DS3

Le sujet comporte trois extraits de sujets de concours

- ✘ **Physique C ENS PC 2022 - Partie I**
- ✘ **Physique 1 CCMP MP 2009 - Partie I**
  - — Complément Q6 :
    On admet que l'équation de la trajectoire, en tenant compte des conditions précisées précédemment ($r(t = 0) = r_{min}; \phi(t = 0) = 0$) est, en coordonnées polaires :
    $$r = \frac{p}{1 + e\cos(\phi)}$$
    On montrera en revanche que :
    $$p = a(1 - e^2)$$
- ✘ **Physique 1 CCMP MP 2007 - Partie I**
  - — Complément Q10 et Q11 : on rappelle que le moment d'un couple, c'est à dire une action mécanique dont la résultante est nulle, est indépendant du point où on le calcule.
  - — Complément Q12 : On admettra l'équation différentielle vérifiée par θ :
    $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{3GM_T}{r_0^3}\sin(\theta)\cos(\theta)$$
    (A ne pas démontrer)
  - — Complément Q16 : On admettra que l'énergie cinétique totale du satellite est :
    $$E_c = mr_0^2\Omega^2 + ml^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$
    (A ne pas démontrer)

Barème approximatif : 40 - 40 - 60

ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2022

JEUDI 28 AVRIL 2022
08h00 - 14h00

FILIERE PC - Epreuve n° 7

PHYSIQUE C (U)

Durée : 6 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Début de l'épreuve

Ce sujet comporte 11 pages numérotées de 1 à 11.

Effets géométriques et topologiques en physique

À la fin du XXe siècle est apparue une réinterprétation en termes géométriques et topologiques de résultats physiques bien connus. Cette nouvelle vision a permis de regrouper des phénomènes très différents sous un même cadre théorique élégant, mais a aussi donné lieu à des prédictions très intéressantes.

Ce sujet a pour objectif d'introduire les problématiques de géométrie et de topologie à travers des exemples tirés de différents domaines de la physique : mécanique (partie I), optique (partie II), mécanique quantique (partie III), électromagnétisme (partie IV) et mécanique des fluides (partie V). Ces parties sont essentiellement indépendantes. Seules les questions de fin de partie nécessitent d'avoir traité les parties précédentes. Après un changement de partie, une notation utilisée dans les parties précédentes est libre d'être réaffectée à une autre grandeur physique.

Données numériques

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4 \quad \sqrt{6} \approx 2{,}4 \quad \sqrt{7} \approx 2{,}6 \quad \sqrt{11} \approx 3{,}3 \quad \sqrt{14} \approx 3{,}7$$

Masse volumique de l'eau	$\rho_{\text{eau}} = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg·m}^{-3}$
Masse volumique de l'air	$\rho_{\text{air}} = 1{,}3\,\text{kg·m}^{-3}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6{,}4 \times 10^3\,\text{km}$
Masse de la Terre	$M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$

Formulaire

- Éléments d'analyse vectorielle en coordonnées sphériques pour un champ scalaire f et un champ de vecteurs $\vec{A}$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$$

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}$$

- Pour tout champ de vecteurs $\vec{A}$, on a $\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = 0$.
- Symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, et 0 sinon.
- Règle de la chaîne pour la dérivation d'une fonction f de n variables A_i, dont chacune dépend du temps :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f\big(\vec{A}(t)\big)\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(A_1(t), A_2(t), \ldots)) = \sum_{1\leq i\leq n}\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial A_i} = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{\text{grad}} f$$

- Développement par ligne du déterminant d'une matrice 3×3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

1 Pendule de Foucault

Le pendule de Foucault est un instrument historique qui a contribué à la mise en évidence de la rotation de la Terre sur elle-même. On le modélise par un fil de longueur $\ell = 67\,\mathrm{m}$ de masse négligeable, au bout duquel est accrochée une masse $m = 36\,\mathrm{kg}$.

La Terre est supposée en mouvement de rotation uniforme à la vitesse de rotation angulaire Ω. On néglige toutes les forces de frottement dans cette partie.

