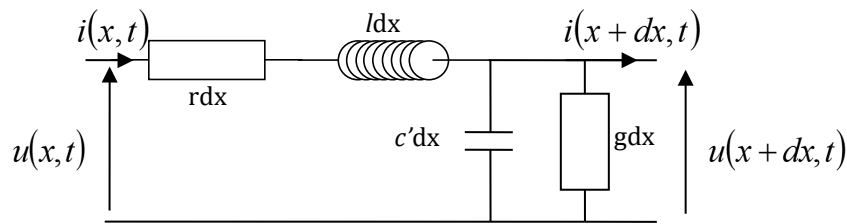


DISPERSION – ABSORPTION

I. EXEMPLE : CABLE COAXIAL AVEC PERTES.

1. MODELISATION DES PERTES.

- Reprenons l'exemple du câble coaxial et considérons les pertes : entre x et $x+dx$, le câble possède une résistance $r.dx$ due au caractère imparfait du conducteur et une conductance $g.dx$ due au caractère imparfait de l'isolant. On obtient donc la modélisation suivante :



2. EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

- La loi des mailles appliquée au circuit ci-dessus donne :

$$u(x, t) = l.dx. \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_{x,t} + r.dx.i(x, t) + u(x + dx, t) \Rightarrow - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x,t} dx = l.dx. \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_{x,t} + r.dx.i(x, t) \quad (1)$$

- La loi des nœuds appliquée au circuit donne :

$$i(x, t) = c'.dx. \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x+dx,t} + g.dx.u(x, t) + i(x + dx, t) \Rightarrow - \left. \frac{\partial i}{\partial x} \right|_{x,t} dx = c'.dx. \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x,t} + g.dx.u(x, t) \quad (2)$$

$\underbrace{\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x+dx,t}}_{\approx \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x,t} \text{ à l'ordre 1}}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (1) \Rightarrow - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|_{x,t} = l. \left. \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_{x,t} + r. \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_{x,t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (2) \Rightarrow - \left. \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \right|_{x,t} = c'. \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|_{x,t} + g. \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x,t} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \text{En injectant (3) et (1) dans (4), on a : } \boxed{\left. \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \right|_{x,t} = l.c'. \left. \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_{x,t} + (r.c' + g.l). \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_{x,t} + r.g.i(x, t)} \quad (5)$$

- De même :

$$\frac{\partial}{\partial x}(1) \Rightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bigg|_{x,t} = l \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \bigg|_{x,t} + r \cdot \frac{\partial i}{\partial x} \bigg|_{x,t} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(2) \Rightarrow -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \bigg|_{x,t} = c' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \bigg|_{x,t} + g \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x,t} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \text{En injectant (7) et (2) dans (6), on obtient : } \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bigg|_{x,t} = l \cdot c' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \bigg|_{x,t} + (r \cdot c' + g \cdot l) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x,t} - r \cdot g \cdot u(x,t)} \quad (8)$$

- Les équations (5) et (8) sont des équations différentielles linéaires du second ordre différant de l'équation de d'Alembert à cause des termes de perte faisant intervenir r et g : en annulant r et g, on retrouve l'équation de d'Alembert.

3. RECHERCHE DE SOLUTIONS SOUS LA FORME D'ONDES PLANES – RELATION DE DISPERSION.

- Les équations étant linéaires, on cherche des solutions sinusoïdales du temps et de la position, la solution générale étant obtenue par superposition de ces solutions particulières.
 $\Rightarrow$ Les solutions cherchées sont appelées ondes pseudo progressives et sont de la forme :

$$\underline{u}(x,t) = \underline{U} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \text{ et } \underline{i}(x,t) = \underline{I} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \text{ avec } \underline{k} \text{ à priori complexe.}$$

Une **onde plane pseudo-progressive monochromatique** s'écrit de façon générale sous forme complexe : $\underline{s}(\vec{r},t) = \underline{S} e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \vec{r})}$ où $\underline{k} = \underline{k}(\omega) \vec{u}$ est à priori complexe ; la dépendance du nombre d'onde $\underline{k}(\omega)$ avec la pulsation ω est donnée par la **relation de dispersion**.

- En injectant $\underline{u}$ dans l'équation (5) ou $\underline{i}$ dans l'équation (8), on obtient :

$$(-jk)^2 = l \cdot c' \cdot (j\omega)^2 + (r \cdot c' + g \cdot l) \cdot (j\omega) + r \cdot g$$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - (r \cdot c' + g \cdot l) \cdot (j\omega) - r \cdot g \quad \text{Relation de dispersion}$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c'}}$ est la célérité dans le cas d'un câble coaxial idéal.

- k étant à priori complexe, on peut écrire : $\underline{k} = k' + jk''$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = k'^2 - k''^2 + 2jk' \cdot k''$$

⇒ Par identification avec la relation de dispersion, on obtient :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - rg & (9) \\ 2k'k'' = -\omega(r.c' + g.l) < 0 & (10) \end{cases}$$

⇒ On peut ainsi déterminer k' et k''

- On peut alors déterminer $\underline{u}(x, t) = \underline{U}e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ et $\underline{i}(x, t) = \underline{I}e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$:

$$\underline{u}(x, t) = \underline{U}.e^{k''.x}e^{j(\omega t - k'.x)} \text{ et } \underline{i}(x, t) = \underline{I}.e^{k''.x}e^{j(\omega t - k'.x)}$$

Dans le cas d'une onde plane progressive, on a $k' > 0$ et donc d'après (10) $k'' < 0$: il y a atténuation au cours de la propagation, le milieu est passif.

Dans le cas d'une onde plane régressive, on a $k' < 0$ et donc d'après (10) $k'' > 0$: il y a atténuation au cours de la propagation, le milieu est passif.

La solution générale d'une équation d'onde linéaire à une dimension peut s'écrire comme la superposition **d'ondes planes pseudo-progressives harmoniques**, dont l'écriture en notation complexe est de la forme :

$$\underline{s}(x, t) = \underline{S}e^{j(\omega t - \underline{k}.x)}$$

Une telle onde est solution de l'équation d'onde si ω et $\underline{k}$ vérifient une **relation de dispersion** que l'on mettra sous la forme : $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$.

La partie réelle $k'(\omega)$ traduit la propagation de l'onde, à la vitesse de phase : $V_\phi = \frac{\omega}{k'(\omega)}$. Si la vitesse de phase dépend de ω , le milieu est **dispersif**.

La partie imaginaire $k''(\omega)$ traduit l'**absorption** de l'onde. Dans le cas $k'(\omega) > 0$, une absorption correspond à $k''(\omega) < 0$.

4. EXEMPLE DE RESOLUTION.

On cherche à exprimer k' et k'' dans des cas particuliers.

a. CONDITION D'HEAVISIDE.

