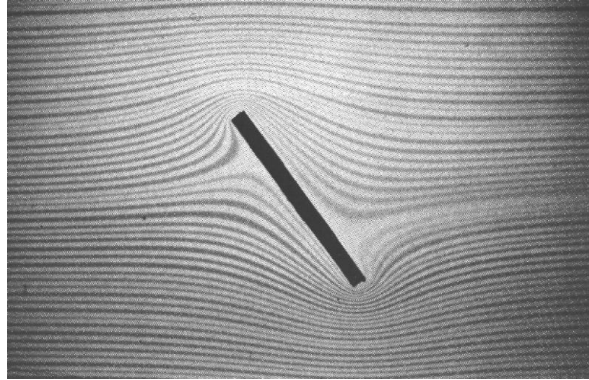


FLUIDES REELS EN ECOULEMENT.



Écoulement laminaire autour d'une plaque.

I. EQUATION DE NAVIER-STOKES - EXEMPLES DE RESOLUTION.

1. EQUATION DE NAVIER-STOKES.

On étudie le mouvement d'une particule fluide dans un fluide réel.

Le fluide étant réel, il faut tenir compte des forces de viscosités agissant sur la particule fluide : On doit donc rajouter à l'équation d'Euler, un terme correspondant aux forces volumiques de viscosité :

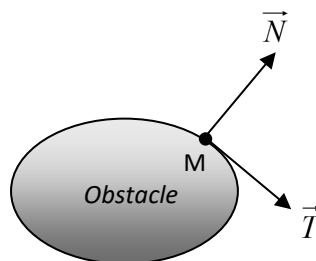
Equation d'Euler (fluide idéal) :

$$\mu. \vec{a}(M, t) = \mu. \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}(P) + \vec{f}_v(M, t)$$

Equation de Navier-Stokes (fluide réel Newtonien) :

$$\mu. \vec{a}(M, t) = \mu. \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}(P) + \vec{f}_v(M, t) + \eta. \Delta \vec{V}$$

2. CONDITIONS LIMITES.



- Rappelons que pour un écoulement parfait, la condition limite sur un obstacle est :

$$\vec{V}(M \in \text{fluide}, t) \cdot \vec{N} = \vec{V}(M \in \text{obstacle}, t) \cdot \vec{N}$$

Pour l'écoulement visqueux, Les forces de viscosité entre l'obstacle et le fluide impose à la vitesse d'être nulle sur l'obstacle, dans le référentiel de l'obstacle : Le fluide s'accroche à l'obstacle.

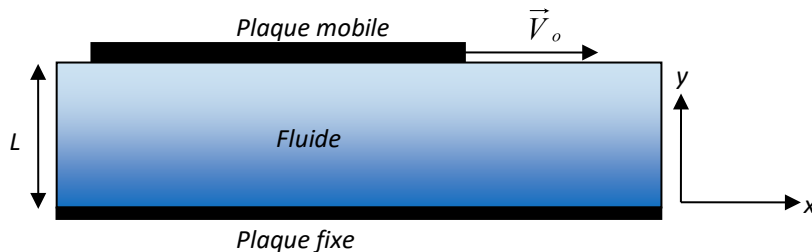
$$\vec{V}(M \in \text{fluide}, t) = \vec{V}(M \in \text{obstacle}, t)$$

3. ECOULEMENT DE COUETTE.

a. DEFINITION

Un écoulement de Couette désigne l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux entre deux surfaces dont l'une est en mouvement par rapport à l'autre. L'écoulement est dû à la force d'entraînement visqueuse qui agit sur le fluide. Le nom de cet écoulement se réfère au physicien français du XIX^e siècle Maurice Couette.

- Le dispositif est le suivant :



- Un opérateur tracte la plaque mobile à vitesse constante $\vec{V}_o$. On suppose μ constante.

b. PROFIL DES VITESSES

⇒ On cherche à déterminer le profil des vitesses $\vec{V}(M)$, pour cela on suppose que **l'écoulement est stationnaire et incompressible** ce qui revient à supposer ici que l'écoulement est laminaire. Compte tenu de la géométrie du dispositif, on considère alors que le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{V}(M) = V(x, y) \vec{e}_x$$

- L'écoulement étant incompressible, on a : $\text{div}(\vec{V}) = 0 \Rightarrow \vec{V}(M) = V(y) \vec{e}_x$
- Notons tout d'abord que **l'accélération de toute particule fluide est nulle**. En effet :
 - ✓ L'accélération locale est nulle car le régime est stationnaire.
 - ✓ L'accélération convective s'écrit ici : $(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = V(y) \cdot \underbrace{\frac{\partial V(y)}{\partial x}}_0 \vec{e}_x = \vec{0}$

