

Énoncé DS2

Le sujet comporte deux extraits de sujets d'écrits :

- ☐ **SUJET 1** - Physique XENS - XSR PSI : Phénomènes de transport, thermo-électricité et applications
- calculatrice NON autorisée.
- ☐ **SUJET 2** - Physique I CCS PSI : Autour d'une centrale nucléaire - calculatrice autorisée.

Consignes

- ☐ Dès réception du sujet, lire intégralement les parties indépendantes.
- ☐ Repérer notamment les questions clefs, c'est à dire les questions dont les réponses ont un impact important sur la résolution du sujet. $\Rightarrow$ Passer du temps sur ces questions!
- ☐ Si au cours de votre résolution vous vous apercevez que "quelque chose ne va pas", arrêtez vous et reprenez votre raisonnement afin de trouver le moment où votre raisonnement est devenu faux.
- ☐ Ne pas utiliser de valeurs numériques au cours d'une démonstration littérale.
- ☐ Vérifier systématiquement l'homogénéité et la cohérence de vos résultats.
- ☐ Pour les applications numériques, faites attention aux chiffres significatifs et aux unités.
- ☐ Ne jamais poser d'équations électriques sans avoir au préalable défini ces grandeurs sur un schéma (conventions). Même chose pour les systèmes thermodynamiques et mécaniques.
- ☐ Ne jamais mener un calcul en mélangeant la notation réelle instantanée (notamment des cosinus et des sinus) et la représentation complexe.
- ☐ Un schéma vaut toujours mieux que de longs discours.
- ☐ Les applications numériques et les commentaires sont souvent surcotés dans les barèmes.

*** DÉBUT DU SUJET ***

Phénomènes de transport, thermoélectricité et applications.

Dans ce problème, nous nous intéressons à quelques phénomènes couplant les transports de charge et de chaleur. Dans un premier temps, on étudie les notions élémentaires sur le transport de la chaleur et de la charge dans un métal. Dans un second temps, nous nous intéresserons au couplage entre ces phénomènes, et nous analyserons en particulier les effets thermoélectriques.

Les effets thermoélectriques peuvent être utiles dans différents contextes. Notamment, ces dernières années, des dispositifs utilisant ces effets ont été envisagés afin d'élaborer des solutions de récupération d'énergie thermique dissipée dans des centres de données pour produire de l'énergie électrique.

Les matériaux ayant des propriétés thermoélectriques sont notamment utilisés pour réaliser des mesures de température. On étudiera ainsi, dans une dernière partie, les performances des thermomètres basés sur des jonctions thermoélectriques, que nous comparerons dans ce contexte aux caractéristiques des thermomètres utilisant les propriétés des métaux.

- Les applications numériques seront effectuées avec la précision qu'un calcul à la main permet aisément, et (sauf mention contraire) sans excéder deux chiffres significatifs. Les ordres de grandeur seront donnés avec un seul chiffre significatif. Les données numériques ont été choisies pour rendre aisés les calculs.
- Les références des questions abordées devront être indiquées de façon claire.
- Le sujet comporte 12 pages : les deux parties constituant ce sujet sont indépendantes et peuvent être traitées séparément. Certaines sous-parties peuvent être abordées indépendamment des questions précédentes. Il est conseillé d'aborder le sujet dans l'ordre des questions.

Notations, formulaire et données numériques.

- Charge élémentaire : $e \simeq 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Constante de Boltzmann : $k_B \simeq 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Masse d'un électron : $m_e \simeq 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Masse d'un proton (ou d'un neutron) : $m_p \simeq 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- Conductivité électrique du cuivre : $\gamma_0 \simeq 6,0 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
- Conductivité thermique du cuivre : $\lambda_{\text{Cu}} \simeq 3,0 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Conductivité thermique du platine : $\lambda_{\text{Pt}} \simeq 8,0 \times 10^1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 \simeq 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Masse volumique du platine : $\rho_{\text{Pt}} \simeq 2,1 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Capacité thermique massique du platine : $c_{\text{Pt}} \simeq 1,3 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Opérateur laplacien vectoriel en coordonnées cylindriques (r, θ, x) , pour un vecteur $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_x)$:

$$\Delta \vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_x}{\partial r} \right) \vec{u}_x .$$

On notera i l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$.

I.C Étude thermique

Afin de conduire l'étude thermique du barreau métallique, on se réfère au schéma de la figure 1. On suppose que l'ensemble est calorifugé, notamment les parois latérales du barreau métallique. On négligera donc les échanges d'énergie entre le système, constitué par les deux solides et le barreau, et l'extérieur.

On suppose dans un premier temps que les solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ se comportent comme des thermostats (aussi appelés réservoirs de température dans la suite) et que leurs températures respectives T_1 et T_2 sont constantes. On suppose également que la température est continue à l'interface entre les solides et le barreau, hypothèse traduite par les conditions suivantes : $T(x=0) = T_1$ et $T(x=\ell) = T_2$.

Le barreau est modélisé comme une phase condensée idéale de capacité thermique massique, notée c .

17. Rappeler la définition d'un thermostat. Donner la condition portant sur leur capacité thermique qui permettrait de considérer les solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ comme des thermostats.

18. Dans l'hypothèse de réponse linéaire (concept à préciser), rappeler la loi à laquelle obéit le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$. On notera la conductivité thermique λ .

Pour un conducteur métallique à température ambiante, la conductivité thermique λ et la conductivité électrique γ_0 sont reliées par la loi de WIEDEMANN-FRANZ :

$$\frac{\lambda}{\gamma_0 T} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2}. \quad (4)$$

19. Justifier l'affirmation : « *un bon conducteur électrique est un bon conducteur thermique* ». En utilisant la loi de WIEDEMANN-FRANZ et sur la base d'arguments physiques numériques, justifier que l'évolution de la conductivité thermique d'un métal est conforme aux comportements attendus et en déduire un ordre de grandeur de la conductivité thermique du cuivre λ_{Cu} .

20. On constate que la conductivité thermique du diamant est particulièrement élevée, et de l'ordre de $2,2 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Pourquoi la loi de WIEDEMANN-FRANZ ne s'applique-t-elle pas au diamant ?

21. Établir l'équation gouvernant l'évolution spatio-temporelle du champ de température $T(x,t)$ dans le barreau métallique.