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base fixe du référentiel géocentrique considéré galiléen (cf. figure 1). La position de la masse m est donnée par ses coordonnées dans le repère $(Oxyz)$ de base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ fixe dans le référentiel terrestre. Cette base est dite *locale*. On note α l'angle entre le pendule et l'axe vertical dirigé par le vecteur $\vec{e_z}$ (cf. figure 1(b)). On note $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ la base mobile suivant le mouvement de la masse dans le référentiel terrestre.

1.1 Mouvement du pendule sans effet de la force d'inertie de Coriolis

Dans un premier temps, on néglige la force d'inertie de Coriolis.

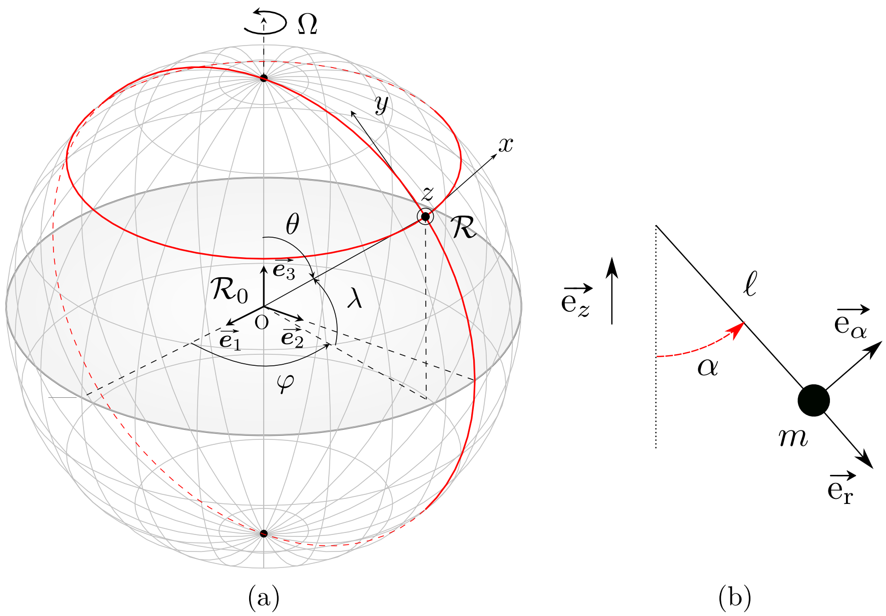


FIGURE 1 – (a) Définitions des repères liés aux référentiels géocentrique et terrestre. (b) Définition de l'angle α et de la base mobile.

1. Dans toute la suite on négligera la force d'inertie d'entraînement, et on considérera que le poids est parallèle à l'axe Oz. Justifier ces approximations par une analyse en ordres de grandeur.
2. Écrire l'équation vectorielle du mouvement de la masse m, puis la projeter dans la base mobile $(\vec{e_r}, \vec{e_\alpha})$ définie sur la Fig. 1(b) (on supposera son mouvement plan).
3. Dans quelle limite le pendule simple peut-il être approximé par un oscillateur harmonique ? On se placera dans cette limite par la suite. Exprimer sa pulsation propre ω_0. Déterminer la période d'oscillation du pendule et l'estimer numériquement pour le pendule de Foucault.
4. Justifier que dans l'approximation précédente le mouvement de la masse est horizontal au premier ordre en α.

1.2 Effet de la force d'inertie de Coriolis

On s'intéresse maintenant à la modification du mouvement engendrée par la présence de la force d'inertie de Coriolis. Paris est située à une latitude $\lambda = 49°$ comme définie sur la figure 1(a). On considérera que le mouvement de la masse est plan dans le repère local et on négligera vitesse et accélération selon l'axe Oz. On admettra que l'effet des forces autres que la force de Coriolis se met sous la forme $\vec{F} = -m\omega_0^2 x\, \vec{e_x} - m\omega_0^2 y\, \vec{e_y}$.

5. Comparer numériquement les pulsations Ω et ω_0.

6. Décomposer le vecteur $\vec{e_3}$ dans la base locale et en déduire que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2\, x = 2\tilde{\Omega}\, \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2\, y = -2\tilde{\Omega}\, \dot{x}. \end{cases} \tag{1}$$

Exprimer la constante $\tilde{\Omega}$.

