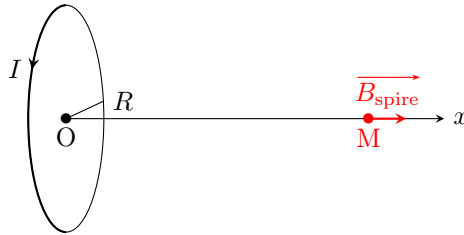


## L'effet dynamo, origine du champ magnétique ?

### I Une mesure du champ géomagnétique

#### I.A –

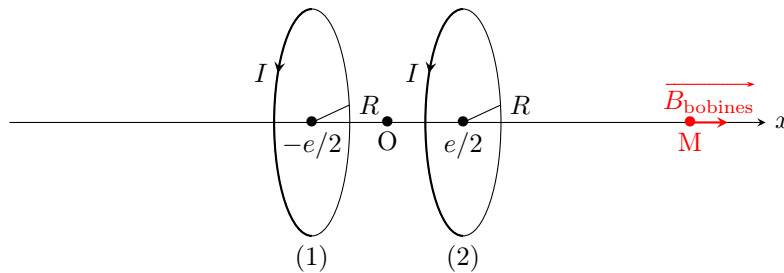


- M est sur l'axe. Tout plan contenant OM est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Ce sont donc des plans de symétrie pour le champ  $\vec{B}_{\text{spire}}$ . En M appartenant à tous ces plans, le champ est donc contenu dans tous ces plans. Donc en M de l'axe Ox  $\vec{B}_{\text{spire}}$  est donc selon  $\vec{u}_x$ .
- D'après la règle du tire bouchon (« dit de Maxwell », règle de la main droite, bonhomme d'Ampère, d'après l'équation de Maxwell Ampère...), le champ  $\vec{B}$  est orienté positivement par l'orientation d'un courant positif. D'après le texte,  $I$  est orienté positivement selon  $\vec{u}_x$ , donc  $\vec{B}$  est aussi dans le sens de  $\vec{u}_x$  en M. Ainsi en M, comme  $B(x) > 0$  lorsque  $I > 0$  :

$$\vec{B}_{\text{spire}}(M) = B_{\text{spire}}(x)\vec{u}_x$$

Les descriptions orientation de spire et orientation de courant prêtent à confusion

#### I.B –



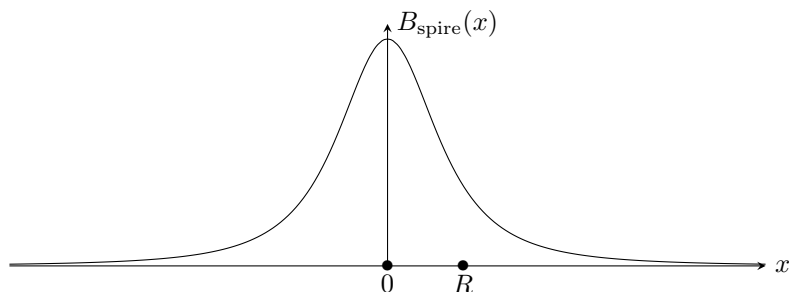
Par linéarité (superposition, additivité...) et changement de variable, le champ créé par la bobine 1 est sur l'axe en  $x$  de la forme ( $N$  spires dans le même plan centré en  $-e/2$ )  $\vec{B}_1 = NB_{\text{spire}}(x + e/2)\vec{u}_x$ . De même  $\vec{B}_2 = NB_{\text{spire}}(x - e/2)\vec{u}_x$ . Le champ total s'écrit alors

$$\vec{B}_{\text{bobines}}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2R} \left[ \left( 1 + \left( \frac{x - e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left( 1 + \left( \frac{x + e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \vec{u}_x$$

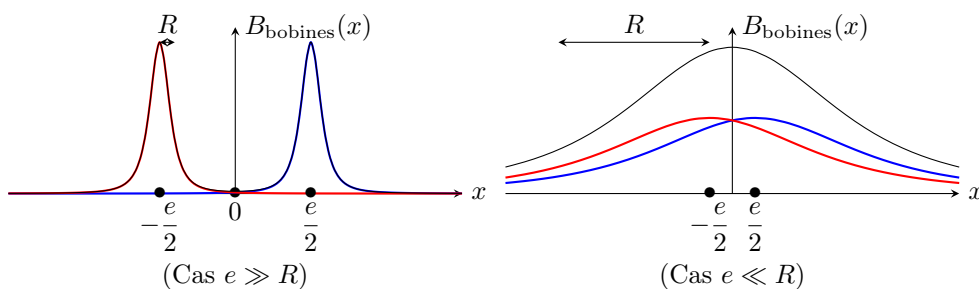
1. <mailto:antonin.marchand@normalesup.org>

## I.C –

**I.C.1)** Pour une spire, la fonction est symétrique, centrée en zéro, maximale en  $x = 0$  et tend vers zéro en  $x = \pm\infty$  et la largeur de la courbe est de l'ordre de  $R$  :



On distingue ainsi deux cas, suivant si les fonctions peuvent se superposer ou pas, ce qui correspond aux cas  $e \ll e_0$  (cas d'une superposition complète, c'est comme si on avait une seule bobine en  $x = 0$ ) ou  $e \gg e_0$  (pas de superposition – séparation totale des deux champs). On note que forcément alors  $e_0 \sim R$ , c'est la seule échelle de longueur caractéristique du problème.

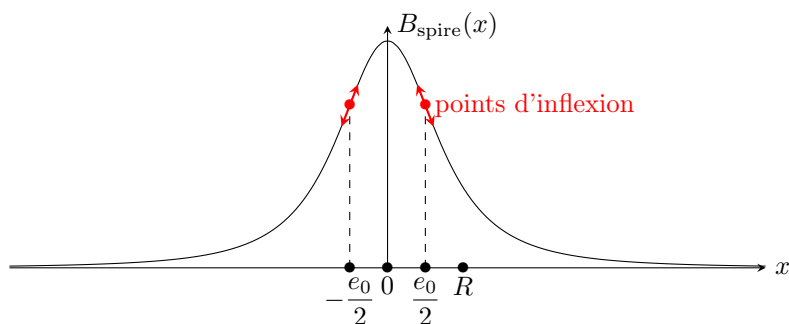


L'intérêt **pratique** du cas  $e \sim e_0$  est d'avoir un cas intermédiaire *utile* : les deux champs **se superposent** (ce qui n'est pas le cas si  $e \gg R$ ), et il y a de la **place** entre les deux bobines (ce qui ne serait pas le cas si  $e \ll R$ ) pour pouvoir y mettre des systèmes sensibles au champ magnétique.

On démontre à la question suivante que le champ est relativement **uniforme** entre les deux bobines pour  $e \sim e_0$ , mais cela ne me semble pas être un intérêt *pratique*. En pratique si on veut avoir un champ vraiment uniforme, on prend un solénoïde. Mais cela coûte plus cher, et est en général plus petit, donc moins facile d'accès...

La question est mal posée : soit on demande l'intérêt **pratique** du cas  $e \sim e_0$ , soit on demande l'intérêt (non pratique, plutôt théorique, dans ce cas c'est l'uniformité) du cas  $e = e_0$ , alors que  $e_0$  n'est pas défini exactement à ce stade du sujet...

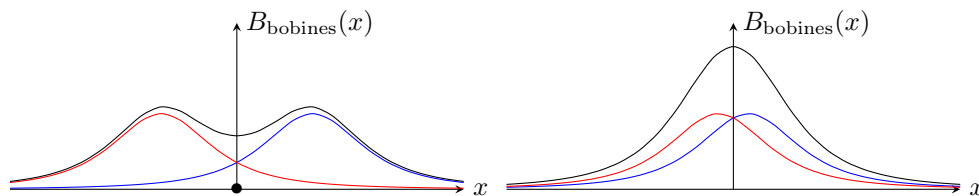
**I.C.2)** Pour une courbe  $B_{spire}(x)$ , il existe deux points d'inflexion répartis symétriquement autour de  $x = 0$ ,



Le calcul mène aux positions  $x = \pm \frac{R}{2}$  des points d'inflexion, mais ce n'était pas demandé.