Dans cette condition, on a : $\frac{r}{l} = \frac{g}{c'}$

Partons de la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - (r.c' + g.l).(j\omega) - r.g$$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = l.c'.\omega^2 \left(1 - j \left(\frac{r}{l\omega} + \frac{g}{c'\omega} \right) - \frac{r.g}{l.c'.\omega^2} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = l.c'.\omega^2 \left(1 - j \frac{r}{l\omega} \right) \left(1 - j \frac{g}{c'\omega} \right)$$

$$\Rightarrow \text{En utilisant la condition d'Heaviside, on obtient : } \underline{k}^2 = l.c'.\omega^2 \left(1 - j \frac{r}{l\omega} \right)^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(1 - j \frac{r}{l\omega} \right)^2$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm \left(\frac{\omega}{c} \right) \cdot \left(1 - j \frac{r}{l\omega} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k' = \pm \left(\frac{\omega}{c} \right) \\ k'' = \mp \frac{r}{lc} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } V_\phi = \frac{\omega}{|k'(\omega)|} = c = \text{Cste} \Rightarrow \text{Le milieu est non dispersif.}$$

- Dans le cas d'une onde plane progressive, on a $\begin{cases} k' = \left(\frac{\omega}{c} \right) \\ k'' = -\frac{r}{lc} \end{cases}$: il y a atténuation au cours de la propagation, le

milieu est bien passif.

- Dans le cas d'une onde plane régressive, on a $\begin{cases} k' = -\left(\frac{\omega}{c} \right) \\ k'' = \frac{r}{lc} \end{cases}$: il y a atténuation au cours de la propagation, le

milieu est bien passif.

b. PERTES FAIBLES.

$$\text{On se place dans le cas où : } \begin{cases} r \ll l\omega \\ g \ll c'\omega \end{cases}$$

1^{ERE} METHODE : LA PLUS RAPIDE (EQUIVALENT A TRAVAILLER A L'ORDRE 1 EN $\frac{r}{l\omega}$ ET $\frac{g}{c}\omega$)

Les pertes étant faibles, on a : $k'^2 - k''^2 \approx k'^2$

On modifie alors les équations (9) et (10) :

$$\begin{cases} \underbrace{k'^2 - k''^2}_{\approx k'^2} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - rg \approx \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Rightarrow k' = \pm \frac{\omega}{c} \\ 2k'k'' = -\omega(r.c' + g.l) \Rightarrow k'' = \mp \frac{c}{2}(r.c' + g.l) \end{cases}$$

Soit :
$$\begin{cases} k' = \pm \frac{\omega}{c} \\ k'' = \mp \frac{1}{2c} \left(\frac{r}{l} + \frac{g}{c'} \right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le milieu est absorbant et non dispersif.

2^{EME} METHODE : DEVELOPPEMENT LIMITE EN $\frac{r}{l\omega}$ ET $\frac{g}{c'\omega}$ DE LA RELATION DE DISPERSION.

Partons de : $\underline{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - j \left(\frac{r}{l\omega} + \frac{g}{c'\omega} \right) - \frac{r.g}{l.c'.\omega^2} \right)$

□ Développement à l'ordre 1 :

$$\underline{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - j \left(\frac{r}{l\omega} + \frac{g}{c'\omega} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm \left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot \left(1 - \frac{j}{2} \left(\frac{r}{l\omega} + \frac{g}{c'\omega} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm \left(\frac{\omega}{c}\right) \mp \frac{1}{2c} j \left(\frac{r}{l} + \frac{g}{c'} \right)$$

□ Développement à l'ordre 2 :

$$\underline{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\underbrace{1 - j \left(\frac{r}{l\omega} + \frac{g}{c'\omega} \right) - \frac{r.g}{l.c'.\omega^2}}_{\varepsilon} \right) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (1 + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm \left(\frac{\omega}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right)$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm \left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \left(-j \left(\frac{r}{l\omega} + \frac{g}{c'\omega} \right) - \frac{r.g}{l.c'.\omega^2} \right) - \frac{1}{8} \left(-j \left(\frac{r}{l\omega} + \frac{g}{c'\omega} \right) \right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm \left(\frac{\omega}{c} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\left(\frac{r}{l} + \frac{g}{c'} \right)^2 - \frac{4r \cdot g}{l \cdot c'} \right) - \frac{j}{2} \left(\frac{r}{l\omega} + \frac{g}{c' \omega} \right) \right)$$

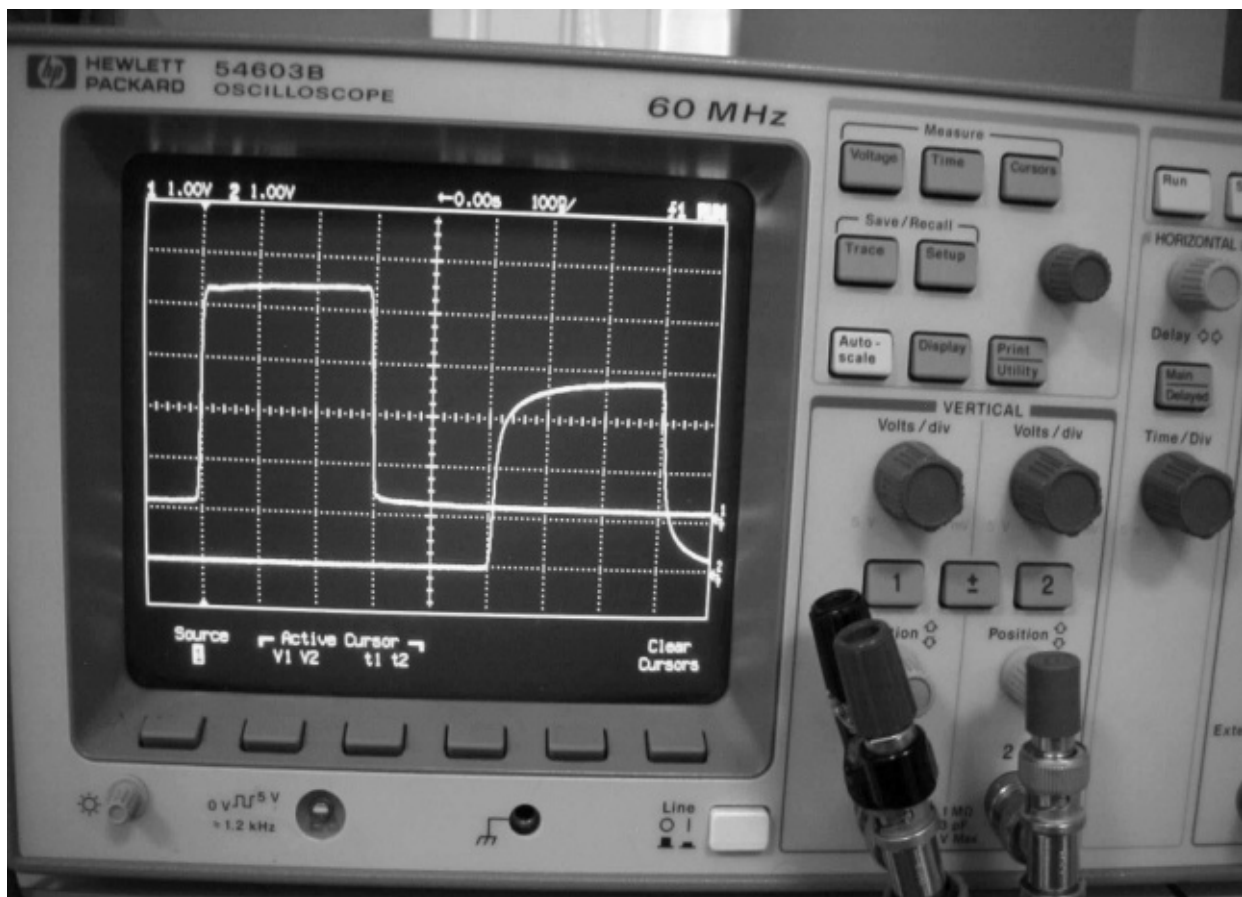
$$\Rightarrow \underline{k} = \pm \left(\frac{\omega}{c} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{l} - \frac{g}{c'} \right)^2 \right) \mp \frac{j}{2c} \left(\frac{r}{l} + \frac{g}{c'} \right)$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} k' = \pm \left(\frac{\omega}{c} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{l} - \frac{g}{c'} \right)^2 \right) \\ k'' = \mp \frac{1}{2c} \left(\frac{r}{l} + \frac{g}{c'} \right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La vitesse de phase vaut : $V_\phi = \frac{\omega}{|k'|} = \frac{c}{\left(1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{l} - \frac{g}{c'} \right)^2 \right)}$, elle dépend de ω : le milieu est dispersif.