7. Pour résoudre ce système, on pose la variable complexe $\underline{u} = x + iy$. Déterminer l'équation vérifiée par $\underline{u}$. Résoudre cette équation et donner l'expression de $\underline{u}(t)$ en fonction de deux inconnues $\underline{A}$ et $\underline{B}$.

8. On prend $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ et une vitesse initiale nulle. Déterminer l'expression de $\underline{u}$.

9. En utilisant le résultat de la question 5, simplifier l'expression de $\underline{u}(t)$. Interpréter l'expression obtenue.

10. Déterminer l'expression de l'angle ψ duquel a tourné le plan d'oscillation du pendule en 24 h à Paris dans le référentiel terrestre. L'estimer numériquement en degrés. Y a-t-il des points sur le globe où le plan d'oscillation du pendule reviendrait à sa position initiale après 24 h ?

11. Justifier brièvement les valeurs inhabituelles choisies par Foucault pour la masse m et la longueur ℓ.

12. Sur la figure 2, on voit le professeur Tournesol utiliser son pendule pour se repérer et se diriger sur Terre. Cela vous semble-t-il possible ? Justifier votre réponse.

FIGURE 2 – Le professeur Tournesol et son pendule.

Il est possible de reformuler ce résultat d'un point de vue géométrique : considérons la position $\vec{R}$ du point d'attache du pendule dans le référentiel géocentrique. La rotation de la Terre sur elle-même conduit $\vec{R}$ à suivre une courbe fermée γ sur le globe. Mais bien que $\vec{R}$ soit revenu à sa valeur initiale, le système dans son ensemble n'est pas revenu à son état initial : le plan d'oscillation du pendule n'est plus le même, il a tourné à cause de la présence de la force de Coriolis. On appelle ce phénomène une *non-holonomie*.

Soit γ la trajectoire fermée suivie par un point de l'hémisphère nord lors de la rotation de la planète. On définit $h(\gamma)$ comme le rapport de la surface entourée par le contour γ sur la sphère terrestre et la surface totale de la sphère.

13. Faire un schéma de la situation en précisant le chemin γ. Exprimer $h(\gamma)$ sous la forme d'une intégrale double et la calculer en fonction de λ. Mettre le résultat sous la forme $h(\gamma) = \frac{\chi}{4\pi}$. Comparer la valeur trouvée pour χ au résultat de la question 10.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT–ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2009

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve: 3 heures)
L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE–EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I — MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

À PROPOS DE HEINRICH OLBERS

L'astronome allemand HEINRICH W. M. OLBERS (1758—1840) découvrit les astéroïdes Pallas et Vesta en 1802 et en 1807 ; en 1831, il réalisa la première observation de la comète qui porte son nom (13P/Olbers). Les caractéristiques orbitales de cette comète ont été déterminées initialement par C. F. GAUSS et F. BESSEL. Elle a été observée pour la dernière fois lors de son passage au périhélie (distance minimale au Soleil) le 10 janvier 1956. Certaines propriétés de cette comète sont examinées dans la Partie I.

OLBERS a aussi étudié le paradoxe qui porte aujourd'hui son nom : si l'univers contient une multitude d'étoiles distribuées à peu près régulièrement, un observateur terrestre qui observe le ciel dans une direction arbitraire devrait toujours voir au moins une étoile, aussi lointaine soit-elle ; tout point du ciel devrait donc sembler brillant, de jour comme de nuit. Certains aspects de cette affirmation paradoxale seront discutés dans la partie II.

Les vecteurs sont notés en caractères gras : $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ et leurs normes en italique $\|\mathbf{v}\| = v$, $\|\mathbf{F}\| = F$. Dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) et dans la base orthonormée $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$, on rappelle que $\mathbf{grad}\, f(r, \theta, \varphi) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi$. On note $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ la dérivée d'une fonction $x(t)$.

I. — La comète 13P/Olbers

Les parties I.A et I.B de ce problème peuvent être abordées indépendamment.