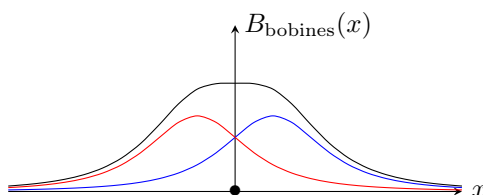
- La courbe  $B_{bobines}$  est paire  $\forall e$ , donc toutes ses dérivées impaires en  $x = 0$  sont nulles (les dérivées de chaque composante  $B_{spire}(x \pm \frac{e}{2})$  sont opposées en  $x = 0$  et s'annulent)

- Pour justifier l'existence d'un point d'inflexion sans le calculer, il y a au moins deux méthodes
  - Pour une certaine valeur  $e = e_0$ , les points d'inflexion des composantes  $B_{\text{spire}}$ , symétriques par rapport à  $x = 0$ , dans  $B_{\text{bobines}}$ , se superposent en  $x = 0$  et donc la dérivée seconde de la somme s'annule aussi. Par identification, les positions des points d'inflexion pour  $B_{\text{spire}}$  sont alors en  $x = \pm \frac{e_0}{2}$ .
  - Entre les deux cas limites de l'existence d'un minimum en  $x = 0$  pour  $B_{\text{bobines}}(x)$  (cas  $e > e_0$  alors  $B''_{\text{bobines}}(0) > 0$ ) et d'un maximum ( $e < e_0$ ,  $B''_{\text{bobines}}(0) < 0$ ), on a forcément un cas, pour un certain  $e$  que l'on identifie à  $e_0$ , de dérivée seconde nulle en  $x = 0$ .



Cas  $e > e_0$  minimum en  $x = 0$

Cas  $e < e_0$  maximum en  $x = 0$



Cas  $e = e_0 (= R)$  inflexion en  $x = 0$

- Ainsi le développement de Taylor de la courbe en  $x = 0$  est nécessairement, en notant  $B_0 = B_{\text{bobines}}(0)$ , et comme les ordres 1 à 3 sont nuls :

$$B_{\text{bobines}}(x) = B_0 + \mathcal{O}(x^4)$$

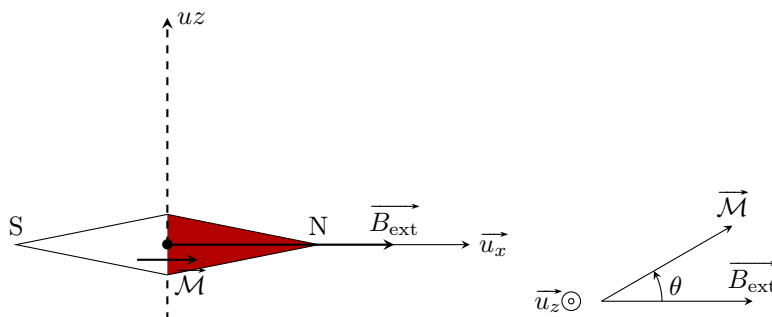
c'est-à-dire que la courbe est constante à l'ordre 3.

## I.D –

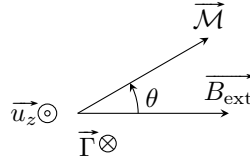
Erreur d'énoncé sans conséquences :  $e_0 = R$ .

On peut aussi répondre à cette question en connaissant  $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$ , dont la connaissance est hors-programme, mais ce n'est pas aller dans le sens du sujet. On peut aussi réaliser l'étude mécanique complète, mais ce n'est pas non plus aller dans le sens du sujet, car c'est l'objet de la question suivante.

- Le champ des bobines  $\vec{B}_{\text{ext}}$  est selon l'horizontale  $\vec{u}_x$  et l'axe de rotation de l'aiguille est selon la verticale que l'on note  $\vec{u}_z$ . Le moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  de l'aiguille est orienté du pôle sud vers le pôle nord de cet aimant.



- Qualitativement, un tel moment magnétique s'oriente dans l'axe du champ extérieur magnétique auquel il est soumis. Vu les contraintes de mouvement de l'aiguille, sa position d'équilibre finale est donc l'aiguille orientée vers le nord, ce qui est tout à fait logique pour une boussole. . .
- En effet, cette position est une position d'équilibre : le couple du champ  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$  est nul si  $\vec{\mathcal{M}}$  et  $\vec{B}_{\text{ext}}$  sont alignés.
- De plus cet équilibre est stable car si l'on sort l'aiguille de sa position d'équilibre, le couple tend à ramener le système vers la position d'équilibre :



### I.E –

- On applique le théorème scalaire du moment cinétique (TMCS) projeté selon l'axe  $\Delta = (0, \vec{u}_z)$  de rotation de l'aiguille au système composé de l'aiguille de moment d'inertie  $J$ , dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire (les forces d'inertie n'ont pas d'influence utile).
- On note  $\theta$  l'angle du moment orienté selon  $\vec{u}_z$  par rapport à la position d'équilibre.
- Les actions subies par ce système sont celles de l'axe, le poids, et l'action du champ magnétique.
- Le couple de l'axe est nul (sans frottement, l'aiguille peut tourner librement), le moment du poids est nul, car le poids est aligné avec l'axe.
- Il reste le couple exercé par le champ sur le moment, en supposant que le champ est uniforme sur l'aiguille, ce qui est probablement le cas dans la configuration Helmholtz si l'aiguille est plus petite que les bobines (le champ terrestre, lui est homogène. . .) :  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} = -\mathcal{M}B_{\text{ext}} \sin(\theta)\vec{u}_z$  (cf schéma ci dessus).
- Le moment cinétique de l'aiguille projeté selon  $\vec{u}_z$  est par définition de  $J$  et de l'angle  $\theta$  :  $\sigma_{\Delta} = J \frac{d\theta}{dt}$
- Le TMCS s'écrit  $\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z$  soit

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathcal{M}B_{\text{ext}} \sin \theta$$

- Par hypothèse les oscillations sont petites donc  $\theta \ll 1$  donc  $\sin \theta \approx \theta$ . L'équation devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mathcal{M}B_{\text{ext}}}{J} \theta = 0$$

- C'est un oscillateur harmonique, les solutions sont oscillantes de pulsation  $\omega_1$  telle que  $\omega_1^2 = \frac{\mathcal{M}B_{\text{ext}}}{J}$ .
- La période  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  est alors

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B_{\text{ext}}}}$$

### I.F –

- L'inversion du sens du courant change uniquement la valeur du champ magnétique extérieur appliqué à la boussole. Les calculs précédents sont identiques. Dans l'expérience 1, le champ vaut  $B_{\text{ext}} = B_H + B_0$ , dans la deuxième expérience, il vaut  $B'_{\text{ext}} = B_H - B_0$ , où  $B_0 = B_{\text{bobines}}(x=0)$ .
- Ainsi, on a le couple d'équations, en supposant  $B_H > B_0$  :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B_H + B_0)}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B_H - B_0)}}$$

On en déduit donc :

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_H - B_0}{B_H + B_0}} \Rightarrow B_H = B_0 \frac{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$$

- L'intérêt de cette expérience est d'une part d'avoir une mesure du champ  $B_H$  en le comparant à un champ  $B_0$  créé par l'expérimentateur et en ne mesurant que des temps : **le résultat ne dépend pas de  $J$  et  $\mathcal{M}$**  plus difficiles à mesurer. D'autre part, la mesure du temps est assez précise, le contrôle de  $B_0$  aussi dans la configuration dite de Helmholtz  $e = R$  (où il est constant, où il y a de la place pour mesurer, et dont on connaît l'expression). De plus, dans cette expérience, l'alignement initial du dispositif avec le nord est assez facile à réaliser en coupant le courant dans les bobines ou en vérifiant que la position d'équilibre est bien dans l'axe des bobines.