□ Conclusion :

A l'ordre 1 un câble coaxial est uniquement absorbant et à l'ordre 2 un câble coaxial est dispersif et absorbant.



Observation d'une impulsion ($t=0$) et après 100m de câble : atténuation et déformation du signal.

II. PAQUET D'ONDE.

1. DEFINITION.

a. RAPPEL : SERIE DE FOURIER/ TRANSFORMEE DE FOURIER.

❑ Soit $f(t)$ une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, alors $f(t)$ est décomposable en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{A}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

❑ Soit $f(x)$ une fonction périodique de période $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, alors $f(x)$ est décomposable en série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{A}_n e^{jnkx} \quad \text{où} \quad \underline{A}_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) e^{-jnkx} dx.$$

❑ Soit $f(t)$ une fonction à priori non périodique, alors $f(t)$ s'écrit sous la forme d'une intégrale de Fourier :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad \text{où} \quad \underline{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

$\Rightarrow \underline{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ est appelée la transformée de Fourier de $f(t)$

$\Rightarrow A(\omega) = |\underline{A}(\omega)|$ nous permet d'étudier le spectre d'amplitude de $f(t)$.

❑ Soit $f(x)$ une fonction à priori non périodique, alors $f(x)$ s'écrit sous la forme d'une intégrale de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(k) \exp(jkx) dk \quad \text{où} \quad \underline{A}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jkx} dx.$$

$\Rightarrow \underline{A}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jkx} dx$ est appelée la transformée de Fourier de $f(x)$

$\Rightarrow A(k) = |\underline{A}(k)|$ nous permet d'étudier le spectre d'amplitude de $f(x)$.

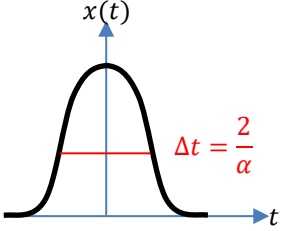
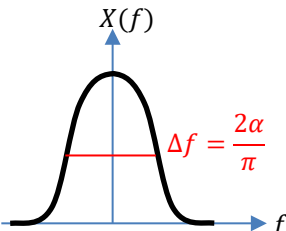
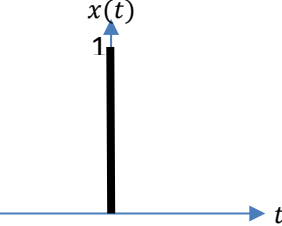
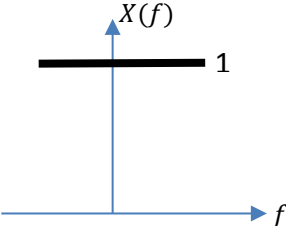
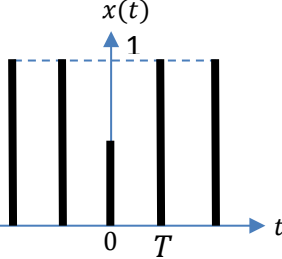
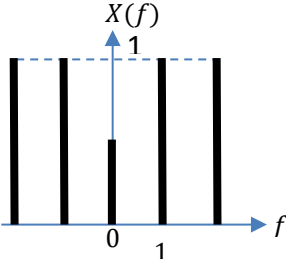
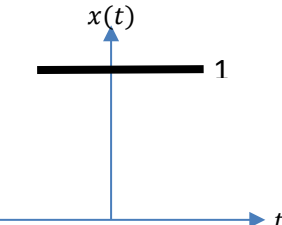
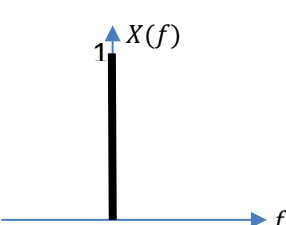
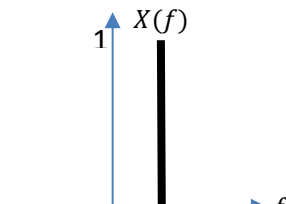
b. EXEMPLES

