Corrigé XSR PSI 2022

Etude et mesure des séismes

I Ondes mécaniques dans les solides

1. Puisque $\frac{\Delta L}{L}$ est sans dimension et que $\sigma = \frac{F}{S}$ est homogène à une pression, E s'exprime en Pa.

2. Pour un milieu idéal, c'est-à-dire infiniment rigide, $\frac{\Delta L}{L} = 0$ quelle que soit la contrainte σ. On en déduit que $E \to +\infty$.

3. La longueur de la tranche en présence de la perturbation vaut :

$$x + \mathrm{d}x + u(x + \mathrm{d}x, t) - \big(x + u(x,t)\big) \approx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x$$

L'allongement relatif de la tranche vaut donc :

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

4. La loi de Hooke s'écrit donc :

$$\frac{F(x,t)}{S} = E\frac{\partial u}{\partial x}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{S}\frac{\partial F}{\partial x} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

5. Le PFD appliqué à la tranche donne :

$$\rho S\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x + \mathrm{d}x, t) - F(x,t) \approx \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

avec :

$$c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Il s'agit de l'équation de d'Alembert.

6. Numériquement, on trouve :

$$c_p = \sqrt{\frac{7 \times 10^{10}}{25 \times 100}} \approx 0{,}53 \times 10^4 = 5{,}3 \times 10^3 \text{ m. s}^{-1}$$

7. Une onde mécanique est dite longitudinale si la grandeur ondulatoire traduit un déplacement parallèle à la direction de propagation. Elle est dite transversale si la grandeur ondulatoire correspond à un déplacement perpendiculaire à la direction de propagation.

Le champ de déplacement $u(x,t)$ est parallèle à la direction de propagation et correspond donc à une onde longitudinale.

8. L'équation de propagation $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ multipliée par $\frac{\partial u}{\partial t}$ donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right) = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} = E\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\right)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

On reconnaît la densité volumique d'énergie cinétique $\epsilon_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ et la densité volumique d'énergie potentielle élastique $\epsilon_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$. On peut donc mettre l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_{\mathrm{c}} + \epsilon_{\mathrm{p}}\right) + \mathrm{div}\vec{\pi} = 0$$

en posant :

$$\vec{\pi} = -E\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\overrightarrow{e_x} = -E\frac{\partial u}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{grad}u}$$

L'équation obtenue traduit donc la conservation de l'énergie mécanique dans le solide. Le vecteur de Poynting $\vec{\pi} = -E\frac{\partial u}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{grad}u}$ est le vecteur densité de courant d'énergie mécanique.

II Mécanisme de génération d'un séisme

9.

- Forces longitudinales :

$$\left(\tau_c(x,t)-\tau_f(x,t)\right)H\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x}+EH h\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overrightarrow{e_x}$$

- Forces transversales :

$$(\sigma_R-\sigma_N)H\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_z}-\rho g H h\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_z}$$

10. Le PFD donne, en projection sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$\rho H h\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=EHh\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\tau_c(x,t)-\tau_f(x,t)\right)H\mathrm{d}x$$

soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c_p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{1}{Eh}\left(\tau_c(x,t)-\tau_f(x,t)\right)$$

11. En procédant comme à la question 8, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_{\mathrm{c}}+\epsilon_{\mathrm{p}}\right)+\mathrm{div}\vec{\pi}=\left(\frac{\tau_c-\tau_f}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial t}$$

Le terme $\left(\frac{\tau_c-\tau_f}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial t}$ correspond à un terme « source » ou de « puits » : il s'agit de la puissance fournie à l'unité de volume de matériau soumis au cisaillement.

Plus précisément, $\frac{\tau_c}{h}\frac{\partial u}{\partial t}$ correspond bien à un apport de puissance volumique, tandis que $-\frac{\tau_f}{h}\frac{\partial u}{\partial t}$ correspond à une perte de puissance volumique, pouvant provoquer un échauffement.

12. On pose $\tilde{u}=\frac{u}{u_0}$, $\tilde{x}=\frac{x}{\ell}$, $\tilde{t}=\frac{t}{T}$, $\tilde{\tau}_c=\frac{\tau_c}{\tau_0}$ et $\tilde{\tau}_f=\frac{\tau_f}{\tau_0}$. On en déduit :

$$\frac{u_0}{\ell^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^2}-\frac{u_0}{T^2c_p^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{t}^2}=-\frac{\tau_0}{Eh}\left(\tilde{\tau}_c(x,t)-\tilde{\tau}_f(x,t)\right)$$

soit :

$$\frac{\ell^2}{T^2c_p^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{t}^2}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\tau_0\ell^2}{u_0Eh}\left(\tilde{\tau}_c(x,t)-\tilde{\tau}_f(x,t)\right)$$

On a construit les grandeurs adimensionnées de telle manière que $\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{t}^2}\approx\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^2}$. Par conséquent, si $\ell\ll c_pT$, l'équation précédente se simplifie en :

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\tau_0\ell^2}{u_0Eh}\left(\tilde{\tau}_c(x,t)-\tilde{\tau}_f(x,t)\right)=0$$

13. Le rapport sans dimension attendu est :

$$\frac{\tau_0\ell^2}{u_0Eh}=\frac{\tau_0\ell H}{E\frac{u_0}{\ell}hH}$$

C'est le rapport de la force de cisaillement $\tau_0\ell H$ à la force élastique $E\frac{u_0}{\ell}hH$ traduisant la déformation du milieu.