- Ce résultat n'est valide que si  $B_H > B_0$ , ce qui est finalement peu probable expérimentalement, le champ terrestre étant de l'ordre de  $5 \times 10^{-5}$  T en France, alors qu'avec des bobines, on peut atteindre aisément

$10^{-3}$  T. Dans le cas inverse  $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_0 - B_H}{B_H + B_0}}$  donc  $B_H = B_0 \frac{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$ . Pour connaître le cas dans

lequel on est, il suffit d'observer la position d'équilibre stable dans les deux cas. Si elle est la même, cela signifie que  $B_H + B_0$  et  $-B_H + B_0$  sont de même signe et donc qu'on est dans le premier cas étudié, sinon c'est l'inverse.

- Enfin, on peut noter qu'avec cette méthode, on doit déduire  $B_0 = \frac{\mu_0 N I}{R} \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}$  du calcul, et donc de l'évaluation expérimentale de  $N$ ,  $I$  et  $R$  (en supposant que la configuration Helmholtz est bien réalisée expérimentalement...), et non le mesurer. En effet sa mesure seule n'est possible qu'en tournant les bobines perpendiculairement au champ terrestre avec une sonde directionnelle (teslamètre à effet Hall par exemple) sinon on mesure  $B_{\text{ext}} = B_0 + B_H$  en même temps. Si l'on souhaite mesurer le champ sans toucher à la direction des bobines ni en le déduisant du calcul, on doit plutôt mesurer  $B_{\text{ext}}$  et non  $B_H$  (soustraire  $B_H$  à  $B_{\text{ext}}$  pour en déduire  $B_0$  n'est pas envisageable, il est probable que  $B_H$  ne soit pas mesurable tout seul – bobines éteintes – car trop faible par rapport à  $B_0$ ). On remarque qu'on a  $B'_{\text{ext}} = 2B_H - B_{\text{ext}}$  et on trouve alors  $B_H = \frac{B_{\text{ext}}}{2} \left(1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right)$ .

## II Nécessité dun mécanisme d'entretien du champ géomagnétique : l'effet dynamo

### II.A – Limites des explications historiques

#### II.A.1)

- On lit dans l'annexe que la température du noyau solide excède  $6000$  °C et celle du noyau externe  $4000$  °C, températures largement supérieures aux **températures de Curie** des métaux dont est composé le noyau (annexe), c'est-à-dire températures au-delà desquelles les milieux considérés ne sont plus magnétiques (annexe). Donc le noyau de la terre ne peut pas être magnétique.
- De plus, il existe des **inversion de polarité** du champ magnétique terrestre. Or il est **peu probable** que tout le noyau solide se tourne, telle une aiguille, pour inverser avec lui le sens du champ terrestre. De telles inversions complètes et brutales semblent très hypothétiques pour le noyau dans son ensemble, vu son inertie (il faudrait évaluer l'énergie nécessaire pour le faire et donc la puissance sur le temps d'inversion, et la comparer à quelque chose...). Donc le noyau de la terre ne peut pas être magnétique.
- Enfin, si le noyau externe avait localement une aimantation rémanente, l'aimantation globale ne serait probablement pas constante vu les mouvements de convection qui y existent. On ne s'attend pas à ce qu'un matériau liquide ferromagnétique sujet à de la convection donne un champ orienté toujours dans le même sens, mais c'est contestable : par auto-organisation les milieux ferromagnétiques peuvent avoir une direction d'aimantation constante tout en se déplaçant... Quoi qu'il en soit si on avait à chercher

un aimant permanent, il ne pourrait s'agir raisonnablement que du noyau solide qui par les arguments précédents n'est de toute façon probablement pas aimanté.

Il est donc finalement hautement improbable que le champ magnétique terrestre ait pour origine un super aimant permanent au centre de la Terre.

Notes :

- Les preuves expérimentales de la fluidité du noyau, de sa température, des inversions de polarité et l'existence d'une température de Curie ont toutes été établies au début du XX<sup>e</sup> siècle (ce qui aurait pu être indiqué).
- un aimant permanent est d'après l'annexe 1 un matériau magnétique « dur » (à ne pas confondre a priori avec solide, même si la *plupart* sont solides), c'est-à-dire dont le champ rémanent et l'excitation coercitive sont grands. Aucun intérêt pour répondre à la question, et référence au programme de PSI – hors programme en PC (cela aurait donc pu aussi être précisé).

### II.A.2–a)

- **L'électron atomique** (dans le cadre du programme, on considère l'électron dans un édifice atomique – sinon toute particule élémentaire possédant un spin propre non nul, en particulier les fermions : électrons, neutrinos, protons, neutrons... ) possède un moment cinétique  $\vec{\sigma}$  et un moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  non nuls.
- Le rapport entre ces deux grandeurs définit le **rapport gyromagnétique**  $\gamma$  tel que  $\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{\sigma}$
- Dans un modèle classique où on imagine l'électron de masse  $m$  en interaction avec un noyau de charge positive, donc pouvant avoir une orbite circulaire car soumise à la seule force électrostatique de la part du noyau, le courant créé par la rotation de la charge électronique  $-e$  crée un moment magnétique et on montre que le rapport gyromagnétique vaut dans ce cas

$$\gamma = -\frac{e}{2m}$$

- Dans un modèle quantique, le moment cinétique (spin) est quantifié, il vaut un multiple de la constante de Planck réduite  $\hbar$ , et donc le moment magnétique aussi, qui est alors un multiple du **magnéton de Bohr**  $\mu_B = \frac{e\hbar}{m}$ .

II.A.2–b) **Question hors programme sauf à passer par le rapport gyromagnétique.** La distribution de charge des  $Z$  électrons répartis uniformément dans une sphère de rayon  $a$  tourne à la pulsation  $\omega$  autour d'un axe, que l'on note  $\vec{u}_z$  passant par le noyau. Cela crée un courant tournant, responsable alors d'un moment magnétique. Le noyau de charge  $+Ze$  est exclu du moment magnétique car il est supposé ponctuel et sur l'axe de rotation.

**Première méthode au programme** On utilise le rapport gyromagnétique, rappelé à la question précédente.

- Le moment cinétique de cette distribution de charge homogène est orienté selon  $\vec{u}_z$  par symétrie et est donné par définition du moment d'inertie

$$\sigma = J\omega$$

avec  $J = \frac{2}{5}Ma^2$  donné dans l'annexe, où  $M = Zm_e$  et  $m_e$  la masse d'un électron.

- Le moment magnétique est donné par le rapport gyromagnétique  $\gamma = -e/2m_e$  de chaque électron délocalisé dans la sphère

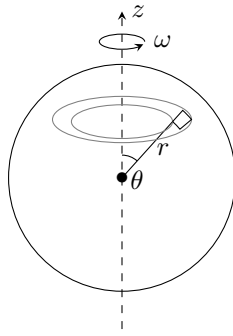
$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{\sigma}$$

- D'où vectoriellement par superposition des moments de chaque électron

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{Zea^2\omega}{5}\vec{u}_z$$

Le signe moins s'explique par le fait que ce sont des charges négatives qui tournent, donc le moment cinétique selon  $\vec{u}_z$  est opposé au moment magnétique (comme pour l'électron atomique).

**Deuxième méthode, calculatoire** Par linéarité découpons cette distribution de charges tournantes en spires élémentaires.



- Si on suppose que ces électrons sont uniformément répartis dans une boule de rayon  $a$  autour du noyau, il y a donc une densité de charge uniforme  $\rho = -\frac{3Ze}{4\pi a^3}$  dans la sphère.
- On découpe en profitant des symétries : on choisit une spire élémentaire constituée par le volume de charges compris entre  $r$  et  $r + dr$  et entre les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  en coordonnées sphériques par rapport à l'axe de rotation. Son volume élémentaire est  $d\tau = 2\pi r dr \sin\theta d\theta$ , sa charge est  $dq = \rho d\tau$  et sa surface  $S(r, \theta) = \pi(r \sin\theta)^2$ .
- Chaque spire tourne à la pulsation  $\omega$  en un temps  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Elle est donc le lieu d'un courant  $dI = \frac{dq}{T}$  soit

$$dI(r, \theta) = \frac{\omega}{2\pi} \frac{-3Ze}{4\pi a^3} 2\pi r \sin\theta dr d\theta$$

- Elle est donc à l'origine d'un moment magnétique  $d\vec{M} = S(r, \theta) dI(r, \theta) \vec{u}_z = \pi\rho\omega r^4 \sin^3\theta dr d\theta \vec{u}_z$ .