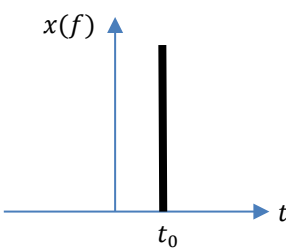
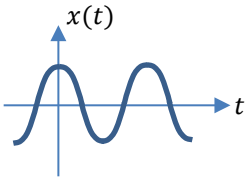
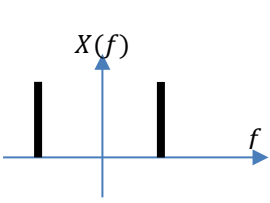
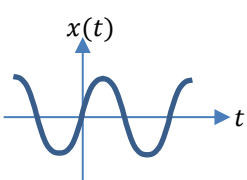
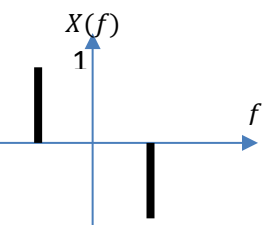
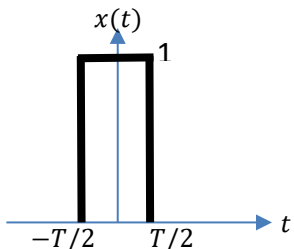
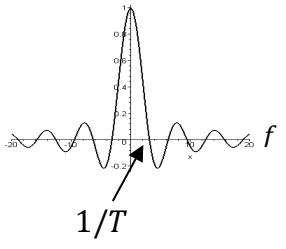
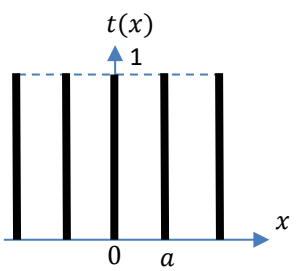
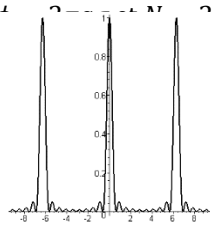
❑ On note $\delta(t)$, le pic de Dirac, fonction nulle sur $\mathbb{R}$ sauf en $t = 0$ où elle vaut 1.

❑ On note $\Pi(t)$, le peigne de Dirac, fonction nulle sur $\mathbb{R}$ sauf en $t = nT$ où elle vaut 1 ($n \in \mathbb{Z}$) en $t = 0$ où elle vaut $\frac{1}{2}$.

❑ La fonction $f(t) = \exp(-\alpha^2 t^2)$ est appelée Gaussienne.

❑ On note $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, la fonction rectangle, fonction nulle sur $\mathbb{R}$ sauf entre $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$ où elle vaut 1.

Signal $x(t)$	Transformée de Fourier $X(f)$
$\exp(-\alpha^2 t^2)$ 	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha^2}\right)$ 
$\delta(t)$ 	1 
$\Pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ 	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ 
1 	$\delta(f)$ 
$\exp(j 2\pi f_o t)$ 	$\delta(f - f_o)$ 

Signal $x(t)$	Transformée de Fourier $X(f)$
$\delta(t - t_0)$ 	$\exp(-j2\pi t_0 f)$ 
$\cos(2\pi f_0 t)$ 	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$ 
$\sin(2\pi f_0 t)$ 	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$ 
$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ 	$T \text{sinc}(\pi f T)$ 
$t(x) = \sum_{-N'}^{+N'} \delta(x - na)$ 	$\mathcal{R}(N, \phi) = \frac{\sin\left(\frac{(N)\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ Où $\phi = 2\pi a f$ 

c. PRODUIT DE CONVOLUTION.

La définition du produit de convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, sans grand intérêt à ce stade du cours, est :

$$h(t) = f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

L'intérêt ici du produit de convolution est de **calculer facilement des TF**

En effet, les deux propriétés suivantes peuvent être facilement utilisées :

Si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions de la variable t et si $h(t)$ est leur produit :

$$h(t) = f(t) \times g(t)$$

Alors la TF de $h(t)$ est le produit de convolution de leur TF :

$$H(f) = F(f) \otimes G(f)$$

Inversement, si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions de la variable t et si $h(t)$ est leur produit de convolution :

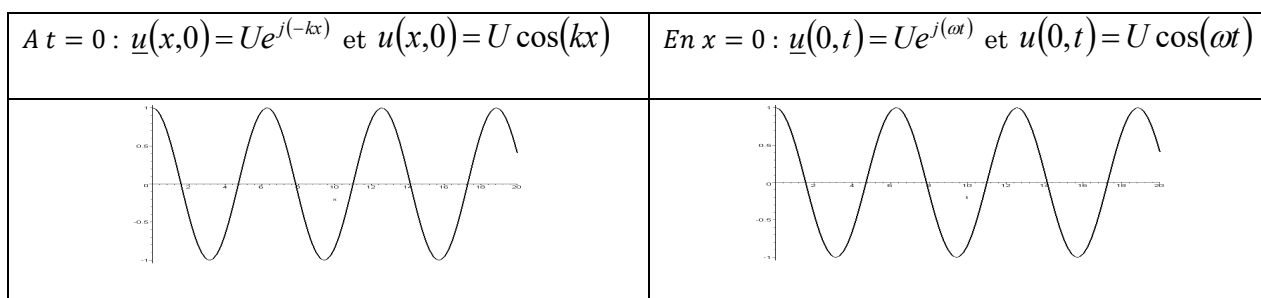
$$h(t) = f(t) \otimes g(t)$$

Alors la TF de $h(t)$ est le produit de leur TF :

$$H(f) = F(f) \times G(f)$$

d. ONDE PLANE MONOCHROMATIQUE / ONDE REELLE.

- Soit une OPPM $u(x, t) = U \cos(\omega t - kx)$ se propageant dans un milieu non absorbant et non dispersif (k réel constant).
- En notation complexe, on a : $\underline{u}(x, t) = U e^{j(\omega t - kx)}$



Ainsi une OPPM n'a ni début ni fin : Elle n'a pas de réalité physique.

$\Rightarrow$ Une onde réelle a une extension temporelle limitée et une extension spatiale limitée, les deux étant liées par l'équation d'onde. Ainsi, on modélise une onde réelle par un combinaison linéaire d'ondes planes progressives monochromatiques de pulsations proches : le paquet d'onde. Un paquet d'onde est constitué d'une enveloppe (onde d'enveloppe) contenant un nombre arbitraire d'onde élémentaire (onde moyenne).

2. PAQUET D'ONDE.

a. PAQUET D'ONDE DETERMINE EN $x = 0$

- Soit un signal $u(x, t)$ que l'on connaît en $x = 0$.

$\Rightarrow u(0, t)$ étant quelconque, on peut le décomposer en intégrale de Fourier : $u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$

où $\underline{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, t) \cdot e^{-j\omega t} dt$:

$\Rightarrow u(0, t)$ définit un **paquet d'onde**.

- Chaque composante du signal ($\frac{1}{2\pi} \underline{A}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$) se propage dans le milieu avec une vitesse qui est la vitesse de phase : .

$\Rightarrow du(x, t) = du\left(x = 0, t - \frac{x}{V_\phi}\right)$

$\Rightarrow du(x, t) = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(\omega) \exp\left(j\omega\left(t - \frac{x}{v_\phi}\right)\right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(\omega) \exp(j(\omega t - kx)) d\omega$

$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \underline{A}(\omega) \exp(j(\omega t - kx)) d\omega$ ¹

- On généralise ce résultat à la propagation d'un paquet d'onde dans un milieu quelconque :

Un paquet d'onde, qui en $x = 0$ s'écrit :

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$$\text{où: } \underline{A}(\omega) = TF(u(0, t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, t) \cdot e^{-j(\omega t)} dt$$

S'écrit pour x quelconque : $u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \underline{A}(\omega) \exp(j(\omega t - kx)) d\omega$ avec $k = k(\omega)$

b. PAQUET D'ONDE QUE L'ON CONNAIT A $T=0$.

