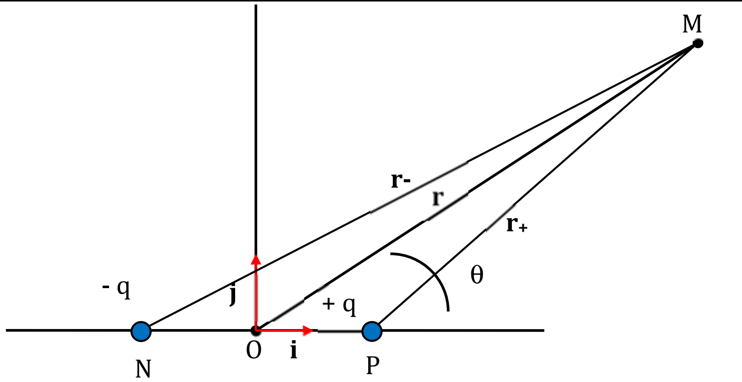
DIPOLE ELECTRIQUE.

I. GENERALITES, DEFINITIONS.

Un moment dipolaire est l'ensemble de deux charges de même valeur absolue mais de signes opposés très proches l'une de l'autre – Ce qui veut dire que l'on s'intéresse au champ crée à une distance des charges grande par rapport à leur éloignement.



On définit alors le ***moment dipolaire*** : $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$

- L'unité du moment dipolaire est le Debye : $1D = \frac{1}{3}10^{-29}\,C.m$
- On introduit un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ où O est le milieu du segment NP. On repère alors un point M du plan par ses coordonnées polaires (r,θ) .
- On pose : $\vec{r}_- = \overrightarrow{NM}$, $\vec{r}_+ = \overrightarrow{PM}$ et $NP = a$.
- Le point M étant très éloigné du dipôle, on a : $a \ll r$

II. ETUDE DU CHAMP ET DU POTENTIEL ELECTROSTATIQUES CREES EN UN POINT M ELOIGNE.

1. POTENTIEL CREE PAR LE DIPOLE EN M EN FONCTION DE R+ ET R- .

Le potentiel V crée par l'ensemble des deux charges en M est : $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_-} \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$

a. EXPRESSION DE R+ ET R- EN FONCTION DE A , R ET θ.

$$r_+^2 = \left(\overrightarrow{PM}\right)^2 = \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = \left(r\vec{u} - \frac{a}{2}\vec{i}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\cos\theta$$

De même : $r_-^2 = \left(\overrightarrow{NM}\right)^2 = \left(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = \left(r\vec{u} + \frac{a}{2}\vec{i}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ar\cos\theta$

D'où :

$$r_+ = r\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2} = r\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2\right)^{1/2} \text{ et } r_- = r\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2} = r\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2\right)^{1/2}$$

b. EXPRESSION FINALE DE V(M).

$r_+ = r(1+\varepsilon_+)^{1/2}$ où : $\varepsilon_+ = -\frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2$ et $r_- = r(1+\varepsilon_-)^{1/2}$ où : $\varepsilon_- = +\frac{a}{r}\vec{u}\cdot\vec{i} + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 = +\frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2$

Sachant que r >> a, on a donc : $|\varepsilon_+|$ << 1 et $|\varepsilon_-|$ << 1, effectuons un développement limité à **l'ordre 2** en a/r :

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{r}(1+\varepsilon_\pm)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon_\pm + \frac{3}{8}\varepsilon_\pm^2\right).$$

En ne gardant que les termes en $\left(\frac{a}{r}\right)$ et en $\left(\frac{a}{r}\right)^2$, on obtient :

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{a}{r}\cos\theta\right)^2\right) \text{ et } \frac{1}{r_-} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{r}\cos\theta - \left(\frac{a}{2r}\right)^2\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{a}{r}\cos\theta + \right)^2\right)$$

On en déduit : $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(\frac{1}{2}\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{a}{r}\cos\theta\right) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}$ ⇒ **L'ordre 1 suffit !**

> Le potentiel électrostatique crée en un point M de l'espace par un dipôle électrostatique placé en O, tel que $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ vaut :
>
> $$V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p \times \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
>
> Où r et θ sont les coordonnées sphériques de M.

c. EXPRESSION DES EQUIPOTENTIELLES.