Par superposition, le moment magnétique total de la sphère tournante est donc :

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \int d\vec{M} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a S(r, \theta) dI(r, \theta) \vec{u}_z \\ &= \pi\rho\omega \int_{r=0}^a r^4 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta d\theta \vec{u}_z \\ &= \pi \cdot \frac{-3Ze}{4\pi a^3} \cdot \omega \cdot \frac{a^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \vec{u}_z \\ &= -\frac{Zea^2\omega}{5} \vec{u}_z \end{aligned}$$

**3ème méthode, analyse dimensionnelle** Par analyse dimensionnelle, on cherche un moment magnétique en  $A \cdot m^2$ . Le moment magnétique est donc proportionnel à

$$\mathcal{M} \propto e\omega a^2$$

De plus, il est forcément proportionnel à  $Z$ , car par linéarité il est la résultante de l'action des  $Z$  électrons, et dirigé selon  $\vec{u}_z$  par symétrie. De même on peut anticiper le signe moins entre  $\vec{M}$  et  $\vec{u}_z$  car ce sont des charges négatives qui tournent. Ainsi, à un facteur numérique près :

$$\vec{M} \propto -Zea^2\omega \vec{u}_z$$

### II.A.2-c)

- Le modèle d'une charge uniformément répartie à l'intérieur de la Terre ne semble pas pertinent, **les milieux internes à la Terre ne sont pas chargés** :  $\rho = 0$  (le sont-ils ? comment le savoir à la surface de la Terre si la charge totale est nulle ? y-a-t-il des arguments pour le réfuter ?).
- Mais le « modèle » présente en fait une relation entre  $\mathcal{M}$  et  $\vec{\sigma}$  et son origine physique. Il serait alors encore valable si les charges n'étaient pas uniformément réparties mais par couches homogènes de charges volumiques éventuellement différentes : on aurait quand même un moment magnétique ! On pourrait alors invoquer des charges surfaciques homogènes dans l'atmosphère, de signes différents à différentes altitudes qui permettraient un moment magnétique non nul ? Bref, **ce n'est pas l'hypothèse d'uniformité qui est gênante dans ce modèle**, on ne peut pas affirmer que le « modèle » est faux lorsque ce n'est pas *uniforme* : un *modèle* n'est pas un *calcul*...

- Dans l'annexe 1, on constate que **le moment magnétique de la Terre et l'axe de rotation ne sont pas alignés**, ce qui est contradictoire avec le modèle proposé (où  $\vec{M} \propto \vec{\sigma}$ )
- Quoi qu'il en soit ce modèle ne **permettrait pas d'expliquer les inversions de polarité du champ magnétique** qu'a connues la Terre (annexe 1) car la rotation de la Terre est constante (léger ralentissement aux échelles géologiques) donc son moment cinétique est (quasi) constant alors que son moment magnétique ne l'est pas du tout à ces échelles temporelles.

## II.B – L'effet dynamo

Cette partie frôle les limites du programme, le sujet est très détaillé donc c'est difficilement contestable, mais qu'est-ce qui est au final évalué? tout est presque donné?

**II.B.1–a)** La notion de particule de fluide n'a ici absolument aucun intérêt, elle permet juste d'introduire le référentiel en mouvement. Ce qui compte c'est que la force s'applique à toute charge quelconque dans tout référentiel en mouvement, et que sa valeur est forcément la même par invariance. . .

- Par invariance de la force et de la charge par changement de référentiel, on a alors la même valeur de la force de Lorentz pour toute charge  $q$  de vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , qu'on l'exprime dans les deux référentiels :

$$q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$$

- On note  $\vec{v}$  la vitesse de la charge dans la référentiel  $\mathcal{R}$ . Sa vitesse  $\vec{v}'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}(P, t)$  noté  $\vec{v}_P$  (vitesse d'entraînement) dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est telle que

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_P$$

En particulier pour  $\vec{v} = \vec{0}$ , on en déduit

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_P \wedge \vec{B}$$

Au passage, on a alors aussi  $\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{v} \wedge \vec{B}' \forall \vec{v}$ , soit  $\vec{B} = \vec{B}'$ .

**II.B.1–b)**

- Par définition d'un courant volumique de charges dans un milieu où des porteurs «  $i$  » en densité volumique de charge  $\rho_i$  se déplacent à la vitesse  $\vec{v}_i$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$$

- Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , la densité volumique de charge est identique (charge invariante, et volume invariant en mécanique classique, **cela aurait pu être rappelé**) donc le courant volumique associé est

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}'_i = \sum_i \rho_i (\vec{v}_i - \vec{v}_P) = \sum_i \rho_i \vec{v}_i - \left( \sum_i \rho_i \right) \vec{v}_P$$

- Or par hypothèse  $\sum_i \rho_i = 0$  car le milieu est localement neutre (« **le fluide n'est pas chargé** » . . . ). Donc

$$\vec{j} = \vec{j}'$$

**II.B.1–c)** On en déduit immédiatement la relation attendue d'après la loi d'Ohm locale dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  et les résultats précédents :

$$\vec{j} = \vec{j}' = \sigma \vec{E}' = \sigma (\vec{E} + \vec{v}_P \wedge \vec{B})$$

**II.B.2)** Les trois sous questions se marchent un peu dessus. . .



### II.B.2–a)

- Le **courant** créé par le champ électromoteur dû au champ  $\vec{B}_0$  est  $\vec{j}_1 = \sigma \vec{E}_{M0}$  lui-même **source d'un champ magnétique d'après Maxwell Ampère**.
- D'après la loi linéaire de Maxwell Ampère, on peut découper les origines du champ magnétique. Ici, on cherche l'effet d'un courant volumique particulier, sans prendre en compte les rétroactions (méthode itérative) : il est alors responsable d'un champ magnétique tel que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , c'est-à-dire ici :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1 = \mu_0 \sigma \vec{E}_{M0}$$

- Note : on peut négliger les courants de déplacement, ce qui simplifie l'argumentation (cf partie suivante... approximation des régimes quasi stationnaires dite « magnétique »)

### II.B.2–b) On a donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_1 = \mu_0 \sigma \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

soit en ordre de grandeur

$$\frac{B_1}{L} \sim \mu_0 \sigma U B_0$$

Autrement dit, le champ  $B_1$  est bien proportionnel à  $B_0$  comme on pouvait s'y attendre par linéarité des équations :

$$B_1 \sim \mu_0 \sigma U L B_0$$

### II.B.2–c) Le coefficient de proportionnalité obtenu est

$$r_m = \mu_0 \sigma U L = \frac{UL}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$$

- Ce coefficient  $r_m$  est bien un nombre adimensionné qui caractérise dans le contexte présenté ici une « **efficacité** » du processus d'induction
- On constate que  $r_m \propto \sigma$ , ce qui est en effet **caractéristique des phénomènes d'induction** : meilleur conducteur est le milieu, plus grands sont les courants volumiques d'induction (de Foucault)
- cf partie III pour une caractérisation plus précise de ce nombre dit de « Reynolds magnétique »

### II.B.3–a) Le processus est itératif :

$$\vec{B}_2 = \gamma r_m \vec{B}_1 = (\gamma r_m)^2 \vec{B}_0$$

### II.B.3–b) Par linéarité le champ total résulte de la superposition de tous ces champs, dont $\vec{B}_0$

$$\vec{B} = \sum_{i=0}^{\infty} \vec{B}_i$$

On constate que cette somme est celle d'une suite géométrique

$$\vec{B} = \sum_{i=0}^{\infty} (\gamma r_m)^i \vec{B}_0$$

dont la convergence dépend de la comparaison à un de sa raison  $\gamma r_m$ .