$u(x, 0)$ étant quelconque, on peut le décomposer en intégrale de Fourier :

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(k) \exp(-jkx) dk \text{ où } \underline{A}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{jkx} dx$$

$\Rightarrow u(x, 0)$ définit un **paquet d'onde**.

¹ Si le milieu est absorbant et dispersif, le vecteur d'onde $\underline{k}$ vérifie : $\underline{k} = \underbrace{k'}_{>0} + j \underbrace{k''}_{<0}$ et $V_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{dx}{dt}$. La composante $du(x, t)$ s'écrit alors :

$$du(x, t) = e^{k''x} du\left(x = 0, t - \frac{x}{V_\phi}\right)$$

$$\Rightarrow du(x, t) = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(\omega) e^{k''x} \exp\left(j\omega\left(t - \frac{x}{v_\phi}\right)\right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(\omega) \exp(j(\omega t - k'x - jk''x)) d\omega = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(\omega) \exp(j(\omega t - kx)) d\omega$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \underline{A}(\omega) \exp(j(\omega t - kx)) d\omega : \text{On retrouve le résultat précédent.}$$

Chaque composante du signal ($du = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(k) \exp(-jkx) dk$) se propage dans le milieu avec une vitesse qui est

la vitesse de phase : $V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{dx}{dt}$.

$$\Rightarrow du(x, t) = du(x - V_\phi t, 0)$$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(k) \exp(-jk(x - v_\phi t)) dk = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(k) \exp(j(\omega t - kx)) dk$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \underline{A}(k) \exp(j(\omega t - kx)) dk \quad ^2$$

- On généralise ce résultat à la propagation d'un paquet d'onde dans un milieu quelconque :

Un paquet d'onde, qui à $t = 0$ s'écrit : $u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(k) \exp(-jkx) dk$

s'écrit pour t quelconque : $u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(k) \cdot e^{j(\omega t - kx)} dk$ où $\omega = \omega(k)$

$$\text{où } \underline{A}(k) = TF(u(x, 0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{jkx} dx$$

Ainsi, connaissant l'onde à $t=0$ ou en $x=0$, et connaissant le milieu dans lequel se propage le paquet d'onde (connaissance de $k = k' + jk''$), on peut déterminer le signal $u(x, t)$.

$\Rightarrow$ En général, le paquet d'onde apparaît déformé (milieu dispersif) et atténué (milieu absorbant).

- En pratique, l'amplitude $\underline{A}(\omega)$ ne prend des valeurs significatives que sur un petit intervalle de pulsations centré sur ω_0 . Sachant que $u(0, t)$ et $u(x, t)$ sont réels, on montre que l'on peut alors écrire :

$$u(0, t) = 2Re \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right]$$

$$u(x, t) = 2Re \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp(j(\omega t - kx)) d\omega \right]$$

² Si le milieu est absorbant et dispersif, le vecteur d'onde $\vec{k}$ vérifie : $k = \underbrace{k'}_{>0} + j \underbrace{k''}_{<0}$ et $V_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{dx}{dt}$. La composante $du(x, t)$ s'écrit alors :

$$du(x, t) = e^{k''x} du(x - V_\phi t, 0)$$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(k) e^{k''x} \exp(-jk(x - V_\phi t)) dk = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(k) \exp(j(\omega t - k'x - jk''x)) dk = \frac{1}{2\pi} \underline{A}(k) e^{k''x} \exp(j(\omega t - kx)) dk$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \underline{A}(k) \exp(j(\omega t - kx)) dk : \text{On retrouve le résultat précédent}$$

où $\underline{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, t) e^{-j\omega t} dt$.

- De même, l'amplitude $\underline{A}(k)$ ne prend des valeurs significatives que sur un petit intervalle des valeurs de k centré sur k_0 . Sachant que $u(x, 0)$ et $u(x, t)$ sont réels, on montre que l'on peut alors écrire :

$$u(x, 0) = 2\text{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} \underline{A}(k) \exp(-jkx) dx \right]$$

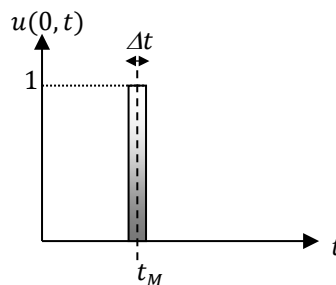
$$u(x, t) = 2\text{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} \underline{A}(k) \exp(j(\omega t - kx)) dk \right]$$

Où $\underline{A}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{jkx} dx$.

3. EXEMPLES.

a. SIGNAL RECTANGULAIRE.

- En $x=0$, un signal est émis pendant un temps Δt autour d'un temps t_0 .



- $u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$ où $\underline{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, t) e^{-j\omega t} dt = TF(u(0, t)) = \Delta t \text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) e^{j(-\omega t_M)}$

$$\Rightarrow A(\omega) = \Delta t \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right|$$

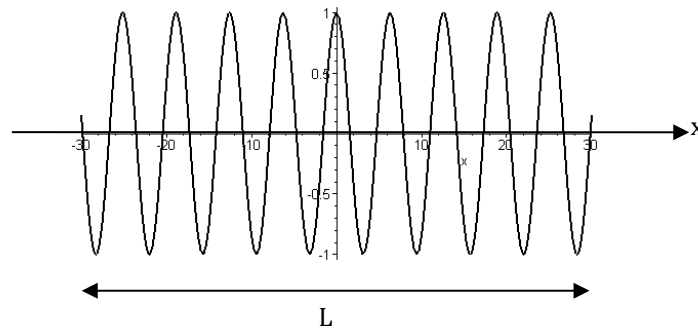
- Sachant que $\text{sinc}(x)$ s'annule pour la 1ère fois pour $x = \pm\pi$, on en déduit la largeur du spectre d'amplitude :

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{\Delta t}$$

- Ainsi, plus Δt est faible, plus la largeur spectrale sera grande.

b. SIGNAL SINUSOÏDAL TRONQUE OU TRAIN D'ONDE.