Un point M(r,θ), repéré par ses coordonnées polaires appartient à l'équipotentielle V_o signifie que r et θ vérifient :

$V_o = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2} \Rightarrow r^2 = k.\cos(\theta)$ où k est une constante.

d. EXPRESSION DU CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE EN M.

On part de l'expression : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

Le gradient en coordonnées polaires est un vecteur de la forme : $\forall f,\ \overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$.

$$\Rightarrow \vec{E} = \left|\begin{array}{l} -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3} \end{array}\right.$$

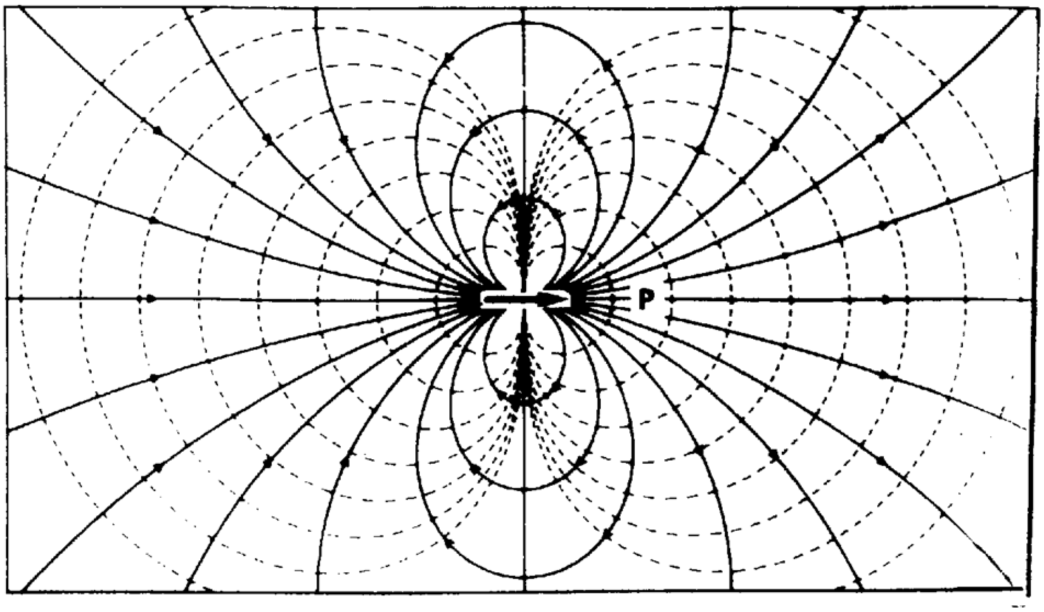
e. EXPRESSION DES LIGNES DE CHAMP.

Soit $\vec{dl}$ un déplacement élémentaire le long d'une ligne de champ, alors : $\vec{E}\wedge\vec{dl} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{E}\wedge\vec{dl} = \left|\begin{array}{l} E_r \\ E_\theta \\ E_z = 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} dr \\ rd\theta \\ dz \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} E_\theta dz = 0 \\ E_r dz = 0 \end{array}\right\} dz = 0 \\ E_r.rd\theta - E_\theta.dr = 0 \end{array}\right. \Rightarrow E_r.rd\theta - E_\theta.dr = 0 \Rightarrow \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}.r.d\theta - \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}.dr = 0$$

$\Rightarrow 2\cos\theta.r.d\theta - \sin\theta.dr = 0 \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2\ln(\sin\theta) + Cste \Rightarrow r = K(\sin\theta)^2$

f. Allure des lignes de champ et des equipotentielles.



g. Autre expression du champ cree en M.

On part de $V(M) = \dfrac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$ et on utilise :

- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$
- $\overrightarrow{grad}(ab) = a.\overrightarrow{grad}(b) + b.\overrightarrow{grad}(a)$ où a et b sont des scalaires.
- $\overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{r}) = \vec{p}$ et $\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}\right) = -\overrightarrow{grad}\left(\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^3}}_{a}.\underbrace{\vec{p}.\vec{r}}_{b}\right) \Rightarrow \vec{E}(M) = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^3}\overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{r}) + (\vec{p}.\vec{r})\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^3}\underbrace{\overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{r})}_{\vec{p}} + \frac{(\vec{p}.\vec{r})}{4\pi\varepsilon_o}\underbrace{\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)}_{-3\vec{r}/r^5}\right) \Rightarrow \vec{E}(M) = -\left(\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_o r^3} - \frac{3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r}}{4\pi\varepsilon_o r^5}\right)$$

Le champ électrostatique crée en un point M de l'espace par un dipôle électrostatique placé en O, tel que $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ vaut :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$

L'intérêt de cette expression est que $\vec{E}$ ne dépend pas du système de coordonnées choisi.