### II.B.3–c) Comme pour un laser, on cherche à avoir un champ créé spontanément par des faibles fluctuations, il faut donc avoir un **système instable** : c'est le cas lorsque la somme est **divergente**. Le critère d'instabilité dynamo est donc

$$\gamma r_m > 1$$

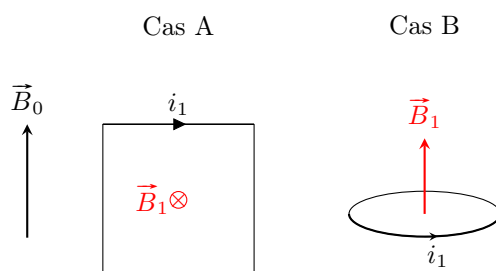
Ainsi un champ  $\vec{B}_0$  quasi nul, provenant de fluctuations, éventuellement locales, est à l'origine d'un champ  $\vec{B}$  macroscopique. Il faut bien pour cela que la somme soit très grande devant un.

On note que le champ final ne sera pas infini, ce qui serait énergiquement impossible, il est forcément tempéré par d'autres phénomènes non linéaires non pris en compte dans ce modèle.

## II.C – Étude d’une dynamo à courant et mouvement contraints : la dynamo de Bullard

II.C.1) La question est mal posée car l’étude des symétries est ici subtile : il aurait fallu demander des directions qualitatives, compétence au programme. La notation « B » est mal choisie.

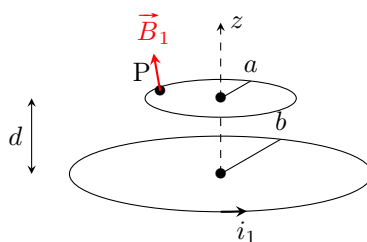
- Si on cherche par les mêmes arguments qu’en I.A.1) des plans de symétrie permettant de trouver les directions des champs créés par induction c’est-à-dire créés par le courant  $i_1$ 
  - Pour la géométrie A, le plan de la feuille est un plan de symétrie de la distribution de  $i_1$ , donc  $\vec{B}_1$  est perpendiculaire à la feuille **dans le plan de la spire**.
  - Il est en particulier perpendiculaire à  $\vec{B}_0$  dans le plan de la spire, ce qui est particulièrement inefficace si l’on souhaite augmenter le champ  $\vec{B}_0$  par effet dynamo. La direction en tous points de l’espace est plus compliquée. Elle est notamment dans le même sens que  $\vec{B}_0$  en certains points du plan du disque : le champ enroule les courants (notamment autour des parties horizontales du fil)
  - Pour la géométrie B, il n’existe aucun plan de symétrie des courants  $i_1$ ...
  - Il en apparaît si on néglige l’effet sur le champ de la branche verticale et qu’on ne s’intéresse qu’aux effets des courants circulaires (hypothèse sous jacente dans l’annexe 2) : dans ce cas tous les plans contenant l’axe de rotation du disque sont plans d’antisymétrie des courants, donc de symétrie de  $\vec{B}_1$ , donc le champ magnétique est vertical **sur l’axe** et ne possède aucune composante orthoradiale partout.
- Qualitativement, les champs créés par les courants  $i_1$  sont d’après la règle de la main droite :



- On note que le cas B diffère du cas A par l’ajout de la spire, donc le champ  $\vec{B}_1$  possède dans ce cas une composante **supplémentaire** selon le même axe que  $\vec{B}_0$ .
- C’est donc la **géométrie B** qui est la plus adaptée à un effet dynamo permettant de créer un champ magnétique spontané, où un champ magnétique induit un champ magnétique qui **se superpose dans le même sens au champ qui lui a donné naissance**, permettant une situation d’instabilité divergente. Et finalement seule une distribution de courant équivalente à une pouvant donner un champ  $\vec{B}_0$  peut permettre l’effet dynamo, c’est donc B plutôt que A.

La géométrie B présente moins de symétries que A, ce qui correspond au critère nécessaire donné dans l’annexe, mais ce n’est pas suffisant pour avoir l’effet dynamo : il faut que le champ induit puisse tout de même s’autoentretenir.

II.C.2)



- L’hypothèse  $a \ll b$  suffit pour démontrer le résultat : on peut considérer que tout point P du disque est sur l’axe de la spire. Et comme on est en  $z = d$  à distance constante de la spire, les composantes du champ ne dépendent donc que du temps et pas de l’espace.

- Alors, soit on invoque le résultat de la question IA, soit on refait un argument de symétrie pour montrer que  $\vec{B}_1$  est selon  $\vec{u}_z$  lorsque le point d'étude est sur l'axe :

$$\vec{B}_1 \approx B_1(t)\vec{u}_z$$

- $d \ll a$  donc les deux plans sont coplanaires : le disque est en  $z = 0$  de la spire (mais ce n'est pas nécessaire pour démontrer la relation demandée) donc  $\vec{B}_1$  est forcément aussi selon  $\vec{u}_z$  par symétrie (plan de la spire). Mais ce n'est pas suffisant pour montrer que  $B_1$  est indépendant de P. Pour cela on a besoin de  $a \ll b$  (et ce même si le disque n'est pas centré sur l'axe de la spire).

### II.C.3–a)

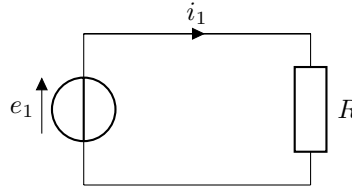
- La relation entre  $i_1$  et  $B_1$  est donnée par la définition de  $M$ , on calcule donc le flux

$$\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}} = \iint_{\text{disque}} \vec{B}_1 \cdot \vec{dS}$$

où  $\vec{dS}$  est orienté selon  $\vec{u}_z$  d'après l'énoncé. Or d'après la question précédente,  $\vec{B}_1$  est homogène sur le disque, donc  $\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}} = B_1 \pi a^2$ . Donc la première relation demandée est

$$B_1 \pi a^2 = M i_1$$

- Le circuit électrique équivalent au circuit parcouru par le courant induit est (le courant induit est généré par la fem  $e_1$ )



La loi des mailles et la loi d'Ohm donnent alors

$$e_1 = R i_1$$

Avec l'expression de  $e_1 = \Omega B_0 \frac{a^2}{2}$ , on obtient ainsi la relation demandée  $B_1 = \frac{M \Omega}{2 \pi R} B_0$ .

- II.C.3–b) Dans ce cas présent, on identifie  $\gamma r_m = \frac{M \Omega}{2 \pi R}$  défini à la question II.B.3. La condition d'effet dynamo obtenu à cette question est  $\gamma r_m > 1$  soit

$$\frac{M \Omega}{2 \pi R} > 1$$

Cette condition pour avoir un effet dynamo impose une grande vitesse et/ou une grande mutuelle, et/ou une petite résistance, des critères favorisant chacun en effet un fort phénomène d'induction.

- II.C.4) Ce calcul n'est en fait pas si direct que cela car le champ  $\vec{B}_0$  utilisé dans le calcul du flux du champ total à travers le disque n'est plus uniforme sur le disque, ce qui remet en cause la deuxième relation. Le calcul complet mène tout de même à la même relation. . . L'intérêt de cette question ainsi posée est très limité. Les relations obtenues précédemment sont encore valables pour le champ/courant/fem totaux. Donc

$$e = \Omega B \frac{a^2}{2}$$

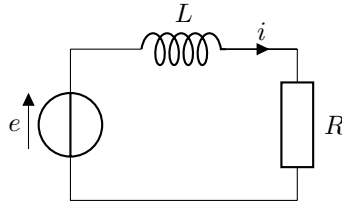
et de même

$$B = \frac{M i}{\pi a^2}$$

et de même

$$e = \frac{\Omega M}{2 \pi} i$$

II.C.5) Le schéma électrique équivalent est cette fois :



- La loi des mailles et les relations des composants  $R$  et  $L$  donne  $e = Ri + L \frac{di}{dt}$
- D'où l'équation en remplaçant l'expression de  $e$

$$L \frac{di}{dt} + \left( R - \frac{\Omega M}{2\pi} \right) i = 0$$

- Cette équation donne une solution de courant instable, divergent, si dans l'équation

$$R - \frac{\Omega M}{2\pi} < 0$$

C'est bien une condition exactement équivalente à celle obtenue à la question II.B.3 :  $\frac{M\Omega}{2\pi R} > 1$ , obtenue ainsi par deux méthodes différentes : la première par une méthode itérative, ici par une méthode globale.