- A $t=0$, $u(x, 0) = E_0 \cos(k_0 x)$ pour $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ et $u(x, 0) = 0$ pour les autres valeurs de x .



$$\Rightarrow u(x, 0) = f(x) \cdot \text{Rect}\left(\frac{x}{L}\right) \text{ où } f(x) = E_0 \cos(k_0 x)$$

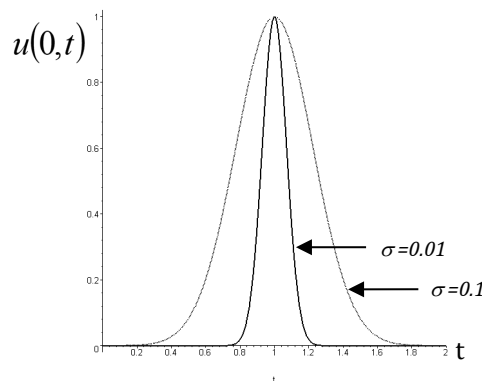
$$\Rightarrow \underline{A}(k) = \underline{F}(k) \otimes TF\left[\text{Rect}\left(\frac{x}{L}\right)\right] \text{ où : } TF\left[\text{Rect}\left(\frac{x}{L}\right)\right] = L \text{sinc}\left(\frac{kL}{2}\right) \text{ et } \underline{F}(k) = \frac{E_0}{2} \delta(k - k_0) + \frac{E_0}{2} \delta(k + k_0)$$

$$\underline{A}(k) = \frac{E_0 L}{2} \text{sinc}\left(\frac{(k + k_0)L}{2}\right) + \frac{E_0 L}{2} \text{sinc}\left(\frac{(k - k_0)L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{La largeur d'un sinc est donc : } \Delta k = \frac{4\pi}{L} \propto \frac{1}{L}$$

C. SIGNAL GAUSSIEN.

- En $x=0$, un signal émis est de la forme : $u(0, t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\sigma}}$
- La largeur à mi-hauteur de la gaussienne du type $e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\sigma}}$ est $\Delta t = 2\sqrt{\sigma}$
 $\Rightarrow$ Plus σ est élevé plus la largeur du pic est élevée.



- Alors :

$$\underline{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\sigma}} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{\sigma}} \cdot e^{-j\omega(t'+t_0)} dt' = e^{-j\omega t_0} \cdot TF\left[e^{-\frac{t'^2}{\sigma}}\right]$$

$$\underline{A}(\omega) = \sqrt{\pi\sigma} e^{-j\omega t_0} \cdot e^{-\frac{\sigma\omega^2}{4}} \rightarrow A(\omega) = \sqrt{\pi\sigma} \cdot e^{-\frac{\sigma\omega^2}{4}}$$

- On obtient une gaussienne de largeur à mi-hauteur : $\Delta\omega = \frac{4}{\sqrt{\sigma}} \Rightarrow$ Plus σ est élevée plus $\Delta\omega$ est faible

Tous ces exemples montrent que $A(\omega)$ ne prend des valeurs significatives que sur un intervalle de pulsations $\Delta\omega$ limité. Cet intervalle est d'autant plus grand que Δt est petit :

$$\Delta\omega.\Delta t \approx Cste$$

De même, $A(k)$ ne prend des valeurs significatives que sur un intervalle des valeurs de k limité (Δk). Cet intervalle est d'autant plus grand que Δx est petit :

$$\Delta k.\Delta x \approx Cste$$

4. EVOLUTION D'UN PAQUET D'ONDE.

a. ETUDE D'UN CAS SIMPLE : SIGNAL COMPORTANT DEUX FREQUENCES VOISINES.

□ Soit le signal : $u(x, t) = U_0 \cos(\omega_1 t - k(\omega_1) x) + U_0 \cos(\omega_2 t - k(\omega_2) x) + \phi$ où ω_1 et ω_2 sont deux pulsations

$$\text{proches : } \begin{cases} \omega_1 = \omega_o - \frac{\Delta\omega}{2} \\ \omega_2 = \omega_o + \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases} \text{ avec } \Delta\omega \ll \omega_o$$

$$\square \text{ Posons } k_o = k(\omega_o) \text{ alors : } \begin{cases} k(\omega_1) = k\left(\omega_o - \frac{\Delta\omega}{2}\right) = k(\omega_o) + \frac{dk}{d\omega}_{\omega_o} \left(\frac{-\Delta\omega}{2}\right) \\ k(\omega_2) = k\left(\omega_o + \frac{\Delta\omega}{2}\right) = k(\omega_o) + \frac{dk}{d\omega}_{\omega_o} \left(\frac{+\Delta\omega}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k(\omega_1) = k_o - \frac{\Delta k}{2} \\ k(\omega_2) = k_o + \frac{\Delta k}{2} \end{cases} \text{ où } \Delta k = \frac{dk}{d\omega}_{\omega_o} \Delta\omega$$

□ On peut ainsi modifier l'expression de $u(x, t)$:

$$u(x, t) = 2U_o \left(\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k(\omega_1) + k(\omega_2)}{2} x + \frac{\phi}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k(\omega_1) - k(\omega_2)}{2} x - \frac{\phi}{2}\right) \right)$$

$$u(x, t) = 2U_o \left(\underbrace{\cos\left(\omega_o t - k_o x + \frac{\phi}{2}\right)}_1 \times \underbrace{\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x - \frac{\phi}{2}\right)}_2 \right)$$

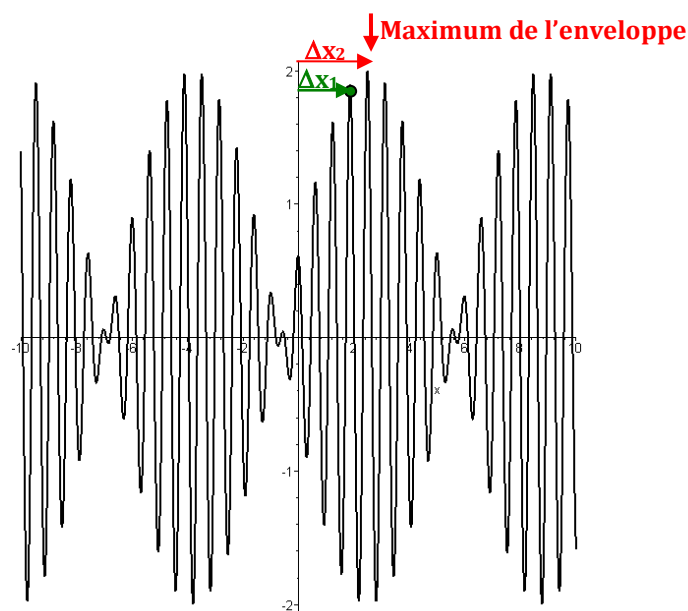
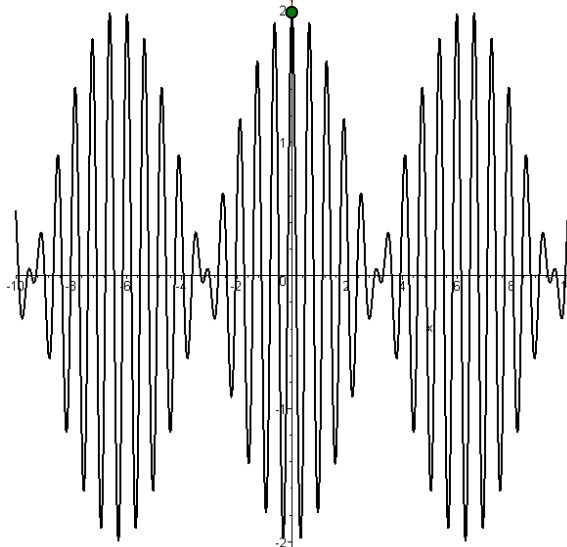
□ Le terme 1 est une OPPM de célérité $\frac{\omega_o}{k_o}$, alors que le terme 2 est une OPPM de célérité $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}_{\omega_o}$. Sachant que $\Delta\omega \ll \omega_o$ (et donc $\Delta T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \gg T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$), on en déduit une interprétation des variations temporelles des termes 1 et 2 : Le signal est constitué d'une sinusoïde de période T_o dont l'enveloppe est elle aussi une sinusoïde de période $\Delta T \gg T_o$.