III. ÉNERGIE INTERNE DU DIPOLE.

1. ENERGIE POTENTIELLE DE LA CHARGE -Q PLACEE EN N DANS LE POTENTIEL CREE PAR LA CHARGE +Q EN P.

$E_p(N)=(-q).V(N)$ où V(N) est le potentiel crée par la charge +q en N : $V(N)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o a} \Rightarrow E_p(N)=\dfrac{-q^2}{4\pi\varepsilon_o a}$

2. ENERGIE POTENTIELLE DE LA CHARGE +Q PLACEE EN P DANS LE POTENTIEL CREE PAR LA CHARGE -Q EN N .

$E_p(P)=(+q).V(P)$ où V(P) est le potentiel crée par la charge -q en P : $V(P)=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_o a} \Rightarrow E_p(P)=\dfrac{-q^2}{4\pi\varepsilon_o a}$

CONCLUSION :

Ces deux énergies sont identiques : elles définissent l'énergie potentielle interne du dipôle c'est-à-dire l'énergie d'interaction entre les deux charges +q et –q.

IV. ETUDE D'UN DIPOLE PLACE DANS UN CHAMP ELECTROSTATIQUE.

1. DIPOLE DANS UN CHAMP $\vec{E}$ UNIFORME.

a. FORCE.

- Force exercée sur la charge +q : $\vec{F}(P)=q\vec{E}$
- Force exercée sur la charge -q : $\vec{F}(N)=-q\vec{E}$

$\Rightarrow$ Résultante des forces : $\boxed{\vec{F}=\vec{F}(P)+\vec{F}(N)=\vec{0}}$

Un dipôle placé dans un champ $\vec{E}$ uniforme ne subit aucune translation.

b. ÉNERGIE POTENTIELLE.

EXPRESSION :

Le champ électrostatique extérieur $\vec{E}$ dérive d'un potentiel électrostatique V(M)

- Energie potentielle de la charge +q : $E_p(P)=qV(P)$
- Energie potentielle de la charge -q : $E_p(N)=-qV(N)$

$\Rightarrow$ Energie potentielle totale : $E_p=E_p(N)+E_p(P)=q\big(V(P)-V(N)\big)$

Or : $dV=-\vec{E}.\vec{dr} \Rightarrow V(P)-V(N)=-\int_{NP}\vec{E}.\vec{dr}=-\vec{E}.\vec{NP}$ car $\vec{E}$ est uniforme $\Rightarrow \boxed{E_p=-q\vec{NP}.\vec{E}=-\vec{p}.\vec{E}}$

POSITIONS D'EQUILIBRE :

Soit α l'angle entre $\vec{E}$ et $\vec{p}$: $E_p=-\|\vec{p}\|.\|\vec{E}\|\cos(\alpha)$

$\Rightarrow$ E_p est minimale pour α = 0 : position d'équilibre stable

E_p est maximale pour α = π : position d'équilibre instable

c. Moment exerce sur le dipole en O.

Expression :

- Moment de $\vec{F}(N) = -q\vec{E}$: $\vec{\Gamma}_o(N) = \overrightarrow{ON} \wedge \vec{F}(N) = -q\left(\overrightarrow{ON} \wedge \vec{E}\right)$
- Moment de $\vec{F}(P) = +q\vec{E}$: $\vec{\Gamma}_o(P) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}(P) = +q\left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{E}\right)$

$\Rightarrow$ Moment résultant : $\vec{\Gamma}_o = \vec{\Gamma}_o(N) + \vec{\Gamma}_o(P) = +q\left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{E}\right) - q\left(\overrightarrow{ON} \wedge \vec{E}\right) = +q\left(\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{\Gamma}_o = \vec{p} \wedge \vec{E}}$

$\Rightarrow$ L'action du champ électrique uniforme se réduit au couple $\vec{\Gamma}_o$: le moment subit donc une rotation.

Equilibre :

$\vec{\Gamma}_o = \vec{p} \wedge \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow 0 = -\left\|\vec{p}\right\| . \left\|\vec{E}\right\| \sin(\alpha)$

$\Rightarrow$ Les positions d'équilibre correspondent à $\alpha=0$ et $\alpha=\pi$

$\Rightarrow$ On retrouve les positions vues précédemment.