- La résultante volumique des forces de viscosité s'écrit grâce à l'opérateur Laplacien :

$$\overline{\Delta} \vec{V} = \Delta V \vec{e}_x = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \vec{e}_x$$

Notons que l'on peut retrouver cette résultante, en ajoutant les forces de viscosité agissant sur la particule fluide en y et $y + dy$:

$$d\vec{F} = \eta \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y+dy} dS \vec{e}_x - \eta \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_y dS \vec{e}_x = \eta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_y dS dy \vec{e}_x = \eta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_y d\tau \vec{e}_x$$

- L'équation de Navier-stokes devient alors : $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \mu \vec{g} + \eta \cdot \overline{\Delta} \vec{V}$

⇒ La projection sur les axes (Ox) et (Oy) de cette équation donne :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{d^2 V}{dy^2} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} - \mu g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{d^2 V}{dy^2} = 0 \\ P = -\mu g y + f(x) \end{cases}$$

- **Au niveau de la plaque mobile (en $y = L$) la pression est uniforme** (elle vaut $P_{ext} = P_o + \frac{mg}{S}$ où P_o est la pression atmosphérique, m la masse de la plaque et S sa section en contact avec le fluide).

$\Rightarrow$ La fonction $f(x)$ est une constante indépendante de x .

$$\Rightarrow P = \mu g(L - y) + P_{ext}$$

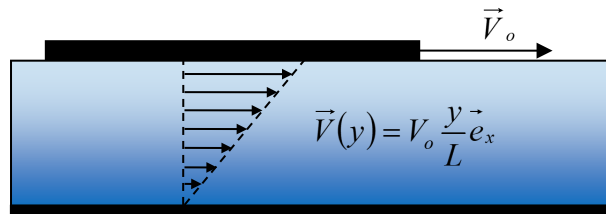
- Ainsi :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{d^2 V}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dy^2} = 0 \Rightarrow V(y) = Ay + B$$

Les conditions limites étant $V(0) = 0 = B$ et $V(L) = AL + B = V_o$, on en déduit :

$$\vec{V}(y) = V_o \frac{y}{L} \vec{e}_x$$

- On en déduit le profil des vitesses :



c. DEBIT DE COUETTE

- On peut calculer le débit de Couette (L_z longueur caractéristique suivant z) :

$$D_v = \iint \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_0^L \frac{V_o y}{L} dy \times L_z = \frac{L L_z}{2} V_o$$

Ce débit est égal à la moitié du débit que l'on obtiendrait pour un profil de vitesse droit de valeur V_o .

- Vitesse moyenne (sur une section, appelée vitesse débitante) :

$$V_m = \frac{1}{S} \iint \vec{V} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{L L_z} \int_0^L \frac{V_o y}{L} dy \times L_z = \frac{1}{2} V_o$$

d. CONTRAINTE EXERCEE SUR LA PLAQUE

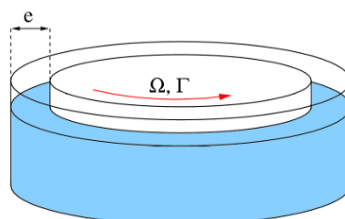
- On peut enfin calculer la contrainte exercée par le fluide sur la plaque :

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{S} = -\eta \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=L} \vec{e}_x = -\frac{\eta V_o}{L} \vec{e}_x$$

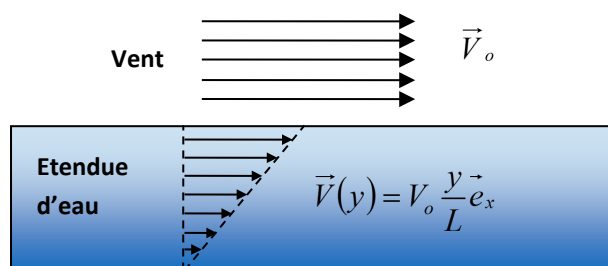
Pour maintenir la vitesse de la plaque constante, un opérateur doit exercer une force $-\vec{F}$

e. EXEMPLES :

- Ecoulement de Couette cylindrique : Ce dispositif correspond au premier viscosimètre (inventé par M. Couette en 1890), la mesure du couple exercée sur le cylindre intérieur pour maintenir une vitesse angulaire de rotation Ω donne accès à la viscosité du fluide.



- Mise en mouvement de l'eau par le vent :



f. VALIDITE DES HYPOTHESES

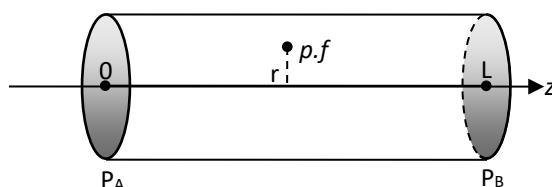
L'écoulement reste laminaire tant que la vitesse de translation de la plaque est modérée comme nous le verrons au II.