I.A. — Mouvements cométaires

On étudie dans cette partie le mouvement d'un corps ponctuel M de masse m, soumis à l'action d'un centre attracteur fixe à l'origine O des coordonnées d'un référentiel galiléen $\mathscr{R}$. On posera $r = \|\mathbf{OM}\|$. L'action de ce centre attracteur est décrite par une force unique $\mathbf{F} = -m \cdot \mathbf{grad}\, U(r)$, où U est une fonction supposée connue. On note aussi $\mathbf{v}$ la vitesse de M dans $\mathscr{R}$, $\mathbf{L}_O = m\,\mathbf{OM} \wedge \mathbf{v}$, $L = \|\mathbf{L}_O\| > 0$ et $C = L/m$

❏ **1 —** Montrer que le mouvement de M est plan.

On choisira d'appeler (Oxy) ce plan, orienté par la convention $\mathbf{L}_O = L\mathbf{e}_z$; l'étude du mouvement de M dans (Oxy) s'effectuera en coordonnées polaires (r, φ).

❏ **2 —** On note $E = m\varepsilon$ l'énergie mécanique de M. Exprimer ε en fonction de r, C, $\dot{r}$ et $U(r)$.

Le point M est en fait le centre d'une comète sphérique et homogène se déplaçant dans le champ de gravitation du Soleil (de masse $M_\odot$). Pour tout le reste de la partie I.A, on adopte l'expression $U(r) = -K/r$ où K est une constante, et l'on se place dans le référentiel supposée galiléen dans lequel le Soleil est fixe, homogène et sphérique. De plus, on néglige l'influence des tous les autres corps du système solaire.

❏ **3 —** Exprimer K en fonction de la constante de la gravitation universelle $\mathscr{G}$ et de la masse du Soleil $M_\odot$.

❏ **4 —** À quelle condition sur ε le mouvement de M vérifie-t-il $r_{\text{min}} \leqslant r \leqslant r_{\text{max}} < \infty$ avec $r_{\text{min}} \neq r_{\text{max}}$? Les constantes r_{min} et r_{max} sont respectivement appelées périhélie et aphélie de la trajectoire.

On suppose désormais que la condition de la question 4 est vérifiée. L'origine des instants ($t = 0$) et des angles polaires ($\varphi = 0$) sera choisie de sorte que $r(t = 0) = r_{\text{min}}$, $\varphi(t = 0) = 0$.

❏ **5 —** Exprimer ε et C en fonction de K, r_{min} et r_{max} puis en fonction de K, $a = \dfrac{r_{\text{max}} + r_{\text{min}}}{2}$ et $p = \dfrac{r_{\text{max}} r_{\text{min}}}{a}$.

❏ **6 —** Quelle est, sans démonstration, la nature de la trajectoire de M ? Indiquer en justifiant votre réponse, la signification physique des paramètres a, p et $e = \dfrac{r_{\text{max}} - r_{\text{min}}}{r_{\text{max}} + r_{\text{min}}}$? Représenter la trajectoire de M en précisant les points et dimensions remarquables.

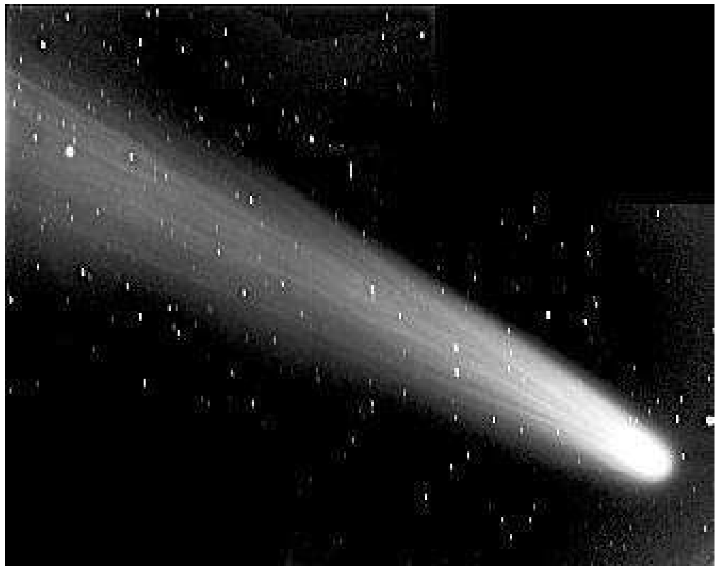
❏ **7 —** On étudie la partie de la trajectoire pour laquelle $0 < \varphi < \pi$. Quel est alors le signe de $\dot{r}$? Exprimer $\dot{r}$ en fonction de ε, K, C et r. Montrer que la durée τ de parcours de r_{min} à $r(\varphi)$ le long de cette trajectoire s'écrit

