DE CHARGES

Soit une **distribution surfacique de charge** (S). Soit un point P de cette distribution sur lequel est centrée la charge élémentaire $dq_p = \sigma_p \cdot dS_p$ où σ_p est la densité surfacique de charge en P.



Le champ électrique crée en M par la charge dq_p en P vaut :

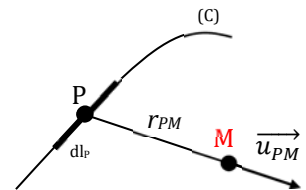
$$d\vec{E}(M, P) = \frac{dq_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} \vec{u}_{PM} = \frac{\sigma_p \cdot dS_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} \vec{u}_{PM}$$

Le champ électrique crée en M par la distribution (C) est :

$$\vec{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} \vec{u}_{PM} dS_p$$

CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION LINEIQUE DE CHARGES (HP)

Soit une **distribution linéique de charge** (C). Soit un point P de cette distribution sur lequel est centrée la charge élémentaire $dq_p = \lambda_p \cdot dl_p$ où λ_p est la densité linéique de charge en P.



Le champ électrique crée en M par la charge dq_p en P vaut :

$$d\vec{E}(M, P) = \frac{dq_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} \vec{u}_{PM} = \frac{\lambda_p \cdot dl_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} \vec{u}_{PM}$$

Le champ électrique crée en M par la distribution (C) est :

$$\vec{E}(M) = \int_C \frac{\lambda_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} \vec{u}_{PM} dl_p$$

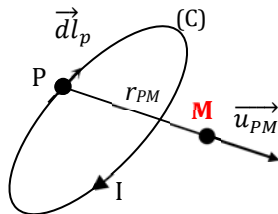
ANNEXE 2 : POTENTIEL ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION DE CHARGE (HP)

Distribution	Schéma	Potentiel crée
distribution volumique de charges		$V(M) = \iiint_V \frac{\rho_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}} d\tau_p$
distribution surfacique de charge (S)		$V(M) = \iint_S \frac{\sigma_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}} dS_p$
distribution linéique de charges (C)		$V(M) = \int_C \frac{\lambda_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}} dl_p$
distribution discrète de charges ponctuelles		$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$
charge ponctuelle		$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

ANNEXE 3 : LOIS DE BIOT ET SAVART

CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UN CIRCUIT FILIFORME.

Soit un circuit filiforme (C) parcouru par un courant I :

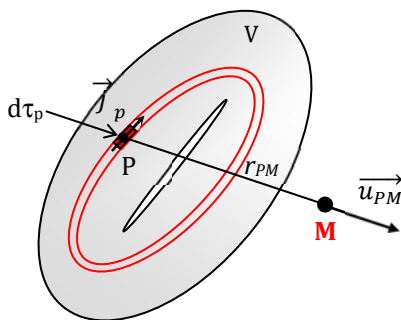


Le champ $\vec{B}(M)$ crée en un point M de l'espace par ce circuit filiforme est :

$$\vec{B}(M) = \int_C \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}_p \wedge \vec{u}_{PM}}{r_{PM}^2}$$

CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR DES COURANTS VOLUMIQUES.

Soit un conducteur de volume V parcouru par des courants volumiques de vecteur densité de courant \vec{j}_p :



Le champ $\vec{B}(M)$ crée en un point M de l'espace par la distribution volumique est :

$$\vec{B}(M) = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_p \wedge \vec{u}_{PM}}{r_{PM}^2} d\tau_p$$

Le champ $\vec{B}(M)$ crée en un point M de l'espace par la distribution surfacique est :

$$\vec{B}(M) = \iint_S \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_{s,p} \wedge \vec{u}_{PM}}{r_{PM}^2} dS_p$$