22. Déterminer l'expression du profil de température $T(x)$ dans le barreau, en régime permanent.

23. Après avoir rappelé la définition de la résistance thermique d'un matériau, en déduire l'expression mathématique de la résistance thermique R_{th} du barreau métallique.

On étudie maintenant la situation où la température des thermostats T_1 et T_2 dépendent du temps. Initialement, $T_1(t=0) = T_{01}$ et $T_2(t=0) = T_{02}$. L'étude est conduite dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, c'est-à-dire qu'on suppose que les relations établies précédemment restent valables. On rappelle que pour un thermostat $dU = C_{\text{th}} dT$, avec C_{th} la capacité thermique du thermostat, les capacités thermiques des deux thermostats étant identiques.

24. On note τ_{therm} , le temps caractéristique de thermalisation des thermostats, et τ_{ech} , le temps caractéristique des échanges de chaleur dans le barreau. Définir le cadre d'étude dans lequel on pourrait supposer que les températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sont homogènes dans les réservoirs de température.

25. Déterminer un système de deux équations différentielles vérifiées par $T_1(t)$ et $T_2(t)$. On fera apparaître une durée τ , caractéristique de l'évolution de $T_1(t)$ et $T_2(t)$, et dépendant de R_{th} et C_{th} .

26. Déterminer les expressions de $T_1(t)$ et $T_2(t)$. On pourra introduire les fonctions auxiliaires $\Delta T(t) = T_1(t) - T_2(t)$ et $\bar{T}(t) = \frac{T_1(t) + T_2(t)}{2}$, et montrer que ces fonctions obéissent à des équations différentielles découplées (indépendantes).

27. Représenter graphiquement l'évolution de $T_1(t)$ et $T_2(t)$ en fonction du temps et analyser le résultat obtenu.

28. Donner l'expression du temps caractéristique τ_{th} (assimilé à τ_{ech}) de la diffusion thermique le long du barreau métallique en fonction des paramètres géométriques et grandeurs caractéristiques physiques du barreau. Montrer que l'approximation des régimes stationnaires sera vérifiée à condition que l'on puisse négliger la capacité thermique massique c du barreau devant une capacité thermique massique caractéristique, dépendant de C_{th} , R_{th} , ℓ , ρ et λ .

Dans la suite, on supposera la capacité thermique du barreau métallique négligeable et obéissant à la condition établie à la question précédente.

29. Déterminer l'expression de la variation d'entropie d'un thermostat de capacité thermique C_{th} passant d'une température T_i à une température T_f . En déduire la variation d'entropie ΔS du système complet, composé des deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ et du barreau métallique.

30. Tracer la variation d'entropie ΔS en fonction de la variable sans dimension $\eta = \frac{T_{01}}{T_{02}}$, et commenter cette évolution. On identifiera les lieux et les sources donnant naissance à une irréversibilité.

On considère dans la suite un élément infinitésimal de longueur dx du barreau métallique, situé à l'abscisse x .

31. Déterminer l'expression de la quantité élémentaire d'entropie d'échange, notée δS_e , pour cet élément infinitésimal entre les instants t et $t + dt$. On prendra en compte pour le résultat final le caractère négligeable de la capacité thermique massique du barreau, c'est-à-dire que son coefficient de diffusion thermique est suffisamment grand. On montrera en particulier que le résultat se met sous la forme

$$\delta S_e = f(T) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx dt, \quad (5)$$

avec $f(T)$ une fonction de la température à déterminer.

32. En déduire que le bilan local d'entropie volumique créée, notée s_v , peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial s_v}{\partial t} = - \frac{f(T)}{\pi a^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2. \quad (6)$$

Commenter l'évolution temporelle de s_v et comparer aux précédentes analyses de la création d'entropie.

On se place maintenant en régime harmonique, à la pulsation ω . Les températures des contacts entre les solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ et le barreau métallique sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} T_1(t) &= T_{01} \cos(\omega t) + T_{02} \\ T_2(t) &= T_{02}. \end{aligned} \quad (7)$$

On observe alors le comportement du champ de température $T(x, t)$ en différents points du barreau métallique et en fonction du temps. Les représentations graphiques de l'évolution du champ de température et du flux thermique dans le barreau métallique en fonction du temps sont présentées sur la figure 4.

33. Analyser les différentes courbes de la figure 4 et expliquer le phénomène. Proposer, sur la base d'arguments dimensionnels, une expression de la longueur caractéristique du phénomène d'atténuation

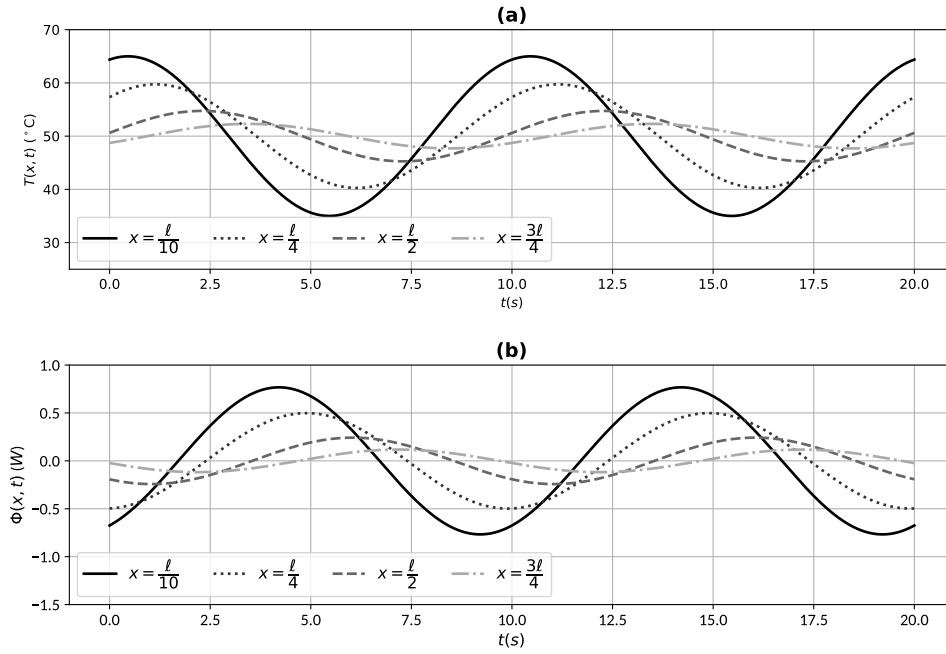


FIGURE 4 – (a) : Température dans un conducteur de platine en fonction du temps, pour différentes valeurs de x . (b) : Flux thermique dans le même conducteur en fonction du temps, pour les mêmes valeurs de x . La fréquence vaut $f = 0,1 \text{ Hz}$, les températures T_{01} et T_{02} valent $T_{01} = 20^{\circ}\text{C}$ et $T_{02} = 50^{\circ}\text{C}$.

observé. Évaluer numériquement une longueur caractéristique d'atténuation à partir des courbes de la figure 4, et montrer qu'elle est compatible avec l'expression proposée précédemment.