Ainsi l'onde est constituée d'une onde moyenne de propageant à la vitesse $\frac{\omega_0}{k_0}$ appelée vitesse de phase (à l'intérieur de l'enveloppe) et d'une onde d'enveloppe se propageant à la vitesse $\frac{d\omega}{dk}\bigg|_{\omega_0}$ appelée vitesse de groupe : $V_g(\omega_0) = \frac{d\omega}{dk}\bigg|_{\omega_0}$

□ Evolution de $u(t)$ entre t et $t+\Delta t$:

● = point de la sinusoïde ↓ Maximum de l'enveloppe

Avec :



$$\Delta x_1 = V_\phi \Delta t = \frac{\omega_0}{k_0} \Delta t \quad \text{et} \quad \Delta x_2 = V_g \Delta t = \frac{d\omega}{dk}\bigg|_{\omega_0} \Delta t$$

b. EVOLUTION D'UN PAQUET D'ONDE DANS UN MILIEU DISPERSIF.

- Soit un paquet d'onde dont l'amplitude $\underline{A}(\omega)$ ne prend des valeurs significatives que sur un petit intervalle de pulsations centré sur ω_0 . Sachant que $u(0, t)$ et $u(x, t)$ sont réels, on montre que l'on peut alors écrire :

$$u(0, t) = 2\text{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right]$$

$$u(x, t) = 2\text{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp(j(\omega t - kx)) d\omega \right]$$

où $\underline{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, t) e^{-j\omega t} dt$.

- En introduisant $k_o = k(\omega_o)$, $u(x, t)$ peut s'écrire :

$$u(x, t) = 2\text{Re} \left[\underbrace{\frac{1}{2\pi} \exp(j(\omega_o t - k_o x))}_{(1)} \underbrace{\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp(j((\omega - \omega_o)t - (k - k_o)x)) d\omega}_{(2)} \right]$$

Sachant que $\omega - \omega_o$ varie dans l'intervalle $\left[-\frac{\Delta\omega}{2}, \frac{\Delta\omega}{2}\right]$ avec $\Delta\omega \ll \omega_o$, on en déduit que les variations temporelles de (2) sont lentes devant celles de (1).

$\Rightarrow$ Dans l'expression de $u(x, t)$, (1) représente l'onde moyenne et (2) représente l'enveloppe de l'onde moyenne.

- Ainsi, l'onde moyenne se propage à la vitesse de phase : $V_\phi = \frac{\omega_o}{k_o}$
- Soit $\Phi = (\omega - \omega_o)t - (k - k_o)x$ la phase instantanée des différentes ondes de l'enveloppe.

Exprimons la vitesse de cette phase :

$$\Rightarrow d\Phi = 0 = (\omega - \omega_o)dt - (k(\omega) - k_o)dx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega - \omega_o}{k(\omega) - k_o} = \frac{d\omega}{dk} = V_g$$

$\Rightarrow$ A priori la vitesse de propagation des différents termes intervenant dans l'enveloppe dépend de ω .

$\Rightarrow$ Au cours de la propagation, l'enveloppe se déforme.

C. CAS D'UN MILIEU FAIBLEMENT DISPERSIF.

- Dans ce cas-là, la relation de dispersion peut s'écrire :

$$k(\omega) = k(\omega_o) + (\omega - \omega_o) \frac{dk}{d\omega} \bigg|_{\omega_o} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega - \omega_o}{k(\omega) - k_o} = \frac{d\omega}{dk} \bigg|_{\omega_o} = V_g = \text{cste}$$

$\Rightarrow$ La vitesse de propagation des différents termes intervenant dans l'enveloppe est constante

$\Rightarrow$ Au cours de la propagation, l'enveloppe ne se déforme pas.

Notons cependant que $V_g \neq V_\phi$: L'onde moyenne se déplace à l'intérieur de l'enveloppe.

d. CAS D'UN MILIEU PLUS DISPERSIF :

- Dans ce cas-là, la relation de dispersion peut s'écrire :

$$k(\omega) = k(\omega_o) + (\omega - \omega_o) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_o} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_o)^2 \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_o} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega - \omega_o}{k(\omega) - k_o} = \frac{1}{\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_o} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_o) \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_o}}$$

$\Rightarrow$ La vitesse de propagation des différents termes intervenant dans l'enveloppe n'est pas constante

$\Rightarrow$ Au cours de la propagation, l'enveloppe se déforme.

e. CONCLUSION :

Un paquet d'onde peut se mettre sous la forme d'une onde moyenne (1) de pulsation ω_o se propageant à la vitesse de phase $V_\phi = \frac{\omega_o}{k_o}$ dont l'amplitude est modulée par une enveloppe (2) se propageant à la vitesse de groupe $V_g = \frac{d\omega}{dk}$:

$$u(x, t) = 2\text{Re} \left[\underbrace{\frac{1}{2\pi} \exp(j(\omega_o t - k_o x))}_{(1)} \underbrace{\int_{\omega_o - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_o + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp(j((\omega - \omega_o)t - (k - k_o)x)) d\omega}_{(2)} \right] = 2\text{Re}(\underline{u}(x, t))$$

$$\underline{u}(x, t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \exp(j(\omega_o t - k_o x))}_{(1)} \underbrace{\int_{\omega_o - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_o + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp(j((\omega - \omega_o)t - (k - k_o)x)) d\omega}_{(2)}$$

Si la vitesse de phase ne dépend pas de ω , le milieu est non dispersif et $V_g = V_\phi$

Si la vitesse de phase dépend de ω , le milieu est dispersif et $V_g \neq V_\phi$

$\Rightarrow$ Deux cas peuvent alors se présenter :

Si la vitesse de groupe ne dépend pas de ω , alors l'enveloppe ne se déforme pas par contre l'onde moyenne « se déplace » à l'intérieur de l'enveloppe.