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\text{min}}}^{r(\varphi)} \frac{r}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}} \mathrm{d}r$$

❏ **8 —** On effectue le changement de variable $r = a(1 - e\cos\xi)$. L'angle ξ est appelé *anomalie excentrique*. Exprimer la durée τ du trajet du mobile M depuis l'instant initial jusqu'à sa position actuelle repérée par ξ, en fonction de ξ, e, a et K puis de ξ, e et de la période T du mouvement de M. Quel est le nom de la relation qui lie T, K et a ?

On considère que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est circulaire, de rayon $a_0 = 1$ UA (unité astronomique) et de période $T_0 = 1$ année $= 365{,}25$ jours. Les caractéristiques orbitales, assez stables, de la comète 13P/Olbers sont les suivantes : excentricité $e = 0{,}930$; distance au Soleil au périhélie $r_{\text{min}} = 1{,}18$ UA. On admettra que les relations $\tau(\xi)$ et $r(\xi)$ se généralisent à tout point de la trajectoire de cette comète.

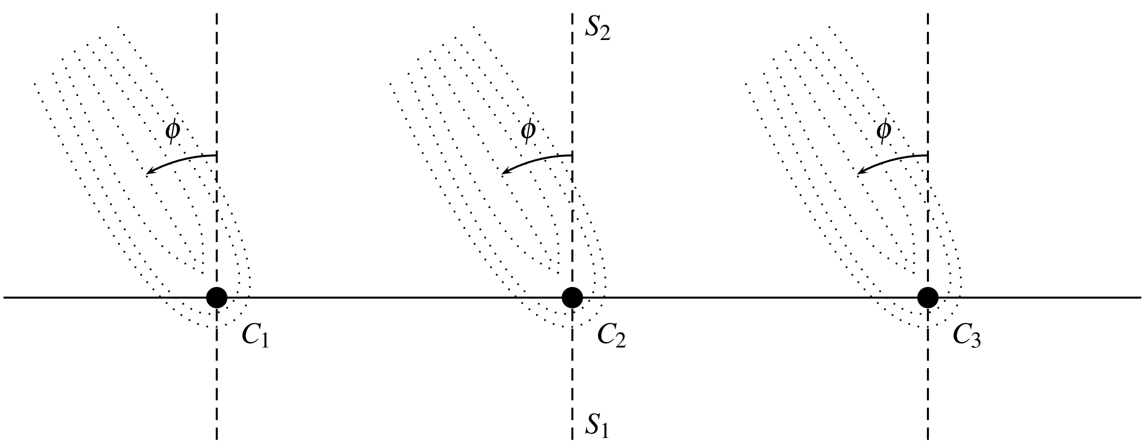
❏ **9 —** À quelle date la comète reviendra-t-elle pour la prochaine fois au périhélie ? À quelle date la comète se trouvera-t-elle la prochaine fois à la distance $r = 26{,}06$ UA du Soleil ?



Comète Ikeya-Zhang photographiée en 2002 à l'observatoire de Haute-Provence.

I.B. — La queue de la comète

En 1811, OLBERS proposa pour la première fois une théorie quantitative pour expliquer la formation de la queue des comètes, en imaginant que les particules qui la composent sont soumises à une force répulsive d'origine électrique variant comme le carré de l'inverse de la distance au Soleil. On connaît aujourd'hui le mécanisme de formation de la queue de la comète, en particulier si elle est formée de poussières solides.



Les poussières sont entraînées par un flux de particules (le vent solaire) émises par le Soleil et se déplaçant à une vitesse de l'ordre de $400\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. On étudie pour simplifier (cf. ci-dessus) une comète se déplaçant en ligne droite à la vitesse de $30\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$; la droite en traits pleins désigne la trajectoire de la comète, et les traits pointillés la direction du vent solaire.

❏ **10 —** En justifiant votre réponse, indiquer si le Soleil est disposé du côté S_1 ou du côté S_2 sur la figure ci-dessus.