34. Établir enfin une condition sur la pulsation ω pour que la norme du vecteur densité de courant de chaleur puisse être considérée comme uniforme sur une section du barreau métallique.

I.D Effets thermoélectriques

Les effets thermoélectriques regroupent différents phénomènes mis en avant à la fin du XVIII^{ième} et au début du XIX^{ième} siècle, qui mettent en évidence le couplage des phénomènes de transport de charge et de chaleur. On distingue les différents types de couplages mentionnés ci-dessous :

- ★ L'effet Peltier consiste en un déplacement de chaleur provoqué par un courant électrique ;
- ★ L'effet Thomson, à l'inverse, désigne l'apparition d'un courant électrique provoqué par un courant de chaleur ;
- ★ L'effet Seebeck désigne l'apparition d'une différence de potentiel provoquée en circuit ouvert par une différence de température.

En présence d'effets thermoélectriques, les vecteurs densité de courant de chaleur $\vec{j}_Q$ et de charge $\vec{j}$

s'écrivent

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T - T\alpha\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (8)$$

$$\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V - \alpha\gamma \overrightarrow{\text{grad}} T. \quad (9)$$

où λ est la conductivité thermique intervenant dans la loi de FOURIER, γ la conductivité électrique statique intervenant dans la loi d'OHM locale, α le pouvoir thermoélectrique, et V le potentiel électrique.

35. En présence d'effets thermoélectriques, on définit la conductivité thermique $\kappa(T)$ par l'expression du vecteur densité de courant de chaleur $\vec{j}_Q = -\kappa(T) \overrightarrow{\text{grad}} T$, en l'absence de mouvement macroscopique de charges. En déduire l'expression de $\kappa(T)$.

36. Montrer qu'en circuit ouvert, la différence de potentiel aux bornes du conducteur se met sous la forme

$$V(0) - V(\ell) = -\beta (T(0) - T(\ell)), \quad (10)$$

avec β un coefficient à exprimer en fonction d'un ou plusieurs des coefficients précédemment définis.

37. Montrer, dans le cas général, que la densité volumique de courant d'entropie $\vec{j}_s = \frac{1}{T} \vec{j}_Q$ se met sous la forme

$$\vec{j}_s = \alpha \vec{j} - \frac{\kappa}{T} \overrightarrow{\text{grad}} T. \quad (11)$$

En déduire alors une interprétation du coefficient α faisant intervenir l'entropie.

38. L'expression générale du taux de création d'entropie $\frac{\partial s_c}{\partial t}$ est la suivante :

$$\frac{\partial s_c}{\partial t} = \vec{j}_s \cdot \left(-\frac{\overrightarrow{\text{grad}} T}{T} \right) + \vec{j} \cdot \left(-\frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T} \right). \quad (12)$$

Montrer que cette grandeur peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial s_c}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} T}{T} \right)^2 + \frac{\vec{j}^2}{T\gamma}. \quad (13)$$

Commenter cette expression et conclure quant à la réversibilité des effets thermoélectriques, décrivant le couplage entre le transport de charge et le transport de chaleur.

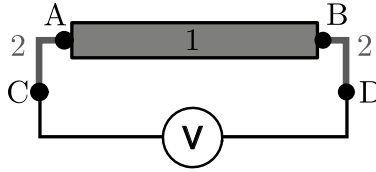


FIGURE 5 – Jonction thermoélectrique entre deux matériaux 1 et 2.

Pour déterminer le coefficient α , on utilise un montage dont le principe est décrit sur la figure 5. Une *jonction thermoélectrique* est constituée de deux matériaux 1 et 2, chacun étant caractérisé par sa conductivité électrique γ_i , sa conductivité thermique κ_i , et son coefficient α_i , $i = 1,2$. Avec les notations de la figure 5, on définit le coefficient SEEBECK de la jonction par l'expression suivante :

$$S_{12} = \frac{V_C - V_D}{T_A - T_B}. \quad (14)$$

En pratique, on branche un voltmètre aux bornes de la jonction entre les deux matériaux (dénotées C et D sur la figure 5). On prendra $T_D = T_C$.

39. Justifier que le courant électrique parcourant le circuit peut être considéré comme nul dans la configuration de la figure 5.

40. Exprimer le coefficient S_{12} en fonction des coefficients α_i du pouvoir thermoélectrique de chacun des deux matériaux.

41. En déduire une méthode pratique permettant de déterminer le coefficient α_0 d'un matériau inconnu.

II Mesures de températures

Dans cette partie, on s'intéresse à la réalisation de mesures de températures en exploitant les phénomènes décrits précédemment et en étudiant des dispositifs, dont une grandeur physique, dite *grandeur thermométrique*, dépend de la température.

II.A Mesure de température avec un conducteur ohmique

Une thermorésistance est un capteur thermique exploitant la dépendance de la résistance d'un composant vis-à-vis de la température. Ici, on se propose d'étudier le fonctionnement d'une sonde de température de ce type utilisant un fil métallique, qui sera le plus souvent du platine, du cuivre ou du nickel. Ces thermomètres tendent à remplacer les thermocouples pour les mesures à basses températures, notamment dans le domaine médical. La thermorésistance étudiée est assimilée à un conducteur métallique en platine, de géométrie cylindrique de longueur ℓ et de section S .

La résistivité d'un métal, notée ρ , dépend de la température en $^{\circ}\text{C}$, notée θ dans la suite de l'étude. Pour toute la suite du sujet, la notation ρ fera référence à la résistivité. La dépendance précise en température de la grandeur thermométrique, ici $\rho(\theta)$, dépend du matériau considéré. Dans le cas du platine, on a l'expression mathématique suivante, valable entre 0°C et 850°C :

$$\rho(\theta) = \rho_0 [1 + A\theta + B\theta^2] , \quad (15)$$

avec θ la température en $^{\circ}\text{C}$, $A = 3,9 \times 10^{-3} ^{\circ}\text{C}^{-1}$ et $B = -5,8 \times 10^{-7} ^{\circ}\text{C}^{-2}$.

