EXERCICE 1

Exemples de distributions continues

1. Déterminer la charge portée par une feuille d'aluminium, de la dimension d'une feuille $A4$, à laquelle on a arraché 100 électrons. En déduire la densité surfacique de charge de la feuille.
2. Une bille de polystyrène électrisée, de rayon R, a une densité surfacique de charge de la forme : $\sigma(M) = \sigma_0 \cos\theta$, M étant un point de la surface de la bille, σ_0 étant une constante et θ étant la seconde coordonnée sphérique du point M. Quelle charge porte la bille de polystyrène ?
3. Certains noyaux légers peuvent être modélisés par une distribution sphérique de rayon a et dont la charge varie en fonction de la distance r au centre suivant la loi : $\rho = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)$ où ρ_0 est une constante positive et où $r < a$. Déterminer la charge totale du noyau.
4. Une sphère conductrice est parcourue par les courants surfaciques, exprimés en coordonnées sphériques, de la forme : $\vec{j}_s = j_{s0} \sin\theta\, \vec{e}_\phi$, où j_{s0} est une constante. Déterminer l'intensité parcourant la sphère en surface. Montrer que cette distribution surfacique de courant est celle que l'on obtiendrait en faisant tourner une sphère isolante chargée uniformément autour de l'un de ses axes.

EXERCICE 2

Courant de convection

Soit une sphère chargée uniformément en volume. On note Q la charge totale portée par la sphère. La sphère est mise en rotation autour de l'un de ses axes à la vitesse angulaire constante ω.

1. Exprimer la densité volumique de charge portée par la sphère.
2. On décompose la sphère en spires élémentaires. Déterminer l'intensité élémentaire dI d'une spire élémentaire de rayon r.
3. En déduire l'intensité totale I parcourant la sphère en rotation.

EXERCICE 3

Passage en vision surfacique

Un conducteur, occupant la zone de l'espace correspondant à $z > 0$ comme indiqué figure 1, est le siège de courants volumiques de la forme :

$$\vec{j} = j_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x.$$

1. Quelle est la signification physique de δ ?
2. Justifier que cette distribution volumique de courant peut être assimilée à une distribution surfacique de courant dont on donnera l'expression du vecteur densité de courants surfaciques.

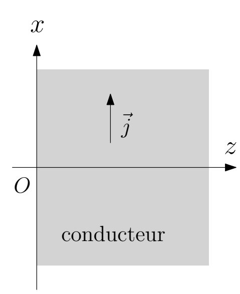

FIGURE 1 – Courant volumique dans un conducteur

EXERCICE 4

Câble coaxial

On étudie un câble coaxial que l'on modélise de la façon suivante : le câble est constitué de deux conducteurs cylindriques, infinis, coaxiaux de rayons a et b comme indiqués figure 2. Les conducteurs sont considérés comme des conducteurs parfaits et l'espace inter-conducteur est assimilé à du vide. On note $\sigma(M,t)$ la densité surfacique de charge sur le conducteur intérieur et $\overrightarrow{j}_s(M,t)$ la densité de courant surfacique sur ce même conducteur, le point M étant repéré par ses coordonnées cylindriques $(r=a,\theta,z)$.

1. À partir d'un bilan de charge à la surface du conducteur intérieur, déterminer l'équation différentielle reliant σ et $\overrightarrow{j}_s$. Cette équation est l'équivalent surfacique de l'équation de conservation de la charge.
2. En régime harmonique, on montre que les expressions de σ et $\overrightarrow{j}_s$ sont :

$$\sigma(z,t) = \varepsilon_0 E_a \exp \mathrm{j}(kz-\omega t)$$

$$\overrightarrow{j}_s(z,t) = \frac{E_a}{\mu_0 c}\exp \mathrm{j}(kz-\omega t)\overrightarrow{e}_z$$

   Où E_a est l'amplitude du champ électrique à la surface du conducteur intérieur. L'équation de conservation de la charge est-elle vérifiée ?