❏ **11 —** En justifiant tout autant la réponse et sur cette même figure, la comète se déplace-t-elle dans le sens $C_1 \to C_2 \to C_3$ ou dans le sens $C_3 \to C_2 \to C_1$? Calculer l'angle ϕ entre la direction Soleil–comète et la direction moyenne de la queue de la comète.

FIN DE LA PARTIE I

A 2007 PHYS. I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2007

PREMIERE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I –MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.

• Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

• Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

• Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : vecteur $\rightarrow$ $\vec{\mathbf{A}}$ (gras) ; norme du vecteur $\vec{\mathbf{V}} \rightarrow V$ (italique) ; vecteur unitaire $\rightarrow$ $\hat{\mathbf{a}}$.

Dans toute l'épreuve, *exprimer* signifie « donner l'expression littérale » et *calculer* signifie « donner la valeur numérique ».

SATELLITES DE TÉLÉCOMMUNICATION

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de rayon R_T et de centre O, immobile dans l'espace, sans rotation propre.

À la fin de cet énoncé (page 7), sont regroupées des valeurs de grandeurs physiques et un formulaire utilisables dans cette épreuve.

I SATELLITES SUR ORBITE CIRCULAIRE

❑ **1** – Un satellite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O, à une altitude h de l'ordre de quelques centaines de kilomètres (orbite basse). Établir la relation entre la période de révolution T et h. Exprimer de même la relation entre la vitesse $v = \|\vec{\mathbf{v}}\|$ et h.

❑ **2** – Soient E_c et E_p l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre ; établir le « théorème du viriel » : $2E_c + E_p = 0$.

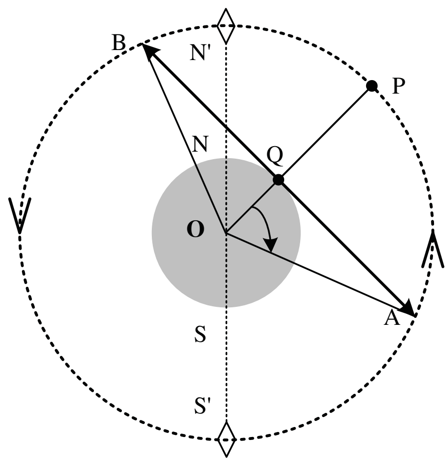


Fig. 1 : Satellite P, point Q et ligne des horizons AB. Le plan orbital représenté est dit polaire (la ligne des pôles est N'SNS'). L'angle est dit ancillaire.

❑ **3** – À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire. Pour un observateur situé en Q, la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la Fig. 1) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer τ en fonction de h, G, M_T et R_T.

Calculer τ pour $h = 8\times10^5$ m.

❑ **4** – Calculer T/τ. Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre) un ensemble de satellites, identiques, appelé « train de satellites ». Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant.
Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est à dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?

❑ **5** – Dans cette question, on prend en compte la rotation de la Terre. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train de la question **4** ?

❑ **6** – La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $\vec{\mathbf{f}}_a$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\vec{\mathbf{f}}_a = -\alpha M_S\, v\vec{\mathbf{v}}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α. Écrire le théorème de l'énergie cinétique en supposant que le théorème du viriel établi à la question **2** reste applicable en présence de $\vec{\mathbf{f}}_a$. Établir l'équation différentielle vérifiée par h.

❑ **7** – Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution ; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas s'étonner de la petitesse extrême du résultat !). Calculer, avec la même approximation, ce qu'il advient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte. Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?

❑ **8** – En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitudes, α varie selon la loi $\alpha(h) = \dfrac{\gamma}{h^{\beta}}$, où γ et β sont positifs. Le même satellite que celui de la question **7** (perdant 1 mètre par révolution pour $h \approx 800\ \text{km}$) perd, à l'altitude de 400 km, 2 mètres par révolution. Calculer γ et β.