42. Proposer une interprétation simple du paramètre ρ_0 au regard du modèle mathématique eq. (15). Discuter, sur la base d'arguments numériques, l'approximation consistant à considérer la résistivité comme une fonction affine de θ sur la plage de température considérée.

On se placera dans le cadre de cette approximation pour le reste de l'étude de la thermorésistance.

43. Déterminer la condition sur A permettant de garantir que la thermorésistance a une sensibilité maximale. Proposer un argument qualitatif permettant d'expliquer l'augmentation de ρ avec θ .

Pour mesurer précisément la valeur de la résistance de la thermorésistance, et en déduire la résistivité connaissant les paramètres géométriques de celle-ci, on utilise le montage électronique représenté sur la figure 6. Ce montage, appelé pont de WHEATSTONE, permet de déduire la valeur d'une résistance a priori inconnue à partir de la valeur des autres composants et d'une mesure de la tension U . La mesure de la tension U s'effectue avec un voltmètre, dont l'impédance d'entrée est très élevée.

La résistance de la thermorésistance est notée $R = R_0 + R'$, avec $R_0 = R(\theta = 0)$. La tension d'alimentation E est choisie égale à 10 V .

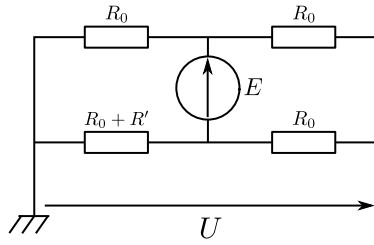


FIGURE 6 – Montage permettant de déterminer la valeur de R' en mesurant la tension U . La valeur de la tension E est fixée par l'utilisateur. On prendra $E = 10\text{ V}$. Les valeurs des résistances usuelles sont prises à R_0 .

44. Exprimer la résistance R_0 en fonction de ρ_0 et la variation de thermorésistance R' en fonction de θ et R_0 .

45. Établir l'expression de la tension U en fonction de R' , R_0 et E , puis en déduire l'expression de U en fonction de θ notamment.

46. La sensibilité du système de mesure est définie par $\sigma_\theta = \frac{dU}{d\theta}$. Déduire des expressions de U et σ_θ deux inconvénients de ce montage pour réaliser une mesure de température.

Afin d'améliorer le dispositif précédent de mesure de température, on adapte le montage électronique représenté sur la figure 6, et on étudie celui proposé sur la figure 7. Ce dispositif de mesure adapte le pont de WHEATSTONE de la figure 6, en introduisant deux ALI (Amplificateur Linéaire Intégré), supposés idéaux et en fonctionnement linéaire. La grandeur physique mesurée est maintenant le potentiel V_s .

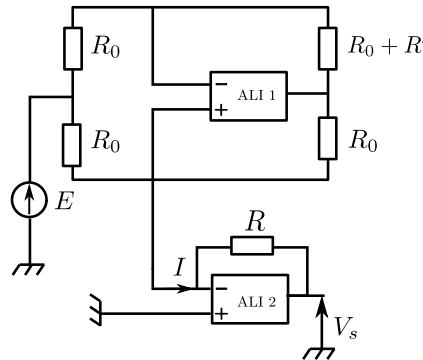
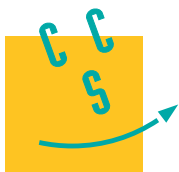


FIGURE 7 – Montage de mesure de température. Les ALI sont supposés idéaux, et fonctionnent en régime linéaire.

47. En reliant V_s et I par une expression mathématique, déterminer la fonction réalisée par l'ALI 2.

48. Établir la relation entre V_s et R' et en déduire une expression de V_s en fonction de la température θ .

49. Déterminer la sensibilité de ce nouveau montage, définie par $\tilde{\sigma}_\theta = \frac{dV_s}{d\theta}$, où la grandeur thermométrique est maintenant V_s . Commenter l'expression de la sensibilité obtenue, et proposer des préconisations concernant le choix des valeurs R et E . On prendra $R = R_0$. Évaluer alors numériquement $\tilde{\sigma}_\theta$.

*Autour d'une centrale nucléaire*

Une centrale nucléaire utilise l'énergie dégagée par la fission nucléaire des atomes d'uranium placés au cœur du réacteur. La chaleur générée par la fission est transférée à un fluide caloporteur, généralement de l'eau qui circule dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire est portée à très haute température par l'effet des réactions de fission nucléaire qui ont lieu au sein du cœur du réacteur. Elle passe ensuite dans un pressuriseur qui maintient sa pression constante et égale à $p = 155$ bar, puis effectue un échange thermique avec le circuit secondaire dans un générateur de vapeur : l'énergie thermique dégagée par l'eau du premier circuit vaporise alors l'eau du second, qui fait ensuite tourner plusieurs turbines génératrices d'énergie mécanique, elle-même enfin transformée en énergie électrique par un alternateur.

