

Correction exercice 30 : Filtre de Lyot

On considère que (Ox) est l'axe rapide :

$$V_x > V_y \Rightarrow n_x < n_y \Rightarrow \Delta n = n_y - n_x > 0$$

On a d'après l'énoncé le schéma suivant :

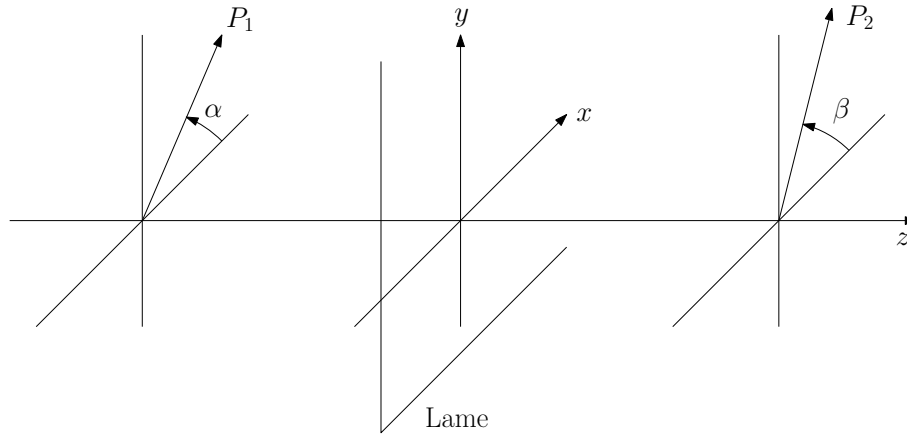


Figure 1 – Dispositif relatif à l'exercice

1. ✘ Champ à la sortie de P_1 :

$$\vec{E}_{P_1} = E_0 \exp^{j\omega t} \vec{u}_1$$

Avec :

$$\vec{u}_1 = \cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y$$

- ✘ Champ à la sortie de la lame :

$$\vec{E}_L \begin{cases} \cos \alpha \exp^{j(\omega t - k_0 n_x e)} \\ \sin \alpha \exp^{j(\omega t - k_0 n_y e)} \end{cases}$$

$$\vec{E}_L \begin{cases} \cos \alpha \exp^{j(\omega t')} \\ \sin \alpha \exp^{j(\omega t' - \phi)} \end{cases}$$

où :

$$\omega t' = \omega t - k_0 n_x e$$

$$\phi = k_0 \Delta n e = 2\pi \sigma \Delta n e$$

- ✘ Champ à la sortie de P_2 :

$$\vec{E}_{P_2} = E_2 \vec{u}_2$$

Avec :

$$\vec{u}_2 = \cos \beta \vec{u}_x + \sin \beta \vec{u}_y$$

et :

$$E_2 = \vec{E}_L \cdot \vec{u}_2 = E_0 \left(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \exp^{-j\phi} \right) \exp^{j\omega t'}$$

On peut alors définir la fonction de transfert complexe en amplitude du champ électrique :

$$\underline{t} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \exp^{-j\phi}$$

2. ✘ Intensité incidente :

$$I_0 = k E_0^2$$

✘ Intensité sortante :

$$I_{P_2} = k|\underline{E}_{P_2}|^2$$

✘ Fonction de transfert :

$$T = \frac{I_{P_2}}{I_0} = |\underline{t}|^2$$

Après calculs, on trouve :

$$T = \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \cos \phi$$

Avec :

$$T(\phi = 2k\pi) = (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta))^2$$

$$T(\phi = \pi + 2k\pi) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2 = (\cos(\alpha + \beta))^2$$

✘ Les variations de T sont les plus importantes quand l'écart entre T_{max} et T_{min} est maximal c'est à dire quand l'un vaut 1 et l'autre vaut zéro.