14. En présence de glissement, la loi de Coulomb s'écrit simplement :

$$\tau_f(x,t) = f\sigma_R$$

En négligeant le poids, on obtient :

$$\sigma_R = \sigma_N$$

D'où :

$$\tau_f(x,t) = f\sigma_N$$

15. Dans une zone de non glissement,

$$u(x,t) = 0$$

On en déduit :

$$\tau_f(x,t) = \tau_c(x,t)$$

16. Dans la zone de glissement,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\tau_r - \tau_c}{Eh}$$

donc :

$$u(|x| \leq \ell_g) = \frac{\tau_r - \tau_c}{2Eh}x^2 + Ax + B$$

Les conditions aux limites $u(\pm\ell_g) = 0$ donnent les constantes d'intégration :

$$u(|x| \leq \ell_g) = \frac{\tau_r - \tau_c}{2Eh}\left(x^2 - \ell_g^2\right)$$

En dehors de la zone de glissement, on a :

$$u(|x| \geq \ell_g) = 0$$

17. La densité volumique d'énergie potentielle élastique $\epsilon_\mathrm{p} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ vaut :

$$\begin{cases} \epsilon_\mathrm{p}(|x| \leq \ell_g) = \dfrac{(\tau_c - \tau_r)^2}{2Eh^2}x^2 \\ \epsilon_\mathrm{p}(|x| \geq \ell_g) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$E_\mathrm{e} = Hh\frac{(\tau_r - \tau_c)^2}{2Eh^2}\int_{-\ell_g}^{\ell_g} x^2 \mathrm{d}x = \frac{H\ell_g^3}{3Eh}(\tau_c - \tau_r)^2$$

Si on n'avait pas glissement, E_e serait nulle. Par conséquent, la présence de la zone de glissement entraîne un gain d'énergie pour la couche solide.

18. Le travail des forces de cisaillement vaut, quant à lui :

$$W_{\text{cis}} = \tau_c H \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} u(x)\,\mathrm{d}x - H \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau_f(x) u(x)\,\mathrm{d}x = H \int_{-\ell_g}^{\ell_g} (\tau_c - \tau_r)\frac{\tau_r - \tau_c}{2Eh}\left(x^2 - \ell_g^2\right)\mathrm{d}x$$

On en déduit :

$$W_{\text{cis}} = -\frac{H}{2Eh}(\tau_r - \tau_c)^2\left(\frac{2\ell_g^3}{3} - 2\ell_g^3\right) = \frac{2H\ell_g^3}{3Eh}(\tau_c - \tau_r)^2$$

On constate donc que :

$$W_{\text{cis}} = 2E_{\text{e}}$$

19. Le taux d'accroissement du travail des forces de cisaillement est donné par :

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{cis}}}{2\mathrm{d}\ell_g} = \frac{H\ell_g^2}{Eh}(\tau_c - \tau_r)^2$$

Le taux d'accroissement de l'énergie élastique vaut, quant à lui :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{e}}}{2\mathrm{d}\ell_g} = \frac{H\ell_g^2}{2Eh}(\tau_c - \tau_r)^2$$

On note, comme ci-dessus que :

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{cis}}}{2\mathrm{d}\ell_g} = 2\frac{\mathrm{d}E_{\text{e}}}{2\mathrm{d}\ell_g}$$

La moitié du travail des forces de cisaillement ne se retrouve pas dans le gain d'énergie élastique : il y a donc un surplus d'énergie gagnée.

20. Le taux de restitution d'énergie surfacique vaut donc :

$$G\left(2\ell_g\right) = \frac{\ell_g^2}{2Eh}(\tau_c - \tau_r)^2$$

Récupération du surplus d'énergie ?

21. La zone glissante ne peut progresser que si le gain énergétique est supérieur au coût énergétique nécessaire à la création de la surface glissante. Il faut donc que :

$$G\left(2\ell_g\right) > G_{\text{c}}$$

22. La condition précédente impose

$$\ell_g > \frac{\sqrt{2EhG_{\text{c}}}}{\tau_c - \tau_r}$$

La taille critique minimale de la zone glissante vaut donc :

$$L_{\mathrm{c}} = \frac{\sqrt{2EhG_{\mathrm{c}}}}{\tau_c - \tau_r}$$

Si l'on fixe maintenant la taille de la zone glissante, l'interface sera déstabilisée si

$$\tau_c - \tau_r > \frac{\sqrt{2EhG_{\mathrm{c}}}}{\ell_g}$$

La contrainte seuil vaut donc :

$$\tau_c^{\mathrm{lim}} = \tau_r + \frac{\sqrt{2EhG_{\mathrm{c}}}}{\ell_g}$$

23. Le taux de variation de $G(2\ell_g)$ vaut :

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}(2\ell_g)} = \frac{\ell_g}{Eh}(\tau_c - \tau_r)^2 > 0$$

G est donc une fonction croissante de la taille de la zone glissante. On en déduit que la zone glissante est instable. Si $G(2\ell_g) > G_c$, la taille de la zone glissante fracturée augmente.

On peut supposer que l'énergie cinétique volumique augmente (bien que l'on soit dans le cadre d'un régime quasi-statique…).