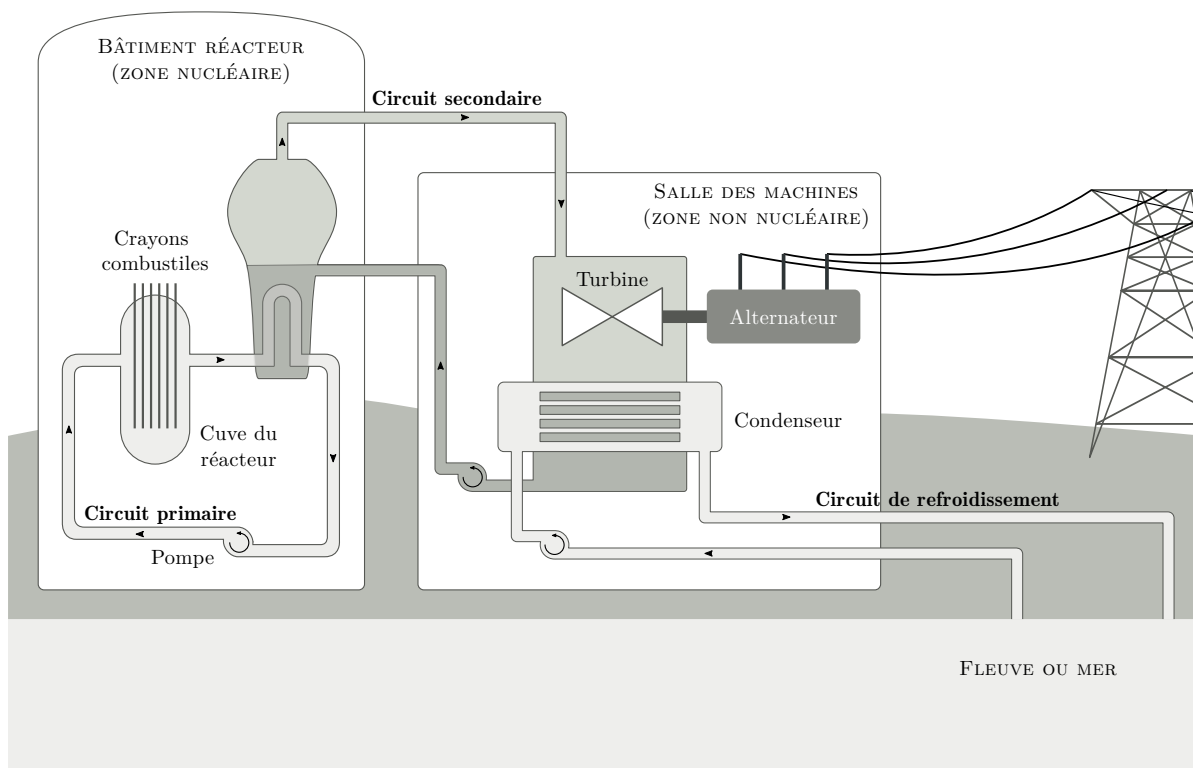


Figure 1 Principe d'un réacteur nucléaire. Librement adapté d'une illustration EDF.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Un formulaire et certaines données numériques sont disponibles en fin d'énoncé.

I Étude du circuit primaire

Le cœur est constitué de $N = 41448$ crayons combustibles. Chaque crayon combustible est constitué d'un cylindre de hauteur $H = 3,66$ m et de diamètre $d = 2R_4 = 9,5$ mm. Ces crayons sont le siège de réactions de fission, exothermiques.

La puissance thermique développée dans le cœur vaut : $P_1 = 2776$ MW.

Le circuit primaire doit être correctement dimensionné pour prévenir tout échauffement anormal du combustible, $\text{UO}_{2(s)}$, dont la température de fusion vaut 2800°C . La conductivité thermique de $\text{UO}_{2(s)}$ vaut $\lambda_2 = 3,5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

La pression de vapeur saturante de l'eau à 345°C vaut 155 bar.

Dans cette partie, on se place en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergie mécanique.

I.A – Évolution de la température entre le cœur du combustible et le fluide caloporteur

On étudie l'évolution de la température entre le centre du combustible $\text{UO}_{2(s)}$ et l'eau du circuit primaire, qui circule dans l'espace annulaire de rayon allant de R_4 à R_5 et entourant les crayons. On suppose que la température du fluide caloporteur est une constante et vaut $T_5 = 303^\circ\text{C}$.

On note T_2 et T_3 les températures de part et d'autre de l'interface entre le combustible et la gaine. On note T_4 et T_5 les températures de part et d'autre de l'interface entre la gaine et le fluide caloporteur.

Pour simplifier, on néglige les effets de bord à chaque extrémité des cylindres ; on considère pour l'étude que les N crayons combustibles de hauteur H sont disposés les uns au-dessus des autres et que les échanges thermiques se font exclusivement selon une direction radiale.

Les échanges thermiques au niveau d'une interface sont modélisés selon la relation de Newton : la puissance thermique traversant une surface dS de cette interface s'écrit $h dS (T_s - T_a)$ où h désigne le coefficient de transfert conducto-convectif et T_s et T_a désignent les températures de part et d'autre de l'interface.

Le coefficient de transfert conducto-convectif entre le combustible et la gaine vaut $h_2 = 10 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. Le coefficient de transfert conducto-convectif entre la gaine et le fluide caloporteur vaut $h_4 = 25 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

Chaque crayon est entouré d'une gaine d'épaisseur $e = R_4 - R_3 = 0,60 \text{ mm}$ dont la conductivité thermique vaut $\lambda_3 = 16 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

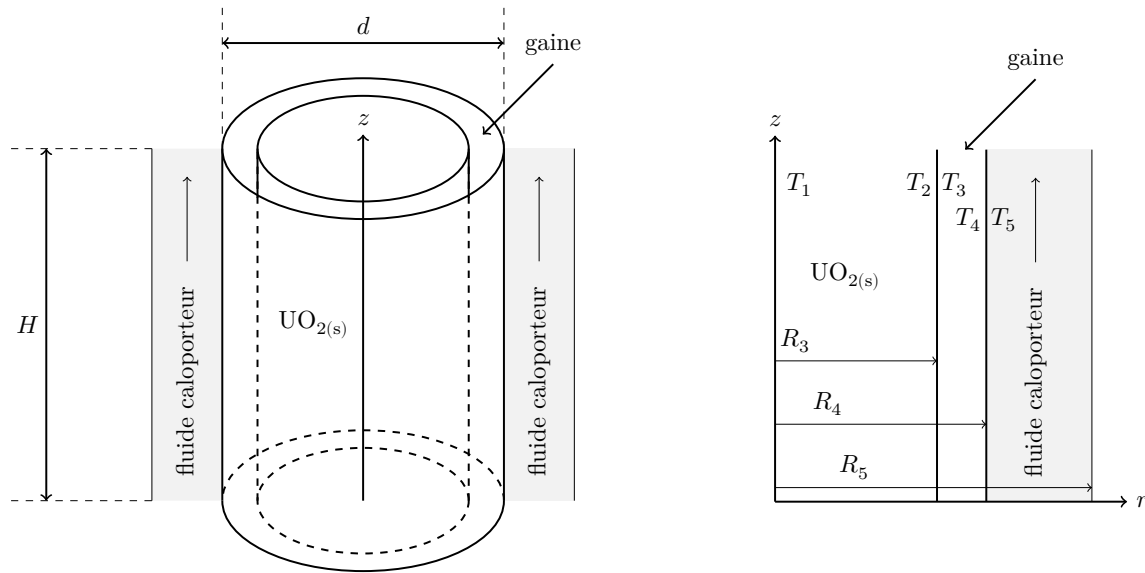


Figure 2

Q 1. Exprimer la surface latérale totale, notée S_{tot} , de l'ensemble des N crayons combustibles entourés de la gaine en fonction de N , d et H .