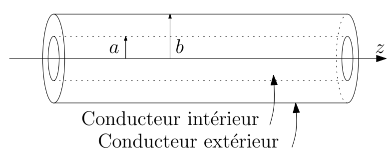

FIGURE 2 – Modélisation du câble coaxial

EXERCICE 5

Puissance dissipée par effet Joule

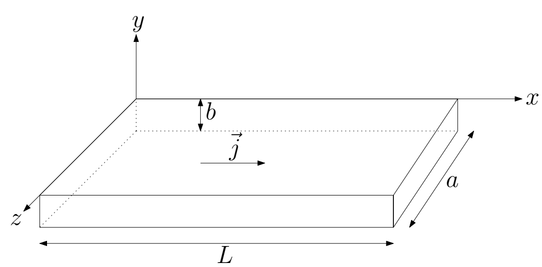

FIGURE 3 –

Un conducteur, représenté figure 3, de conductivité γ_0, occupant le demi-espace $z>0$ est parcouru par une densité de courant volumique :

$$\overrightarrow{j} = j_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\times\cos\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{e}_x.$$

1. Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet joule dans le conducteur. On supposera que $\delta \ll a$.
2. Comparer cette puissance à celle qui serait dissipée dans ce conducteur s'il était parcouru par une même intensité efficace à densité volumique de courant uniforme. Conclure.

EXERCICE 6

Effet Hall

1. Une résistance est classée selon sa puissance nominale P_n. Pour $P_n < 1\text{W}$, c'est un manchon cylindrique en céramique enrobé d'un film de carbone, dont les connecteurs sont des capsules de nickel. Pour $P_n > 1\text{W}$, c'est un fil résistant enroulé. Avec du cuivre électrolytique très pur, on fabrique des fils ultra-fins d'un diamètre compris entre 10μm et 500μm isolés par une couche isolante d'émail thermo-adhésif.

   Un potentiomètre Amico 3590S-2-104L de 100kΩ est un fil enroulé autour d'un arbre permettant, par sa rotation, de faire varier la résistance entre une borne fixe et une borne mobile. Il est utilisé dans des systèmes de réglage de minuterie, de température ou de vitesse. Sa plaque signalétique donne :

résistance	100kΩ
diamètre de l'arbre	6mm
longueur hors tout	25cm
densité de courant maximale (avant grillage)	$5\text{A}\cdot\text{mm}^{-2}$
tension nominale à la résistance maximale	500V

   (a) Calculer, à résistance maximale et tension nominale, l'intensité du courant qui traverse le potentiomètre.

   (b) Quel diamètre d de fil faut-il prévoir et quelle est la longueur l du fil enroulé ? Combien y a-t-il de tours de fil autour de l'arbre ?

   (c) Dans le modèle de friction de Drude de coefficient h, en supposant qu'un électron est libéré par atome de cuivre pour la conduction, évaluer à tension nominale et résistance maximale, la vitesse statistique des électrons, le champ électrique et le coefficient h. Quel champ néglige-t-on ?

2. Une plaquette parallélépipédique (P) (figure 4) en silicium dopé N par des atomes de phosphore pentavalents, a une section rectangulaire de côtés a (selon Oy) et b (selon Ox) et une longueur l (selon Oz). Les sections parallèles à Oxy situées en $z = 0$ et $z = l$ sont deux électrodes recouvertes d'un métal très conducteur. Dans l'axe Oz, par le biais des électrodes, on la soumet à une différence de potentiel u, ce qui fait circuler un courant I dans le sens de Oz, essentiellement dû à des électrons pseudo-libres. Dans le silicium dopé N, la densité des électrons pseudo-libres est 10^{22}m^{-3}.

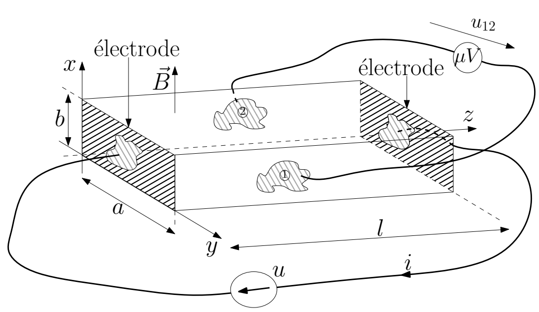

FIGURE 4 – Plaquette semi-conductrice de Hall

   (a) En négligeant le champ magnétique, exprimer la résistance R de (P), la vitesse statistique des électrons de conduction, le champ électrique E et le coefficient h' de Drude.

   (b) On amène (P) dans une zone de champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_x}$ constant et intense. Montrer qu'en régime transitoire, des charges de surface s'accumulent progressivement sur les faces (1) et (2) de (P) parallèles à Oxz et en préciser les signes.