Conclusion :

Un dipôle électrique placé dans un champ $\vec{E}$ uniforme subit uniquement une rotation pour s'aligner avec le champ : $\vec{E}$ et $\vec{p}$ sont alors colinéaires et de même sens (position d'équilibre stable).

2. Dipole dans un champ $\vec{E}$ faiblement non uniforme.

a. Energie potentielle.

Le champ électrostatique extérieur $\vec{E}$ dérive d'un potentiel électrostatique V(M)

- Energie potentielle de la charge +q : $E_p(P) = qV(P)$
- Energie potentielle de la charge -q : $E_p(N) = -qV(N)$

$\Rightarrow$ Energie potentielle totale : $E_p = E_p(N) + E_p(P) = q\left(V(P) - V(N)\right)$

Or : $dV = -\vec{E}.\vec{dr} \Rightarrow V(P) - V(N) = -\int_{NP} \vec{E}.\vec{dr}$

Le champ $\vec{E}$ n'étant pas uniforme, on ne peut pas simplifier à priori cette intégrale. Cependant, ***les variations locales du champ extérieur étant souvent très faibles entre les points N et P*** (qui sont très proches), on peut, dans une 1ère approximation, que $\vec{E}$ ne varie pas entre N et P.

$\Rightarrow \int_{NP} \vec{E}.\vec{dr} \approx \vec{E}.\overrightarrow{NP} \Rightarrow E_p = -q\overrightarrow{NP}.\vec{E} = -\vec{p}.\vec{E}$

$\Rightarrow$ L'expression de E_p est inchangée et les positions d'équilibres sont les mêmes que celles trouvées dans le cas d'un champ électrique uniforme.

b. Force.

- Force exercée sur la charge +q : $\vec{F}(P) = q\vec{E}(P)$
- Force exercée sur la charge -q : $\vec{F}(N) = -q\vec{E}(N)$

⇒ Résultante des forces : $\vec{F} = \vec{F}(P) + \vec{F}(N) \neq \vec{0}$

⇒ Un dipôle placé dans un champ $\vec{E}$ non uniforme est soumis à une résultante des forces non nulle : il subit donc une translation.

On montre que, dans le cas d'un champ faiblement non uniforme, la résultante des forces agissant sur le dipôle est :

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{grad})\vec{E}}$$

c. Moment exerce sur le dipole en O.

Expression :

- Moment de $\vec{F}(N) = -q\vec{E}$: $\vec{\Gamma}_o(N) = \overrightarrow{ON} \wedge \vec{F}(N) = -q\left(\overrightarrow{ON} \wedge \vec{E}(N)\right)$
- Moment de $\vec{F}(P) = +q\vec{E}$: $\vec{\Gamma}_o(P) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}(P) = +q\left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{E}(N)\right)$

⇒ Moment résultant : $\vec{\Gamma}_o = \vec{\Gamma}_o(N) + \vec{\Gamma}_o(P) = +q\left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{E}(P)\right) - q\left(\overrightarrow{ON} \wedge \vec{E}(N)\right)$

Pour simplifier l'expression de $\vec{\Gamma}_o$, on suppose que le champ est faiblement non-uniforme.

⇒ On montre alors que l'expression $\vec{\Gamma}_o = \vec{p} \wedge \vec{E}$ est toujours valable.

Conclusion :

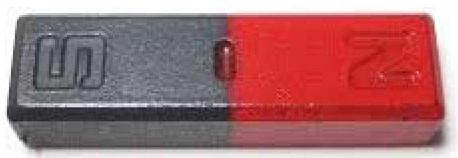
Un dipôle électrique placé dans un champ $\vec{E}$ faiblement non uniforme, est soumis :

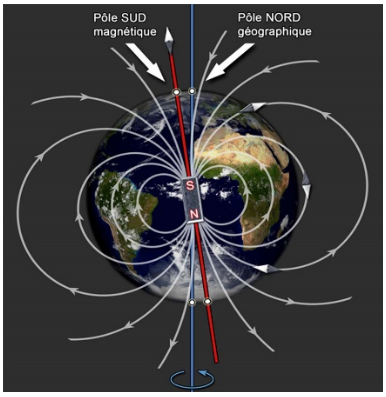
À une résultante des forces : $\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{grad}).\vec{E}$