II.C.6) (en lisant les question suivantes. . .) Il n'y a pas encore de **rétroaction mécanique** de l'induction sur le système via une force de Laplace, pour l'instant l'équation mécanique considérée est  $\Omega = cste$ .

II.C.7) On note qu'on fait l'hypothèse implicite d'une distribution de courant filiforme et radiale dans le disque, le calcul est possible en sortant de cette hypothèse et mène au même résultat, mais c'est un peu coton et surtout hors programme.

- Le disque est soumis uniquement au moteur, de couple  $\Gamma_m$  sur l'axe, et à l'action de la force de Laplace dans le référentiel du laboratoire, comme précédemment, le moment du poids est nul car l'axe est vertical et il n'y a pas de frottements.
- La force de Laplace sur le disque a pour couple sur l'axe orienté selon  $\vec{u}_z$  (le courant  $i$  est défini dans le sens radial sur le disque d'après le schéma)

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = \int_0^a \overrightarrow{OM} \wedge (i \, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z = -iB \frac{a^2}{2} = -\frac{Mi^2}{2\pi}$$

d'après l'expression de  $B$  obtenue à la question précédente

On peut aussi obtenir cette expression par une méthode énergétique en exploitant le couplage électromécanique parfait, mais ce n'est pas aller dans le sens du sujet.

- Or le disque a pour moment cinétique  $J\Omega$  projeté sur  $\vec{u}_z$ . L'application du TMCS donne donc l'équation demandée

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m - \frac{Mi^2}{2\pi}$$

la deuxième équation a déjà été obtenue précédemment et reste valable.

II.C.8) En régime stationnaire, on a donc directement (les équations sont données, donc cette question était donnée. . .)

$$\Gamma_m = \frac{Mi^2}{2\pi}$$

$$R = \frac{\Omega M}{2\pi}$$

soit

$$i = \pm \sqrt{\frac{2\pi\Gamma_m}{M}}$$

$$\Omega = \frac{2\pi R}{M}$$

**II.C.9)** Les bilans de puissance sont parfois plus riches de sens... On multiplie par  $\Omega$  l'équation mécanique et par  $i$  l'équation électrique pour obtenir des bilans de puissance :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) &= - Ri^2 + \frac{M\Omega i^2}{2\pi} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J\Omega^2 \right) &= \Gamma_m \Omega - \frac{M\Omega i^2}{2\pi}\end{aligned}$$

En multipliant par  $dt$  et en faisant la **somme** de ces deux équations, on obtient le bilan énergétique du système global (comme explicitement demandé par l'énoncé) entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$d \left( \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} J\Omega^2 \right) = - d\mathcal{E}_J + d\mathcal{E}_m$$

où :

- $\frac{1}{2} Li^2$  est l'**énergie électrique stockée** sous forme magnétique dans l'inductance équivalente au circuit du courant d'induction, c'est-à-dire dans tout le champ magnétique
- $\frac{1}{2} J\Omega^2$  est l'**énergie cinétique de rotation du disque**.
- $d\mathcal{E}_m = \Gamma_m \Omega dt$  est l'**énergie fournie par le moteur** au disque entre  $t$  et  $t + dt$ , gagnée par le système
- $d\mathcal{E}_J = Ri^2 dt$  est l'**énergie dissipée par effet Joule** entre  $t$  et  $t + dt$ , qui est perdue par le système global (signe négatif)

Les termes inductifs se compensent exactement : c'est le couplage électromécanique parfait du phénomène d'induction qui assure cela, la puissance gagnée (respectivement perdue) par le disque sous forme mécanique via la force de Laplace est perdue (resp. gagnée) par le circuit électrique en imposant une fem d'induction (qui vient du champ électromoteur créé par le mouvement des charges).

**II.C.10)** En régime stationnaire le bilan énergétique s'écrit (**en puissance, insistons...**)

$$\Gamma_m \Omega = Ri^2$$

Autrement dit, **la puissance fournie par le moteur compense exactement les pertes par effet Joule dans le circuit électrique.**

Cela met encore en évidence (**un peu redite...**)

- le couplage électromécanique parfait,
- le fait qu'en régime stationnaire, il n'y a pas de stockage de la puissance en énergie
- ce régime stationnaire ne peut exister que s'il y a une source d'énergie externe (le moteur)
- l'effet dynamo même ne peut exister que s'il y a une source mécanique d'énergie
- le régime stationnaire ne peut réellement être atteint que si le système est refroidi en permanence et suffisamment...

**II.C.11)** Le changement de signe possible sur la solution  $i$  en régime stationnaire («  $\pm$  ») **pourrait** expliquer l'inversion de polarité.

On note que ce système (la dynamo de Bullard) est en fait stable, il ne présente pas d'inversion spontanée, le signe est déterminé une fois pour toutes par les conditions initiales.

## II.D – L'expérience VKS2 (ENS Lyon, Ulm et CEA Saclay, Cadarache)

L'auteur a une dent contre Stefan Fauve :- ) Note : VKS pour « Von Karman Sodium »

L'article semblerait avoir une coquille : il semble bizarre que le champ soit créé selon l'axe  $y$  (figure 2) alors que l'axe de rotation est selon l'axe  $x$  sur la figure 1... Après je me trompe peut-être.

**II.D.1)** On lit dans l'encadré de l'article « On choisit le sodium malgré les problèmes de sécurité qu'il pose, car c'est le meilleur fluide conducteur de l'électricité autour de 100 °C–150 °C. »

- Autrement dit, le sodium est le **fluide conducteur** à plus grand  $\sigma$  dans les conditions de l'expérience. Cela favorise donc les grands nombres de Reynolds magnétiques (introduit après... ou à ce stade du sujet «  $r_m$  » qui favorise l'effet dynamo) permettant l'apparition de l'effet dynamo, et rapproche les conditions de l'expérience des conditions réelles du noyau terrestre.
- À plus basse température, le sodium serait solide donc inutile pour l'expérience, et il y a peu de métaux liquides à des températures aisément accessibles expérimentalement comme c'est le cas ici (le fer fusionne à 1500 °C à pression atmosphérique, il est donc inenvisageable de l'utiliser). On note d'autre part que sa densité est relativement faible (par comparaison à du mercure par exemple, autre métal liquide aux températures usuelles), ce qui améliore le nombre de Reynolds.
- Cela pose des problèmes de sécurité car le sodium est **très réactif avec l'eau liquide** (ou l'humidité de l'air) : il réalise avec l'eau une réaction fortement exothermique car le sodium est fortement réducteur ( $E^\circ = -2,71 \text{ V}$ ), produisant la forme oxydée, les ions  $\text{Na}^+$ , très répandue dans la nature (et donc *stable*...). C'est en effet un métal alcalin de faible électronégativité, on le conserve à l'état solide immergé dans de l'huile minérale, ou à l'état liquide dans des enceintes étanches comme ce doit être le cas dans l'expérience VKS2 (et comme ce fut le cas pour les réacteurs nucléaires Superphénix).

**II.D.2)** Les caractéristiques du champ magnétique terrestre mises en évidence par cette expérience sont

- **création spontanée** d'un champ magnétique par turbulence du champ magnétique, l'effet dynamo en serait donc responsable ;
- un **champ entretenu**, relativement stable et de direction fixée, malgré la turbulence
- des **inversions de polarité** du champ lorsqu'il y a une **rotation résiduelle** du champ de vitesse, ce qui est le cas de la Terre (rotation propre) ;
- des inversions **chaotiques**, aucune fréquence propre caractéristique ne s'en dégage ;
- les **temps caractéristiques de l'établissement de l'inversion** sont très petits devant les temps des plages de polarité constante.