On note P_V la puissance thermique par unité de volume engendrée par les réactions de fission au cœur des crayons combustibles et que l'on suppose uniforme. On appelle r la distance à l'axe du cylindre modélisant l'ensemble des N crayons.

Q 2. Montrer que l'équation de la diffusion thermique vérifiée par la température dans le combustible s'écrit :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0.$$

Exprimer A en fonction de P_V et λ_2 .

- Q 3.** Exprimer la température $T(r)$ dans $\text{UO}_{2(s)}$ en fonction de P_V , T_2 , R_3 , λ_2 et r .
- Q 4.** Exprimer la température T_3 en fonction de T_2 , P_1 , h_2 , d , e , H et N .
- Q 5.** Exprimer la température $T(r)$ en un point de la gaine en fonction de T_4 , P_1 , R_4 , λ_3 , S_{tot} et r .
- Q 6.** Calculer les températures T_4 , T_3 , T_2 et T_1 .
- Q 7.** Représenter le profil température $T(r)$ pour $0 \leq r \leq R_5$.
- Q 8.** Expliquer pourquoi le bon fonctionnement du pressuriseur du circuit primaire fait partie des critères majeurs de sûreté. Proposer une solution pour pouvoir évacuer une puissance plus importante.

I.B – Prise en compte de dépendances longitudinales pour la puissance thermique volumique et la température

Dans cette partie, on néglige l'influence de la gaine mais on tient compte du profil non uniforme, selon la coordonnée z , de la puissance thermique générée par les réactions de fission, ainsi que de la dépendance avec z du champ de température.

Chaque crayon combustible de rayon R_4 et de hauteur H est refroidi par une circulation d'eau liquide dans un espace annulaire de rayon extérieur R_5 entourant le crayon. On ne considère dans cette sous-partie qu'un seul crayon.

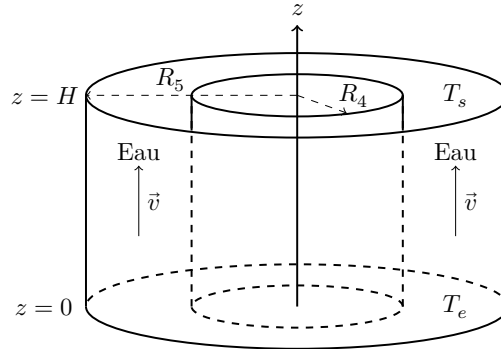


Figure 3

La puissance thermique $P_V(z)$ par unité de volume engendrée par les réactions de fission au sein de la barre du combustible est modélisée par : $P_V(z) = P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$. On suppose que les échanges thermiques se font toujours exclusivement dans la direction radiale de la barre de combustible. On appelle r la distance à l'axe du cylindre.

L'eau liquide circule à la vitesse $v = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ avec un débit massique $D_m = 0,30 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$; la température d'entrée (en $z = 0$) de l'eau liquide est $T_e = 284^\circ\text{C}$ et sa température de sortie (en $z = H$) est $T_s = 322^\circ\text{C}$. La capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée constante sur cette plage de température, est prise égale à $c_5 = 5750 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$. On admet qu'il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur pour $r = R_5$.

Dans la suite, on suppose que la température de l'eau liquide ne dépend que de z et on la note $T(z)$; la température dans la barre de combustible dépend de r et z et est notée $T_c(r, z)$.

- Q 9.** En réalisant un bilan thermodynamique pendant dt pour l'eau liquide entre les cotes z et $z + dz$ (avec $dz \ll z$), en écoulement stationnaire dans l'espace annulaire, justifier que :

$$D_m c_5 [T(z + dz) - T(z)] = P_V(z) \pi R_4^2 dz.$$

- Q 10.** Exprimer $T_s - T_e$ en fonction de R_4 , H , D_m , c_5 et P_0 . Exprimer la température $T(z)$ de l'eau liquide en fonction de T_e , T_s , z et H .

On note h_{cc} le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de combustible et l'eau liquide dans ce modèle, et $T_p(z)$ la température de la paroi de la barre de combustible à l'altitude z .

- Q 11.** Montrer que :

$$\frac{T_p(z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right].$$

Exprimer B et C en fonction de h_{cc} , H , D_m , c_5 et R_4 .

Q 12. Déterminer la température $T_c(r, z)$ dans la barre de combustible. Montrer que :

$$\frac{T_c(r, z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + D \cos \left(\frac{\pi z}{H} \right) \right] + \left[E + F \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \right] \sin \left(\frac{\pi z}{H} \right).$$

Exprimer D , E et F en fonction de D_m , c_5 , H , h_{cc} , λ_2 et R_4 .

Q 13. Exprimer la température $T_c(r = 0, z)$ sur l'axe de la barre de combustible à l'altitude z en fonction de T_e , T_s , D_m , z , H , c_5 , h_{cc} , λ_2 et R_4 .

Q 14. En déduire l'altitude pour laquelle la température sur l'axe de la barre de combustible est maximale. Calculer la valeur de la température maximale sur l'axe ; on prendra $h_{cc} = 33 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Préciser si un critère de sureté en température est respecté.

Le graphe de la figure 4 représente l'évolution de la température de la paroi du crayon combustible avec la cote z .

Q 15. Justifier qualitativement son allure.