Si la vitesse de groupe dépend de ω alors l'enveloppe se déforme et s'étale au cours de la propagation.

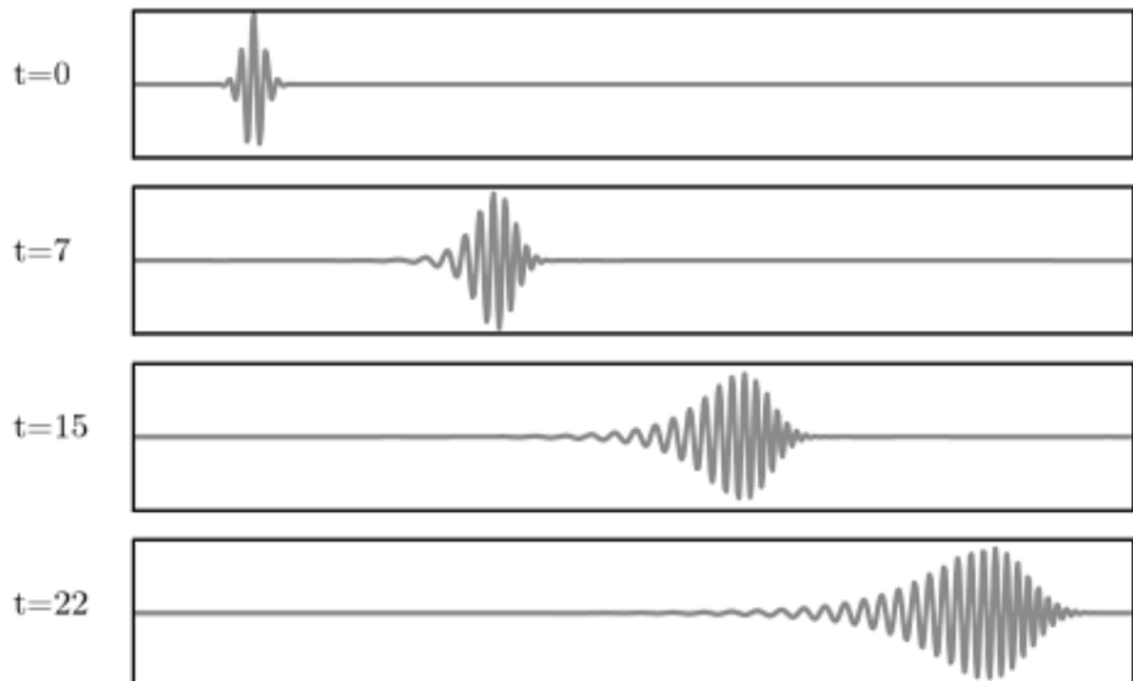
f. EXEMPLE :

Etudions la propagation d'un paquet d'onde gaussien dans un milieu fortement dispersif :

- Le paquet d'onde gaussien considéré est un signal émis en $x=0$: $u(0, t) = e^{-\frac{(\Delta\omega t)^2}{4}} \cos(\omega_o t)$

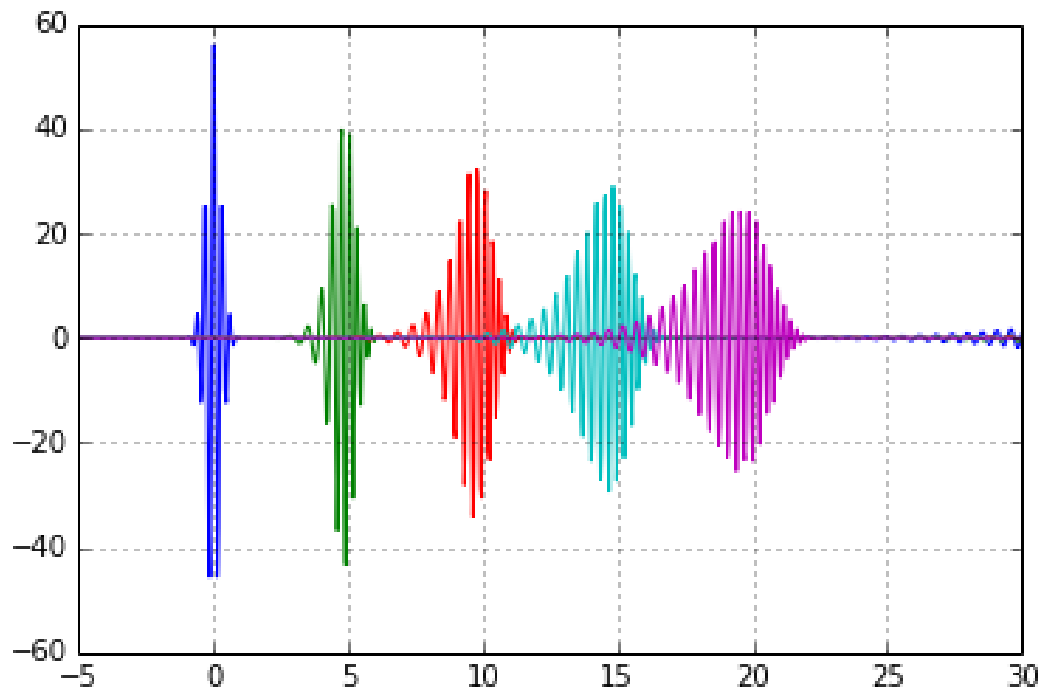
$$\Rightarrow \underline{A}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2} \left[\exp\left(-\left(\frac{\omega - \omega_o}{\Delta\omega}\right)^2\right) + \exp\left(-\left(\frac{\omega + \omega_o}{\Delta\omega}\right)^2\right) \right] \text{ et } u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \underline{A}(\omega) \exp(j(\omega t - kx)) d\omega$$

⇒ On obtient les résultats suivants :



⇒ Au cours de la propagation, le paquet d'onde se déforme.

SIMULATION PYTHON :



```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 from pylab import *
3 from matplotlib.animation import FuncAnimation
4 Nx=750
5 Nt=Nx/5
6 Nw=Nx/5
7 t=linspace(0,30, Nt)
8 x=linspace(-5,30,Nx)
9 w=linspace(15,35,Nw)
10 w0=25
11 dw=w0/8
12 c=exp(-((w-w0)/dw)**2/2)
13 def k(w):
14     return sqrt(w**2-15**2)
15 def s(t):
16     return sum(c*cos(w*t-outer(x,k(w))),axis=1)
17 frames=array([s(ti) for ti in t])
18 line=plot(x,frames[:,Nt/5].T)[0]
19 def animate(i):
20     line.set_ydata(frames[i]);return [line]
21 ani=FuncAnimation(line.figure, animate, arange(Nt), interval=250, blit=True);
22 grid()
23 show()
```