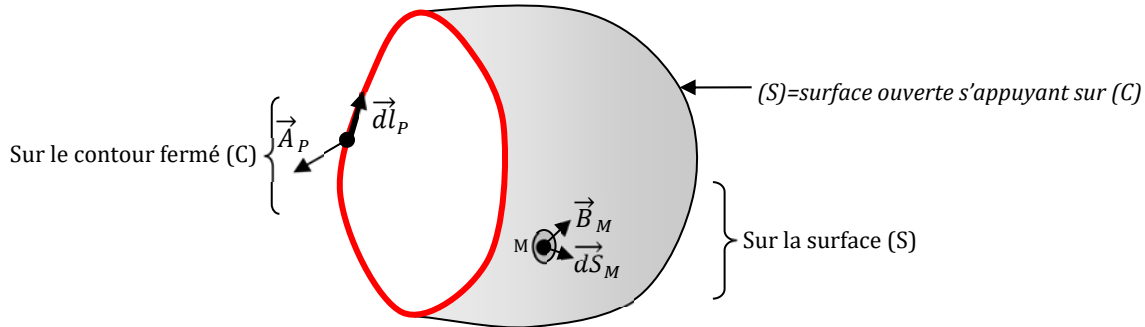
ANNEXE 4 : POTENTIEL VECTEUR \vec{A}

CONSEQUENCE DE L'EQUATION DE MAXWELL-FLUX : \vec{B} DERIVE D'UN POTENTIEL VECTEUR \vec{A}

Sachant que $\forall \vec{X} \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{X})) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{X}) = 0$, on en déduit que on peut écrire \vec{B} sous la forme d'un rotationnel :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$$

L'expression intégrale de cette équation locale est obtenue en calculant le flux de \vec{B} à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé:



$$\iint_S \vec{B}_M \cdot d\vec{S}_M = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot d\vec{S}_M \text{ d'après } \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$$

$$\Rightarrow \text{En utilisant le } \textit{théorème de Stokes}, \text{ on obtient : } \oint_{(C)} \vec{A}_P \cdot d\vec{l}_P = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot d\vec{S}_M$$

D'où :

$$\iint_S \vec{B}_M \cdot d\vec{S}_M = \oint_{(C)} \vec{A}_P \cdot d\vec{l}_P$$

Le flux de \vec{B} à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé est égal à la circulation de \vec{A} le long de ce contour fermé

REMARQUE 1 :

\vec{A} est défini à un gradient près.

$$\text{En effet, soit } \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(f), \text{ on a : } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}') = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) + \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(f))}_{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0}} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}') = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{B}$$

REMARQUE 2 :

Cette indétermination peut être mise à profit en imposant des conditions sur \vec{A} pour simplifier des calculs intermédiaires. Ces conditions sont appelées jauges.

$$\text{Jauge de Lorentz : } \text{div}(\vec{A}) + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\text{Jauge de Coulomb : } \text{div}(\vec{A}) = 0 \text{ (Jauge de Lorentz en régime stationnaire)}$$

EQUATION DE POISSON :

$$\text{Partons de la forme locale du théorème d'Ampère : } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_o \vec{j}_M \quad \forall M$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \mu_o \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu_o \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \left(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{\text{div}(\vec{A})} \right) - \underbrace{\vec{\nabla}^2(\vec{A})}_{\Delta \vec{A}} = \mu_o \vec{j}$$

Soit, en utilisant la jauge de Coulomb ($\text{div} \vec{A} = 0$) :

$$\vec{\Delta} \vec{A} + \mu_o \vec{j} = \vec{0} \text{ Équation de Poisson}$$

Les solutions de cette équation se déduisent par analogies avec le potentiel scalaire V :

Chaque coordonnée vérifie une équation de poisson de la forme : $\Delta A_k + \mu_o j_k = 0$ où $k = \{x, y, z\}$.

\Rightarrow Par analogie avec $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_o} = 0$ et $V(M) = \iiint_V \frac{\rho_p}{4\pi\epsilon_o r_{PM}} d\tau_p$, on en déduit que la coordonnée A_k vérifie :

$$A_k(M) = \iiint_V \frac{\mu_o j_{kp}}{4\pi r_{PM}} d\tau_p$$

Distribution	Schéma	Expression
Distribution volumique de courant		$\vec{A}(M) = \iiint_V \frac{\mu_o \vec{j}_p}{4\pi r_{PM}} d\tau_p$
Circuit filiforme		$\vec{A}(M) = \int_C \frac{\mu_o I \cdot \vec{dl}_p}{4\pi r_{PM}}$