Le fait qu'il existe de nombreux comportements qualitativement différents en fonction des valeurs des nombres adimensionnés ne met rien en évidence sur le champ *terrestre* mais apporte encore des arguments en faveur de l'origine turbulente du champ magnétique.

**II.D.3)** Première AN (!!!)

- Le nombre de Reynolds est défini par (rappelé dans l'annexe)  $R_e = \frac{LU}{\nu}$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique. Or  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  avec  $\eta$  la viscosité dynamique et  $\rho$  la masse volumique, de sorte que  $R_e = \frac{\rho LU}{\eta}$  (résultat de cours).
- Avec les données de l'énoncé  $\nu = \rho/\eta = 7 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  pour le sodium.
- On lit  $L \sim 600 \text{ mm}$
- $U \sim \Omega L$  avec  $\Omega \approx 1000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} \approx 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , ce qui donne une vitesse typique de l'ordre de  $60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Ainsi, en ne conservant qu'au maximum un chiffre significatif (CS)

$$R_e = \frac{\Omega L^2 \rho}{\eta} \sim 6 \times 10^7$$

- Dans le texte sont mentionnées les valeurs de  $10^6$  à  $10^7$ , ce qui est compatible, on est bien en régime fortement turbulent. La valeur de la vitesse caractéristique  $U = \Omega L$  a été probablement surévaluée ici en ordre de grandeur, ce qui pourrait expliquer le léger écart.

```
>>> from math import pi
>>> L = 600e-3 #m
>>> Omega = 1000 #tr/min
>>> Omega *= 2*pi/60 #rad/s
>>> eta = 6e-4 #SI
>>> rho = 900 #SI
```

```

>>> nu = eta/rho
>>> print("nu_Na = {0:.0e} m^2.s^-1 ({0})".format(nu))
nu_Na = 7e-07 m^2.s^-1 (6.666666666666666e-07)
>>> Re = Omega*L**2/nu
>>> print("Re = {0:.0e} ({0})".format(Re))
Re = 6e+07 (56548667.76461628)

```

II.D.4) (...compétence de lecture très basique dont le résultat est donné, mais il faut jouer le jeu de la rédaction, un « oui » ne peut pas suffire...) C'est bien le même, il est mentionné à la troisième page de l'article, dans l'encadré sur « le nombre de Reynolds magnétique ».

## III Relations fondamentales de la magnétohydrodynamique

### III.A –

Question dont le résultat est je pense fumeux : le couplage entre l'hydrodynamique et l'électromagnétisme introduit des échelles spatiales et de temps a priori différentes. . . donc il faudrait aussi écrire Navier Stokes en ordres de grandeur et la conservation de la masse, et étudier les différents cas possibles de l'influence d'une vitesse d'écoulement non relativiste en fonction des deux nombres de Reynolds à disposition. . .

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Maxwell-Gauss
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Maxwell-Faraday
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	Maxwell-Flux (ou Thomson)
$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Maxwell-Ampère

- En ordre de grandeur les champs varient sur l'échelle spatiale  $L$  et temporelle  $T$ .
- La vitesse d'une particule de fluide est de l'ordre de  $L/T$  (couplage parfait entre écoulement et champ?)
- Et dans Maxwell-Ampère, si les courants de déplacements sont négligeables par rapport aux autres termes, alors  $\operatorname{rot} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$  (sinon il n'y a plus d'influence des courants). Dans ce cas  $\|\vec{j}\| \ll \|\vec{j}_d\| \Leftrightarrow \|\epsilon_0 \vec{j}_d\| \ll \|\operatorname{rot} \vec{B}\|$ , soit en ordre de grandeur

$$\frac{B c^2}{E U} \gg 1$$

en utilisant  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

- Or d'après Maxwell Faraday en ordre de grandeur, les deux termes sont du même ordre donc (sinon il n'y a plus de rétroaction sur l'induction)

$$\frac{E}{B} \sim \frac{L}{T} \sim U$$

Attention, on n'a pas ici  $E/B = c$ !

- Donc la condition  $\|\vec{j}\| \ll \|\vec{j}_d\|$  est équivalente à

$$\frac{U^2}{c^2} \ll 1$$

ce qui correspond bien à une hypothèse d'écoulement non relativiste.

On pourrait aussi invoquer  $j \sim \sigma E$ , de sorte que  $\|\vec{j}\| \gg \|\vec{j}_d\| \Leftrightarrow T \gg \tau$  où  $\tau = \epsilon_0/\sigma$  (utilisé après), ce qui est équivalent à une limite type ARQS, mais qu'il faut relier à la l'hypothèse de l'écoulement non relativiste, et ce n'est pas si évident que cela, car ici on parle d'écoulement et non d'onde. Et on ne peut pas non plus a priori avancer  $j \sim \rho U$  car le  $\rho$  ici (densité de porteurs de charges) n'est pas le même que celui de Maxwell Gauss (densité totale), ce qui n'avancerait alors à rien (on peut en avoir un nul, et l'autre non).

### III.B –

- III.B.1) En injectant directement l'expression de  $\vec{j}$  en prenant en compte le champ électromoteur et en utilisant Maxwell Gauss

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho_e = -\sigma \operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

Il semble totalement inutile en soi (et en regardant la suite du sujet) de développer plus cette relation avec les formules d'analyse vectorielle données dans le sujet (**le sujet aurait dû le préciser**). De plus sous cette forme, le terme de droite apparaît comme une source de création de charge ! Le terme  $-\sigma \operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B})$  est en effet ici un taux volumique de création de charge.

- III.B.2) Au repos  $\vec{v} = \vec{0}$  l'équation se ramène au cas classique, dont la solution est

$$\rho_e(t) = \rho_e(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Le temps caractéristique d'évolution est  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$  par identification, l'AN donne pour le cuivre (1 à 3 CS acceptables)

$$\tau = 1,48 \times 10^{-19} \text{ s}$$

Donc au bout d'un temps très court, le milieu est **localement de charge nulle, tant que les champs varient sur des échelles de temps plus longues**, à de plus basses fréquences que  $f_c = \frac{1}{\tau} \sim 10^{19}$  Hz, ce qui est une très haute fréquence par rapport aux fréquences habituellement accessibles en TP (ARQS) ou visiblement en jeu dans la magnétohydrodynamique lorsque l'on sort de l'hypothèse du repos (et comme les écoulements sont turbulents, ce n'est pas si sûr que cela aux échelles locales ?)

```
>>> diel = 8.85e-12 #SI
>>> sigma = 59.6e6 #SI, pour le cuivre
>>> tau_cu = diel/sigma
>>> print("tau_cuivre = {0:.2e} s ({0})".format(tau_cu))
tau_cuivre = 1.48e-19 s (1.4848993288590605e-19)
```

- III.B.3) Si le conducteur est en mouvement et qu'on est en régime stationnaire

$$\rho_e = -\epsilon_0 \operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

En OG, on obtient  $\rho_e \sim \frac{\epsilon_0 U B}{L}$ , soit à 0 ou 1 CS :

$$\rho_e \sim 5 \times 10^{-12} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

- (Il est clair que l'interprétation  $\rho_e$  non nul car  $\operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B})$  non nul dû à l'induction n'est pas suffisante, c'est une paraphrase de l'équation, la question est pourquoi ? L'interprétation semble subtile... Tentative...) La nécessité d'une charge volumique non nulle peut s'expliquer par le fait que dans le référentiel au repos, où il n'y a pas de champ électromoteur, des charges sont en mouvement dans le fluide, elles-mêmes à l'origine des courants de charge et donc du champ magnétique. Or ces charges ont été mises en mouvement uniquement par l'existence d'une force électrique, qui ne peut elle-même qu'avoir été produite que par un champ électrique  $\vec{E}$  conséquence d'une distribution de charge locale non nulle :  $\rho_e$ .
- L'OG de charges libres dans un métal est de  $10^{30} \text{ m}^{-3}$ , donc la densité volumique de charge libres est de l'ordre de  $\rho_l \sim 10^{11} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$ , que l'on retrouve par la formule  $\rho_l = \frac{N_A \rho_e}{M}$
- On a donc  $\rho_e \ll \rho_l$ , les charges mises en jeu par le phénomène magnétohydrodynamique sont une **très faible portion des charges présentes dans le sodium**, mais elles restent à l'origine de l'effet dynamo !

```
>>> B = 50*1e-4 #T
>>> rho_e = diel*Omega*B
>>> print("rho_e = {0:.0e} C.m^-3 ({0})".format(rho_e))
rho_e = 5e-12 C.m^-3 (4.633849164044945e-12)
```

Note : le fait que la divergence de  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  soit non nul, mais que son rotationnel aussi (cf suite) est sympathique...