✘ Cas où :

$$T_{max} = T(\phi = 2k\pi) = (\cos(\alpha - \beta))^2 = 1 \text{ et } T_{min} = T(\phi = \pi + 2k\pi) = (\cos(\alpha + \beta))^2 = 0$$

• $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha - \beta) = 1$ et $\cos(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ($P_1 \parallel P_2$)

• $\alpha = \beta = -\frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha - \beta) = 1$ et $\cos(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$ ($P_1 \parallel P_2$)

• $\alpha = \frac{3\pi}{4}; \beta = -\frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha - \beta) = -1$ et $\cos(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ($P_1 \parallel P_2$)

• $\alpha = \frac{\pi}{4}; \beta = -\frac{3\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha - \beta) = -1$ et $\cos(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$ ($P_1 \parallel P_2$)

✘ Cas où :

$$T_{max} = T(\phi = \pi + 2k\pi) = (\cos(\alpha + \beta))^2 = 1 \text{ et } T_{min} = T(\phi = 2k\pi) = (\cos(\alpha - \beta))^2 = 0$$

• $\alpha = -\beta = \frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha + \beta) = 1$ et $\cos(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ ($P_1 \perp P_2$)

• $\alpha = -\beta = -\frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha + \beta) = 1$ et $\cos(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$ ($P_1 \perp P_2$)

• $\alpha = \frac{3\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha + \beta) = -1$ et $\cos(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ ($P_1 \perp P_2$)

• $\alpha = \frac{\pi}{4}; \beta = \frac{3\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha + \beta) = -1$ et $\cos(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$ ($P_1 \perp P_2$)

✘ Conclusion : T est maximal quand P_1 et P_2 sont soit parallèles soit perpendiculaires entre eux et sont à 45° des lignes neutres de la lame.

✘ Expression simplifiée de T quand les deux polariseurs sont parallèles et à 45° des axes de la lame :

$$T = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi) = \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

✘ Expression simplifiée de T quand les deux polariseurs sont perpendiculaires et à 45° des axes de la lame :

$$T = \frac{1}{2}(1 - \cos \phi) = \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

3. Les cannelures correspondent à $T = 0$, en se plaçant dans les deux cas précédents, on obtient :

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont parallèles et à 45° des axes de la lame :

$$T = \frac{1}{2} (1 + \cos \phi) = \cos^2 \frac{\phi}{2} = 0 \Rightarrow \phi = \pi + 2p\pi \Rightarrow \sigma_p = \frac{p}{\Delta ne}$$

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont perpendiculaires et à 45° des axes de la lame :

$$T = \frac{1}{2} (1 - \cos \phi) = \sin^2 \frac{\phi}{2} = 0 \Rightarrow \phi = 2p\pi \Rightarrow \sigma_p = \frac{p + \frac{1}{2}}{\Delta ne}$$

On définit la largeur d'une cannelure en cherchant σ telle que :

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont parallèles et à 45° des axes de la lame :

$$\cos^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\phi = \pi \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{1}{2\Delta ne}$$

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont perpendiculaires et à 45° des axes de la lame :

$$\sin^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\phi = \pi \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{1}{2\Delta ne}$$

Ainsi, dans les deux cas, la largeur d'une cannelure est :

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2\Delta ne}$$

Ainsi, lorsque Δne augmente, la largeur d'une cannelure diminue.

Le nombre de cannelures est déterminé à partir de la largeur du spectre de la lumière blanche :

$$\sigma_R < \sigma < \sigma_V$$

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont parallèles et à 45° des axes de la lame :

$$\sigma_p = \frac{p}{\Delta ne} \Rightarrow \sigma_R < \frac{p}{\Delta ne} < \sigma_V \Rightarrow \Delta ne \sigma_R < p < \Delta ne \sigma_V \Rightarrow N = \Delta p = (\sigma_V - \sigma_R) \Delta ne$$

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont perpendiculaires et à 45° des axes de la lame :

$$\sigma_p = \frac{p + \frac{1}{2}}{\Delta ne} \Rightarrow \sigma_R < \frac{p + \frac{1}{2}}{\Delta ne} < \sigma_V \Rightarrow \Delta ne \sigma_R - \frac{1}{2} < p < \Delta ne \sigma_V - \frac{1}{2} \Rightarrow N = \Delta p = (\sigma_V - \sigma_R) \Delta ne$$

Ainsi, dans les deux cas, le nombre de cannelures observées est :

$$N = \Delta\sigma \Delta ne$$

Ainsi, lorsque Δne augmente, le nombre de cannelures augmente.