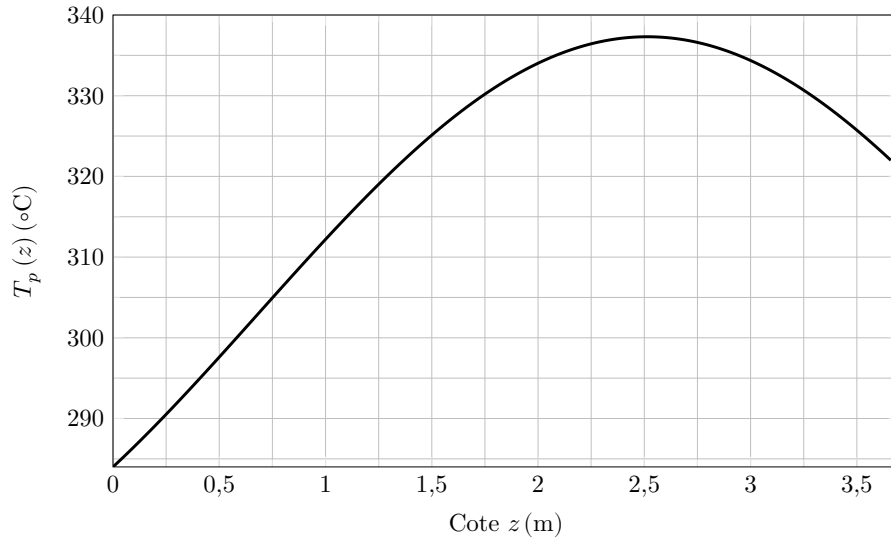


Figure 4 Évolution spatiale de la température T_p de la paroi du crayon combustible.

II Étude du circuit secondaire

II.A – Préliminaire

On considère un fluide en écoulement stationnaire, sans variation notable de son énergie mécanique, dans une machine. Il y entre dans l'état E (pression p_e , température T_e , enthalpie massique h_e) et en sort dans l'état S (pression p_s , température T_s , enthalpie massique h_s). On note w_u le travail utile massique et q le transfert thermique massique reçu algébriquement par le fluide lors de la traversée de la machine.

Q 16. Établir soigneusement la relation vérifiée dans ce cas par $h_s - h_e$, w_u et q .

II.B – Cycle de Hirn

On considère le circuit secondaire, décrit par la figure 5 :

- la pompe d'alimentation porte l'eau liquide juste saturée (état 0) de la basse pression $p_3 = 0,040 \text{ bar}$ du condenseur à la pression $p_2 = 85,8 \text{ bar}$ du générateur de vapeur (GV) de façon isentropique (état 1) ;
- l'eau liquide entre ensuite dans le générateur de vapeur, où elle est chauffée de façon isobare jusqu'à la température T_2 du changement d'état (état 1' – liquide juste saturant), puis est totalement vaporisée jusqu'à l'état 2 (vapeur saturante sèche). Le surchauffeur (2 – 2') fonctionne de façon isobare ;
- la vapeur sèche produite (état 2') subit ensuite une détente isentropique dans une turbine calorifugée amenant le système dans l'état 3, à la température T_0 ;
- le mélange diphasé (état 3) pénètre ensuite dans le condenseur pour y être totalement condensé (état 0).

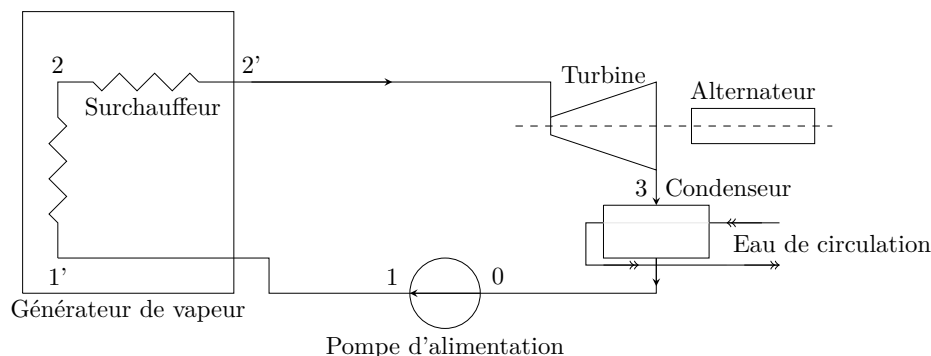


Figure 5 Cycle de Hirn.

On se place en régime stationnaire. On suppose l'eau liquide incompressible et on néglige le travail consommé par la pompe devant les autres termes énergétiques de l'installation.

Dans la suite, les grandeurs thermodynamiques indicées par i sont relatives à l'état i .

On donne $T_0 \simeq T_1 = 29^\circ\text{C}$, $T_2 = 300^\circ\text{C}$ et $T_3 = 500^\circ\text{C}$, ainsi qu'un extrait de tables thermodynamiques pour l'eau sur le tableau 1. Les données suivantes sont également fournies :

- chaleur latente massique de vaporisation de l'eau à T_2 : $L_v(T_2) = 1404 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$;
- enthalpie et entropie massiques respectives de la vapeur d'eau sèche à 500°C et $85,8 \text{ bar}$: $h = 3391 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $s = 6,68 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Pression de vapeur saturante (bar)	Température ($^\circ\text{C}$)	Liquide juste saturé		Vapeur saturante sèche	
		s	h	s	h
85,8	300	3,25	1345	5,70	
0,040	29	0,42	121	8,47	2554

Tableau 1 Quelques données thermodynamiques pour l'eau. L'enthalpie massique h est exprimée en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ et l'entropie massique en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Q 17. Expliquer pourquoi $T_0 \simeq T_1$ et $h_0 \simeq h_1$. Préciser l'allure d'une transformation isentropique dans le domaine liquide du diagramme des frigoristes (p, h).

Q 18. Donner le nom des différentes courbes du diagramme des frigoristes (p, h) du document réponse 1 et y représenter précisément le cycle décrit par le fluide.

Q 19. Calculer, à partir de données du tableau 1 pour plus de précision, le titre massique en vapeur ainsi que l'enthalpie massique de la vapeur à la sortie de la turbine. Positionner le point représentatif de cet état sur le diagramme des frigoristes du document réponse 1.

Q 20. Définir et calculer l'efficacité η de ce cycle.

Q 21. Établir l'expression de l'efficacité de Carnot η_C d'une machine cyclique ditherme fonctionnant en moteur entre une source chaude à la température T_C et une source froide à la température T_F . La calculer en prenant respectivement pour T_F et T_C les températures minimale et maximale du fluide dans le circuit secondaire. Commenter en justifiant l'écart éventuel avec la valeur de l'efficacité obtenue à la question précédente.