4. ECOULEMENT DE POISEUILLE.

a. DEFINITION

Un écoulement de Poiseuille désigne l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans une conduite, écoulement induit par une différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite.

On étudie ici l'écoulement **stationnaire et incompressible** d'un fluide dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe (Ox), de rayon R, de longueur L, la pression d'entrée étant P_A et la pression à la sortie étant P_B . On néglige les effets de la pesanteur.



b. PROFILE DES VITESSES

On cherche à déterminer le profil des vitesses $\vec{V}(M)$: Compte tenu de la géométrie du dispositif, le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{V}(M) = V(r, z) \vec{e}_z$$

- L'écoulement étant incompressible, on a : $\text{div}(\vec{V}) = 0 \Rightarrow \vec{V}(\mathbf{M}) = V(r)\vec{e}_z$
- Notons tout d'abord que **l'accélération de toute particule fluide est nulle**. En effet :
 - ✓ L'accélération locale est nulle car le régime est stationnaire.
 - ✓ L'accélération convective s'écrit ici : $(\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = V(r) \cdot \underbrace{\frac{\partial V(r)}{\partial z}}_0 \vec{e}_z = \vec{0}$

- L'équation de Navier-stokes devient alors :

$$\vec{0} = -\text{grad}(P) + \mu \vec{g} + \eta \cdot \Delta \vec{V}$$

- La résultante volumique des forces de viscosité est donnée par l'opérateur Laplacien :

$$\vec{f}_{vis} = \eta \Delta \vec{V} = \eta \Delta (V(r)) \vec{e}_z = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) \vec{e}_z$$

Cette force peut être déterminée en ajoutant les forces tangentielles s'exerçant sur la particule fluide en r et en $r + dr$:

$$d\vec{F} = \eta(r + dr) d\theta dz \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r+dr} \vec{e}_z - \eta r d\theta dz \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_r \vec{e}_z = \eta d\theta dz \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) dr \vec{e}_z = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) d\tau \vec{e}_z$$

- On en déduit les projections de l'équation de Navier-Stokes dans les directions $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_r$:

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

⇒ La pression ne dépend pas de r et :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$$

⇒ Dans cette équation, P ne dépend que de z alors que V ne dépend que de r : On en déduit les deux membres de cette égalité sont constants :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = K$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dP}{dz} = K \\ \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P = Kz + cste \\ d \left(r \frac{dV}{dr} \right) = \frac{Kr}{\eta} dr \end{cases}$$

- En utilisant les conditions limites : $P(0) = P_A$ et $P(L) = P_B$, On détermine K et $cste$:

$$K = -\Delta P = \frac{P_B - P_A}{L} < 0 \text{ et } cste = P_A$$

, d'où :

$$\begin{cases} P = \left(\frac{P_B - P_A}{L} \right) z + P_A \\ d \left(r \frac{dV}{dr} \right) = \left(\frac{P_B - P_A}{\eta L} \right) r dr \end{cases}$$

$$\Rightarrow r \frac{dV}{dr} = \left(\frac{P_B - P_A}{\eta L} \right) \frac{r^2}{2} + cste'$$

- Sachant que lorsque r tend vers 0, la vitesse tend vers une valeur finie, on en déduit que $cste' = 0$

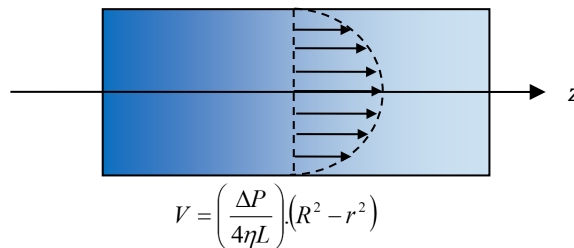
$$\frac{dV}{dr} = \left(\frac{P_B - P_A}{\eta L} \right) \frac{r}{2}$$

$$V = \left(\frac{P_B - P_A}{\eta L} \right) \frac{r^2}{4} + cste''$$

- Sachant que la vitesse s'annule sur les parois du tuyau ($V(R) = 0$), on en déduit $V(r)$:

$$V(r) = \left(\frac{P_A - P_B}{4\eta L} \right) \cdot (R^2 - r^2)$$

- D'où le profil des vitesses parabolique :



c. DEBIT DE POISEUILLE

- On peut ainsi déterminer le débit volumique de l'écoulement :

$$D_v = \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_0^R V(r) 2\pi r dr$$