II STABILISATION DE L'ATTITUDE D'UN SATELLITE SUR SON ORBITE PAR GRADIENT DE GRAVITÉ

La méthode de stabilisation d'attitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVII$^{\text{ème}}$, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

Modèle : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m = \dfrac{1}{2} M_S$ reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur $2l$. Le barycentre S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T + h$ ($l << r_0$). Le référentiel géocentrique (R) lié au repère (O*xyz*) est supposé galiléen. Le plan orbital est O*xy*. Le référentiel (R') défini par le repère (O*x'y'z*) lié au satellite tourne autour de la Terre avec une vitesse angulaire Ω (Fig. 2). Les points M_1 et M_2 sont dans le plan orbital : $\overrightarrow{\mathbf{OS}} = r_0\hat{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OM}}_1 = r_1\hat{\mathbf{u}}_1$ et $\overrightarrow{\mathbf{OM}}_2 = r_2\hat{\mathbf{u}}_2$, où $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{u}}_1$ et $\hat{\mathbf{u}}_2$ sont unitaires. On appelle θ l'angle de M_1M_2 avec l'axe O*x'* de (R'). On cherche à déterminer les éventuelles positions d'équilibre du satellite dans le référentiel (R') et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

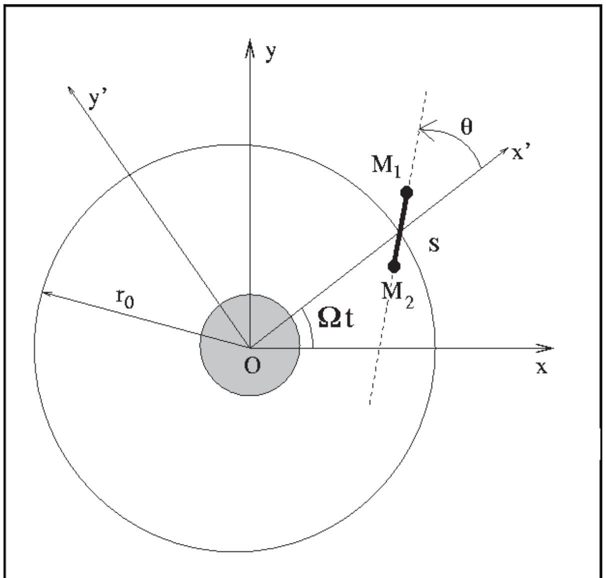


Fig. 2 : Le satellite, son référentiel R' (O*x'y'*) et le référentiel R lié à la Terre (O*xy*).

Étude dynamique, dans le référentiel mobile

❑ **9** – Exprimer les forces gravitationnelles $\vec{\mathbf{F}}_1$ et $\vec{\mathbf{F}}_2$ qui agissent sur M_1 et M_2.

❑ **10** – Exprimer dans (R') les forces d'inertie d'entraînement qui agissent sur M_1 et M_2, en fonction de m, Ω, $\vec{\mathbf{r}}_1$ et $\vec{\mathbf{r}}_2$. Exprimer dans (R') les forces d'inertie de Coriolis qui agissent sur M_1 et M_2, en fonction de m, Ω, $\overrightarrow{\mathbf{SM}}_1$, $\overrightarrow{\mathbf{SM}}_2$ et $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$.

❑ **11** – Montrer que dans (R') le moment des forces d'inertie de Coriolis en S est nul. Établir que dans (R') le moment résultant calculé en S des actions extérieures a pour amplitude, pour $l << r_0$, $\Gamma_S = 6 G m M_T \dfrac{l^2}{r_0^3} \sin(\theta)\cos(\theta)$. Préciser la direction et le sens de ce moment cinétique.

❑ **12** – Appliquer le théorème du moment cinétique dans (R'). Établir l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les valeurs de θ qui correspondent à une position d'équilibre dans (R').

❑ **13** – Montrer que θ = 0 est une position d'équilibre stable. Existe-t-il une position d'équilibre instable ? Quelle est la forme de l'équation différentielle pour les petits mouvements autour de cette position d'équilibre instable ?

❑ **14** – À partir de la position $\theta = 0$, le satellite subit une petite perturbation qui l'écarte d'un angle θ_o. Calculer la période des oscillations au voisinage de la position d'équilibre, pour un satellite d'altitude h = 800 km. Comparer cette période avec la période du satellite autour de la Terre.

Étude énergétique, dans le référentiel géocentrique galiléen

❑ **15** – Exprimer le potentiel de gravitation, en fonction des données du problème et en procédant aux approximations qui s'imposent ($l << r_0$).

❑ **16** – Considérer l'énergie mécanique du satellite et en déduire la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.