4. ✘ Cas où il y a deux systèmes $\{P_i; L_i; P_{i+1}\}$:

$$T_1 = \cos^2 \frac{\phi_1}{2} \text{ avec } \phi_1 = 2\pi\sigma\Delta ne$$

$$T_2 = \cos^2 \frac{\phi_2}{2} \text{ avec } \phi_2 = 2\phi_1$$

D'où :

$$T = \cos^2 \left(\frac{\phi_1}{2} \right) \cos^2 (\phi_1)$$

✘ Cas de N systèmes $\{P_i; L_i; P_{i+1}\}$:

$$T_N = \prod_{i=1}^{i=N} \cos^2\left(\frac{N\phi_1}{2}\right) \approx \left(\frac{\sin\left(\frac{N\phi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_1}{2}\right)}\right)^2$$

✘ Exemples

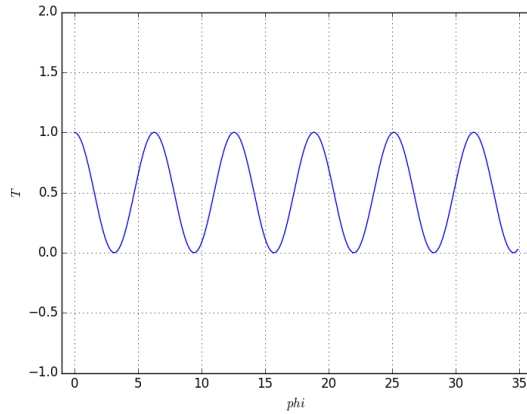


Figure 2 – $T(\phi_1)$ pour $N = 1$

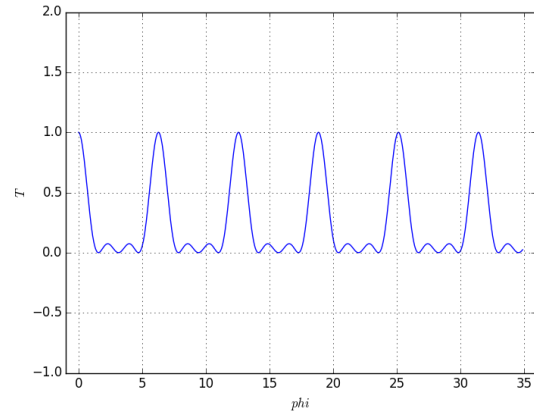


Figure 3 – $T(\phi_1)$ pour $N = 2$

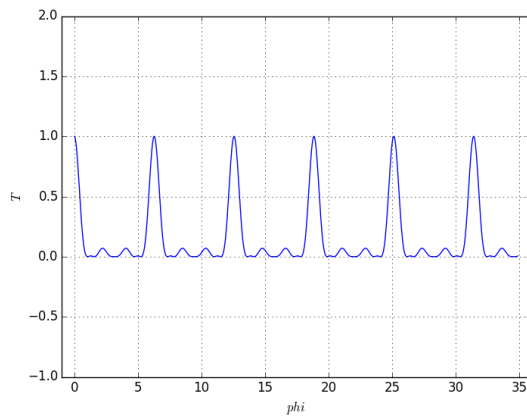


Figure 4 – $T(\phi_1)$ pour $N = 3$

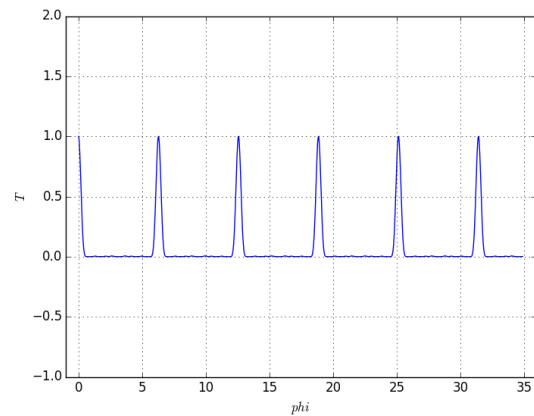


Figure 5 – $T(\phi_1)$ pour $N = 5$