II.C – Cycle à double surchauffe

Les gouttes d'eau liquide peuvent endommager la turbine. Aussi, est-il avantageux d'utiliser une turbine à deux corps permettant d'obtenir un titre massique en vapeur en sortie de turbine proche de 1 grâce à une double surchauffe. Le cycle de Hirn précédent est modifié :

- de l'eau (état 1) est admise dans le générateur de vapeur (GV) d'où elle sort à l'état de vapeur saturante sèche (état 2) ;
- elle passe ensuite dans le premier surchauffeur isobare (2 – 2'), pour être détendue dans la turbine haute pression (HP) (2' – 4) ;
- la vapeur sèche (état 4) est envoyée dans un second surchauffeur isobare (4 – 4') pour être ensuite détendue dans l'étage de turbine basse pression (BP) (4' – 5). Le titre massique en vapeur dans l'état 5 est sensiblement égal à 1 ;

- le fluide dans l'état 5 se condense totalement à la température T_0 dans le condenseur isobare (5 – 0) ;
- le liquide juste saturé (état 0) est ensuite comprimé de façon isentropique à la pression p_2 du générateur de vapeur (état 1).

Les détenteurs dans les turbines, calorifugées, sont supposées isentropiques. On se place encore une fois en régime stationnaire et on a toujours $T_0 \simeq T_1 = 29^\circ\text{C}$, $T_2 = 300^\circ\text{C}$ et $T_{2'} = 500^\circ\text{C}$. De plus, $T_4 = 300^\circ\text{C}$ et $T_{4'} = 500^\circ\text{C}$.

Q 22. Représenter précisément le cycle décrit par le fluide dans le diagramme des frigorigènes du document réponse 1. Définir et calculer l'efficacité de de cycle.

Formulaire et données

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z.$$

Variation d'entropie d'une phase condensée incompressible de capacité thermique C entre un état 1 et un état 2 :

$$\Delta S = C \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Coordonnées du point critique de l'eau : $T_C = 374\text{ °C}$, $p_C = 221\text{ bar}$.

Formule trigonométrique : $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [-\cos(a+b) + \cos(a-b)].$

Autres données numériques :

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>	<i>Unité</i>
Masse molaire de l'acide borique	M_{HBO_3}	61,84	$\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire du D-mannitol	M_{D}	182,17	$\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	R	8,314	$\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Concentration standard	c°	1	$\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

• • • FIN • • •



Numéro de place

Numéro d'inscription

Signature



Nom

Prénom

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve : Physique-Chimie 1 PSI

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Document réponse

DOCUMENT RÉPONSE 1

DOCUMENT RÉPONSE 1

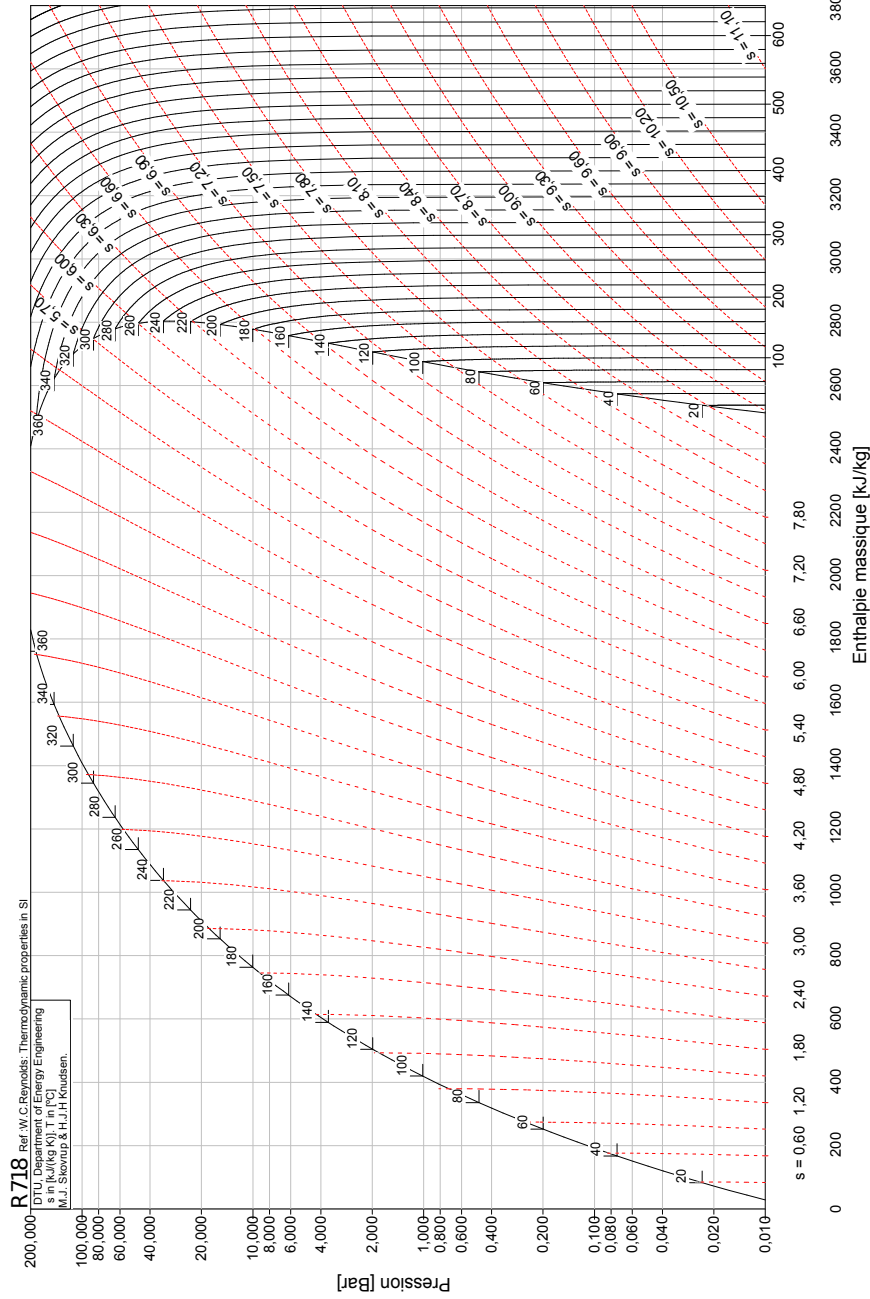


Diagramme des frigorigères.
La pression est exprimée en bar, l'entropie massique en $\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, l'enthalpie massique en kJ.kg^{-1} et la température en $^{\circ}\text{C}$.