ANNEXE 6 : ANALOGIES ELECTROSTATIQUE - GRAVITATION

	ELECTROSTATIQUE	GRAVITATION
Force d'interaction	Force d'interaction entre deux particules M_1 et M_2 chargées (q_1, q_2) : $\vec{F}(M_1 \rightarrow M_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{M_1 M_2}}{(M_1 M_2)^3}$	Force d'interaction entre deux particules M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 : $\vec{F}(M_1 \rightarrow M_2) = -G m_1 m_2 \times \frac{\vec{M_1 M_2}}{(M_1 M_2)^3}$
Définition des champs	Force exercée sur une particule chargée : $\vec{F} = q \vec{E}$ \vec{E} est un vrai vecteur	Force exercée sur une particule de masse m : $\vec{F} = m \vec{A}$ \vec{A} est un vrai vecteur
Charges élémentaire et masse	Charge élémentaire Densité volumique de charge : $dQ = \rho \cdot d\tau$ Densité surfacique de charge : $dQ = \sigma \cdot dS$ Densité linéique de charge : $dQ = \lambda \cdot dl$	Masse élémentaire Densité volumique de masse : $dm = \rho \cdot d\tau$ Densité surfacique de masse : $dm = \sigma \cdot dS$ Densité linéique de masse : $dm = \lambda \cdot dl$
Expressions des champs	Champ crée par une distribution volumique de charge : $\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{\rho_p \vec{u}_{PM}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} d\tau_p$ Champ crée par une distribution surfacique de charge : $\vec{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma_p \vec{u}_{PM}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} dS_p$ Champ crée par une distribution linéique de charge : $\vec{E}(M) = \int_C \frac{\lambda_p \vec{u}_{PM}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}^2} dl_p$	Champ crée par une distribution volumique de masse : $\vec{A}(M) = \iiint_V -G \frac{\rho_p \vec{u}_{PM}}{r_{PM}^2} d\tau_p$ Champ crée par une distribution surfacique de masse : $\vec{A}(M) = \iint_S -G \frac{\sigma_p \vec{u}_{PM}}{r_{PM}^2} dS_p$ Champ crée par une distribution linéique de masse : $\vec{A}(M) = \int_C -G \frac{\lambda_p \vec{u}_{PM}}{r_{PM}^2} dl_p$
Potentiels	\vec{E} dérive d'un potentiel scalaire : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr}$	\vec{A} dérive d'un potentiel scalaire : $\vec{A} = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow dV = -\vec{A} \cdot \vec{dr}$
Expressions des potentiels	Potentiel crée par une distribution volumique de charge : $V(M) = \iiint_V \frac{\rho_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}} d\tau_p$	Potentiel crée par une distribution volumique de masse : $V(M) = \iiint_V -G \frac{\rho_p}{r_{PM}} d\tau_p$
Expressions des potentiels	Potentiel crée par une distribution surfacique de charge : $V(M) = \iint_S \frac{\sigma_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}} dS_p$ Potentiel crée par une distribution linéique de charge : $V(M) = \int_C \frac{\lambda_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{PM}} dl_p$	Potentiel crée par une distribution surfacique de masse : $V(M) = \iint_S -G \frac{\sigma_p}{r_{PM}} dS_p$ Potentiel crée par une distribution linéique de masse : $V(M) = \int_C -G \frac{\lambda_p}{r_{PM}} dl_p$
Circulation sur un contour fermé	\vec{E} est à circulation conservative : $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$ Cas d'un contour non fermé : $\int_{AB} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\Delta V = -(V_B - V_A)$	\vec{A} est à circulation conservative : $\oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0$ Cas d'un contour non fermé : $\int_{AB} \vec{A} \cdot \vec{dl} = -\Delta V = -(V_B - V_A)$

Flux à travers une surface fermée	<p>Théorème de Gauss :</p> $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	<p>Théorème de Gauss :</p> $\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$
Discontinuités	<p>La composante normale du champ \vec{E} subi une discontinuité à la traversée d'une surface chargée :</p> $\vec{\Delta E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$	<p>La composante normale du champ \vec{A} subi une discontinuité à la traversée d'une surface massique :</p> $\vec{\Delta A} = -4\pi G \sigma \vec{n}$
Equation de Poisson	$\Delta V_M + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$	$\Delta V_M - 4\pi G \rho(M) = 0$
Lignes de champ	<p>Les lignes de champ de \vec{E} sont toujours ouvertes. Elles sont dirigées soit : D'une charge positive vers une charge négative. D'une charge positive vers l'infini. De l'infini vers une charge négative.</p>	<p>Les lignes de champ de \vec{A} sont toujours ouvertes. Elles sont dirigées d'une masse vers l'infini.</p>
Symétries	<p>Soit un point M appartenant à un plan de symétrie de la répartition de charge, alors le champ \vec{E} en M appartient à ce plan. Soit un point M appartenant à un plan d'antisymétrie de la répartition de charge, alors \vec{E} en M est perpendiculaire à ce plan.</p>	<p>Soit un point M appartenant à un plan de symétrie de la répartition de masse, alors le champ \vec{A} en M appartient à ce plan.</p>