(c) Montrer qu'en régime transitoire, apparaît le champ électrique transverse $\vec{E}_H = E_H \vec{e_y}$ (de Hall) qui s'oppose à l'hémorragie des charges.
L'exprimer en régime permanent. En déduire la différence de potentiel u_{12} existant entre les faces (1) et (2) en régime permanent.

(d) On donne $u = 1$V, $l = 1$cm, $a = b = 5$mm, $u_{12} = -0.2\mu$V. Calculer le champ magnétique. Adjoint à un système de capture de $| u_{12} |$, à quoi sert ce dispositif ?

Données :
conductivité du cuivre : $\sigma = 5.80 \times 10^7$S·m^{-1} ; conductivité du silicium : 2.52×10^{-4}S·m^{-1}
nombre de masse du cuivre : $A = 64$; nombre de masse du silicium : $A' = 42$
masse atomique du cuivre : 63.546g·mol^{-1} ; masse atomique du silicium : 42.02g·mol^{-1}
masse volumique du cuivre : $\rho = 8900$kg·m^{-3} ; masse volumique du silicium : $\rho' = 2330$kg·m^{-3}
numéro atomique du cuivre : $Z = 29$; numéro atomique du silicium : $Z = 14$
mobilité des électrons dans le silicium : $\mu_e = 1500$cm^2·V^{-1}·s^{-1}

EXERCICE 7

Approche probabiliste

On peut tenter de rendre compte de certains aspects du phénomène de conduction électrique dans les métaux dans le cadre du modèle suivant : La conduction est assurée par des électrons mobiles, de masse m, de charge $(-e)$, au nombre de n par unité de volume. Ces électrons subissent des chocs sur les impuretés ou les imperfections du réseau cristallin du matériau. Ces chocs interviennent de manière complètement aléatoire, chaque électron ayant la probabilité de la forme $dP = dt/\tau$ de subir un choc pendant un intervalle de temps dt, indépendamment des chocs antérieurs. Les chocs désorientent complètement les vitesses électroniques : après un choc, un électron se trouve avec une vitesse $\overrightarrow{V}_0$ d'orientation et module quelconques. Entre deux chocs, le mouvement de l'électron est celui d'une particule libre.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un électron ne subisse pas de choc entre les instants t et $t + dt$? soit $\pi(t)$ la probabilité pour qu'un électron ne subisse pas de choc entre un instant origine ($t = 0$) et l'instant t ; relier simplement $\pi(t + dt)$ à $\pi(t)$. En déduire l'expression de $\pi(t)$.
2. Déterminer l'expression de la durée moyenne de l'intervalle de temps séparant deux chocs, soit t_1, en prenant comme origine dans l'expression de $\pi(t)$ celui d'un choc.
3. Les électrons sont soumis à un champ électrique uniforme et constant $\overrightarrow{E}$. Calculer la valeur moyenne de leur vitesse à un instant quelconque (on remarquera qu'à chaque instant la vitesse de l'électron est la somme de la vitesse aléatoire $\overrightarrow{V}_0$ et de la vitesse due au champ $\overrightarrow{E}$). En déduire la densité de courant $\overrightarrow{j}$ qui apparaît, en régime permanent, au sein du matériau. Donner l'expression de la conductivité γ de ce matériau ?
4. L'accroissement d'énergie cinétique ΔE_c dû au champ $\overrightarrow{E}$ entre deux chocs successifs est dissipé sous forme de chaleur lors des chocs ultérieurs.
   (a) Exprimer la valeur moyenne $\langle \Delta E_c \rangle$ en fonction de e, m, τ et $||E||$.
   (b) En déduire l'expression de la puissance dissipée par unité de volume du conducteur, en fonction de γ et E.

EXERCICE 8

Disque de Corbino

On considère un anneau cylindrique de métal, d'axe (Oz) , de conductivité γ , de rayon interne R_1, de rayon externe R_2 et de hauteur h .

1. Sa face interne est mise en contact avec une électrode de potentiel V_1 et sa face externe est en contact avec une électrode de potentiel V_2. Déterminer la résistance électrique de l'anneau.
2. On ajoute un champ magnétique externe uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e}_z$. Déterminer la nouvelle résistance du disque.