### III.C –

La divergence de  $\vec{j}$  n'a aucun intérêt ? Et pourquoi se mettrait-on en stationnaire ? Sinon le résultat suivant semble valide hors stationnaire dans la jauge de Coulomb et approximativement valide dans la jauge de Lorentz si non relativiste. . . Mais à quoi sert ce résultat ?

- ( $\text{div } \vec{j} = 0$  d'après les questions précédentes car le milieu est localement neutre – ARQS – donc  $\text{div } \vec{E} + \text{div}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$ , ce qui donne en régime stationnaire exactement l'équation de Maxwell Gauss. . . forcément)
- D'après l'énoncé on se place en régime stationnaire, le potentiel scalaire est donc défini par  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  (Maxwell Faraday stationnaire). Alors on retrouve immédiatement l'équation de **Poisson** par Maxwell Gauss

$$\Delta V = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

### III.D –

On procède comme pour une équation d'onde. D'après Maxwell Ampère en négligeant courant de déplacement et en utilisant la loi d'Ohm locale, et Maxwell Flux :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

En utilisant  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B}$ , alors

$$-\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma [\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})]$$

D'après Maxwell Faraday alors :

$$-\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \left[ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) \right]$$

C'est-à-dire l'équation demandée :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) + \lambda \Delta \vec{B}$$

avec par identification  $\lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ .

L'identification des deux termes est aisée car quasi donnée par le sujet (une chance sur deux. . .) il s'agit donc probablement de bien les justifier :

- Le terme **laplacien s'identifie à un terme diffusif** car il est relié à une dérivée temporelle première du même objet (le champ magnétique), avec  $\lambda$  un « coefficient de diffusion magnétique » en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .
- L'autre terme est celui d'origine inductive, car il est **lié aux mouvements du fluide conducteur** par le champ de vitesses  $\vec{v}$

### III.E –

En multipliant par  $\frac{1}{\mu_0} \vec{B}$  pour avoir une équation homogène à une puissance volumique puis en intégrant sur un volume  $\mathcal{V}$  quelconque pour faire apparaître une équation homogène à une puissance

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mu_0} B^2 d\tau = \frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{B} d\tau + \frac{\lambda}{\mu_0} \int_{\mathcal{V}} \Delta \vec{B} \cdot \vec{B} d\tau$$

- Le membre de gauche est la dérivée temporelle de l'énergie magnétique  $U_m = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mu_0} B^2 d\tau$
- Le premier terme du membre de droite est une puissance reçue  $P_I$  d'origine inductive
- (si on part mal sur ce calcul, cela devient vite très moche, son intérêt est limité car les questions d'analyse vectorielle sont à la limite du programme et un bilan d'énergie a déjà été demandé à la partie précédente. . .) On travaille sur le second terme du membre de droite, où on cherche à faire réapparaître la source  $\vec{j}$  et une divergence liée à l'induction

$$\begin{aligned} \Delta \vec{B} \cdot \vec{B} &= -\overrightarrow{\text{rot}}(\mu_0 \vec{j}) \cdot \vec{B} = -\mu_0 \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = -\mu_0 (\vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} + \text{div}(\vec{j} \wedge \vec{B})) \\ &= -\mu_0 (\mu_0 j^2 + \text{div}(\vec{j} \wedge \vec{B})) \end{aligned}$$

- Le second terme est une divergence, donc intégré sur le volume donne un flux sur la surface extérieure d'après le théorème d'Ostrogradsky

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\vec{j} \wedge \vec{B}) \, d\tau = \iint_{\Sigma} \vec{j} \wedge \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

intégrale qui est nulle si on prend le volume assez grand de sorte que les bords du volume voient un champ magnétique nul à l'infini (« fluide au repos » mais je ne comprends pas pourquoi là où le fluide est au repos, le champ est nul... cf la Terre, ce qui n'empêche pas le champ d'être forcément nul à l'infini) : l'intégrand est alors nul en tout point de la surface.

- Le premier des deux termes donne les pertes par effet Joule, une fois multiplié par  $\lambda/\mu_0 = 1/(\mu_0^2\sigma)$  et intégré

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{j^2}{\sigma} \, d\tau = \mathcal{P}_J$$

Ce terme d'effet Joule intervient dans l'équation globale avec un signe négatif : c'est une perte de l'énergie magnétique dans le milieu conducteur sous forme thermique du fait du couplage inductif. En effet, l'équation énergétique s'écrit au final :

$$\frac{dU_m}{dt} = -\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_I$$

faisant apparaître deux origines au stockage global de l'énergie magnétique : une puissance reçue d'origine inductive et une puissance perdue par effet Joule.

### III.F –

- On a une équation de diffusion si le terme inductif  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$  est **négligeable** devant le terme diffusif (ce qui arrive si  $R_m \ll 1$ , cf après...). En particulier s'il est nul, dans le cas par exemple d'un fluide est complètement au repos  $\vec{v} = \vec{0}$ , ou dans d'autres conditions suffisantes que l'on retrouve en développant ce rotationnel (conditions qui n'ont aucun intérêt ici, l'énoncé aurait dû préciser « la condition nécessaire », les conditions suffisantes ont peu d'intérêt et il y en a beaucoup).
- Dans ce cas la diffusion pure fait disparaître le champ  $\vec{B}$  (pas de champ aux limites à l'infini) sur une échelle de temps  $\tau$  qui dépend de l'échelle spatiale  $R$  telle que

$$\frac{R^2}{\tau} \sim \lambda$$

- En prenant comme échelle spatiale la taille typique de la coquille fluide du noyau (externe),  $R = 2 \times 10^3$  km, on obtient

$$\tau \sim R^2 \mu_0 \sigma \sim 7 \times 10^4 \text{ ans}$$

Ce résultat n'a de sens qu'en années pour pouvoir être comparable et ne comporte que zéro ou un CS.

- C'est un temps long à l'échelle humaine mais court à l'échelle géologique (âge de la Terre : 5 milliards d'années). Cela confirme donc que **le champ magnétique terrestre est entretenu par des phénomènes inductifs**, un champ fossile éventuel aurait disparu depuis longtemps.

```
>>> perm = 4*pi*1e-7 #SI
>>> R = 2e6 #m
>>> sigma_noyau = 4.5e5 #SI
>>> tau_B = R**2*perm*sigma_noyau
>>> print("tau_B = {0:.0e} ans ({1:.0e} s)".format(tau_B/(365*24*60**2), tau_B))
tau_B = 7e+04 ans (2e+12 s)
```

### III.G –

Dans l'équation d'évolution, on peut comparer les ordres de grandeur de la source inductive du champ magnétique par advection  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})$  et du terme de dissipation diffusive  $\lambda \Delta \vec{B}$  pour construire un nombre sans dimension

$$R_m = \frac{\|\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})\|}{\|\lambda \Delta \vec{B}\|}$$

En ordres de grandeur

$$R_m = \frac{UL}{\lambda}$$

ce qui correspond effectivement à la définition du nombre de Reynolds magnétique mentionné dans l'annexe et retrouvé aux questions, sous le nom  $r_m$ , II.B.3, II.C.5 et II.D.4 (ouf), et qui s'interprétait alors comme une condition d'instabilité des phénomènes inductifs lorsque  $R_m > 1$ . On peut donc préciser ici que ce qui tempère l'instabilité est la diffusion du champ.