À un couple : $\vec{\Gamma}_o = \vec{p} \wedge \vec{E}$

Son énergie potentielle étant toujours : $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

DIPÔLE MAGNETIQUE



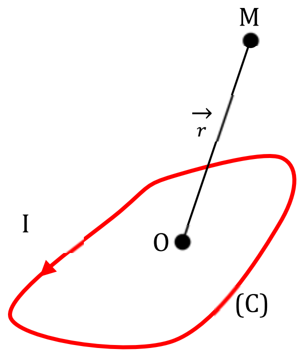


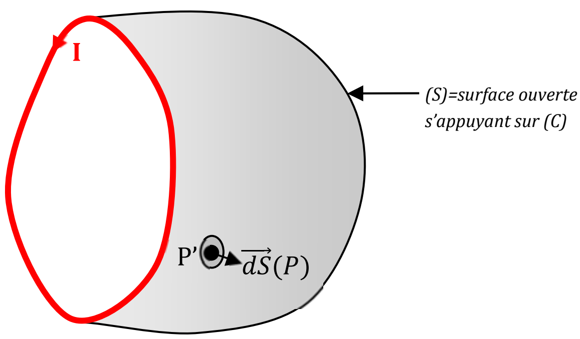
Un aimant allongé est souvent modélisé par un moment magnétique $\vec{m}$

Le magnétisme terrestre est souvent modélisé en utilisant un moment magnétique placé au centre de la terre

I. NOTION DE DIPOLE MAGNETIQUE.

Un dipôle magnétique est une boucle de courant rigide, pas forcément circulaire de petites dimensions par rapport à la distance de l'observateur.





Le moment magnétique $\vec{m}$ de ce dipôle magnétique est défini de la manière suivante :

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

Où, $\vec{S}$ est le vecteur surface défini par la boucle de courant (C) est : $\vec{S} = \iint_{(S)} \overrightarrow{dS}(P')$

Le ***potentiel vecteur*** $\vec{A}$, crée par un dipôle magnétique, de moment magnétique $\vec{m}$ en un point M éloigné est :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\wedge\vec{r}}{r^3}$$

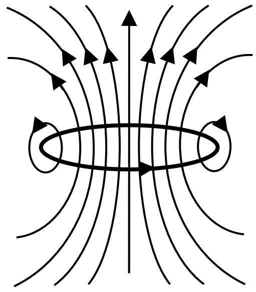
Le ***champ*** $\vec{B}$ ***crée par le dipôle*** est :

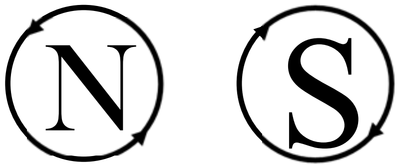
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi}\,\overrightarrow{grad}\left(\vec{m}.\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

Les lignes de champ de $\vec{B}(M)$, définies comme les courbes de l'espace tangentes en tout point au champ $\vec{B}$ et déterminées à partir de l'équation différentielle : $\overrightarrow{dr} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, ont pour équation polaires :

$$r(\theta) = K \sin^2 \theta$$

Ces lignes de champ sortent par la face nord de la spire et rentrent par sa face sud :





L'***énergie potentielle*** d'un champ dipôle magnétique placé dans un champ magnétique $\vec{B}_{ext}$ uniforme ou faible non uniforme est donnée par la formule :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ext}$$

Ainsi, à l'équilibre, le moment magnétique est aligné avec le champ magnétique appliqué : il est dans le même sens que $\vec{B}_{ext}$ pour un équilibre stable et dans le sens opposé pour un équilibre instable.

La ***résultante des actions mécaniques*** exercée sur un dipôle magnétique placé dans un champ magnétique uniforme est nulle. Dans le cas d'un champ magnétique non uniforme, cette résultante est non nulle et elle vaut :

$$\vec{F} = \vec{m} \cdot \overrightarrow{grad}\left(\vec{B}\right)$$

Le ***couple exercé sur un dipôle*** magnétique placé dans un champ magnétique uniforme ou faiblement uniforme vaut :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$$

Ainsi, placé dans un champ magnétique uniforme, un dipôle magnétique ne translate pas mais tourne pour s'aligner avec le champ.

Quand le champ appliqué est non uniforme, le dipôle tourne toujours pour s'aligner avec le champ mais il se déplace aussi vers les zones de champ fort.