⇒ Après calculs, on trouve :

$$D_v = \left(\frac{P_A - P_B}{8\eta L} \right) \cdot \pi R^4$$

⇒ Ceci constitue de théorème de Poiseuille :

$$\text{Le débit est proportionnel à } R^4 \text{ et inversement proportionnel à } L : \quad D_v = \left(\frac{P_A - P_B}{8\eta L} \right) \cdot \pi R^4 = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

- La vitesse moyenne dans le tube, appelée vitesse débitante est :

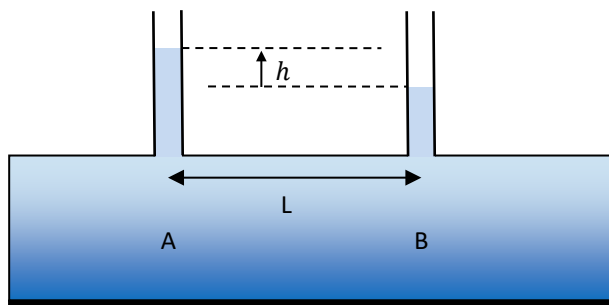
$$V_m = \frac{1}{S} \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \frac{D_v}{\pi R^2} = \left(\frac{P_A - P_B}{8\eta L} \right) \cdot R^2$$

d. VALIDITE DE CE PROFIL :

- Il faut se situer suffisamment loin de l'entrée : Soit L_c la longueur d'entrée (le profil est vérifié pour $x > L_c$), L_c peut être interprété comme la distance à laquelle les couches limites qui se forment à l'entrée se rejoignent pour former le profil parabolique. (Voir III).
- L'écoulement doit être laminaire : écoulement de nombre de Reynolds inférieur à 2000. (Voir III).

e. NOTION DE PERTES DE CHARGE.

- Notons enfin, que la viscosité et le gradient de pression dans un tube sont liés : les forces de viscosité expliquent la perte de charge du tube, c'est-à-dire la diminution de la pression le long du tube. Diminution vérifiée par la prise de pression latérale.



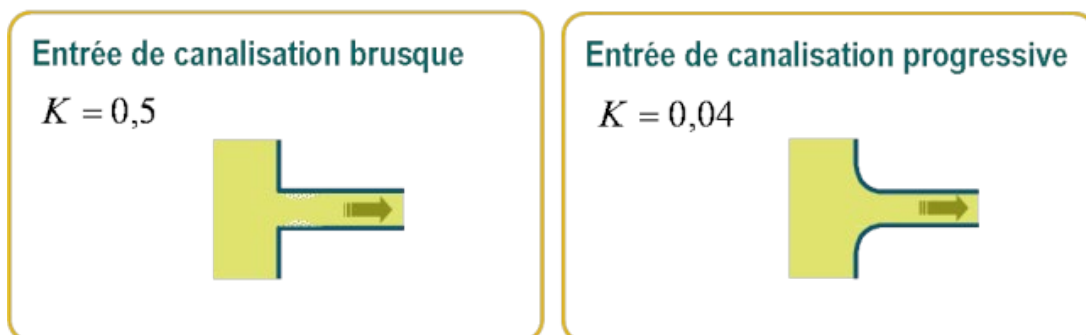
$$P_A - P_B = \mu g h = -KL$$

On appelle perte de charge, la diminution de pression le long d'une conduite. Celle-ci peut s'exprimer en Pascal, en mètre, en Pascal par mètre ou sans dimensions.

Cette perte de charge est répartie tout le long de la conduite : on parle de perte de **charge régulière**, elle peut être exprimée de différentes façons :

$$\begin{aligned}
 &P_A - P_B \text{ (en Pascal)} \\
 &\frac{P_A - P_B}{\mu g} = h \text{ (en mètre)} \\
 &\frac{P_A - P_B}{L} = \frac{\mu g h}{L} \text{ (en Pascal par mètre)} \\
 &\frac{P_A - P_B}{e_{c,v}} = \frac{P_A - P_B}{\frac{1}{2} \mu V_m^2} \text{ (sans dimension)}
 \end{aligned}$$

Notons, qu'une modification de la géométrie de la conduite (un rétrécissement par exemple) est à l'origine d'une perte de charge appelée perte de **charge singulière**.



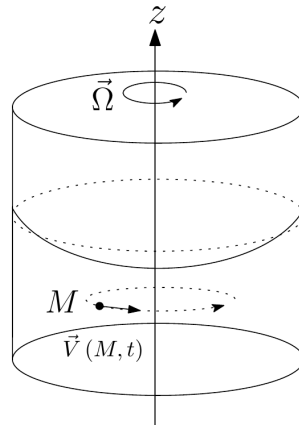
Exemple de perte de charge singulière avec $K = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \mu V^2}$

II. INTERPRETATION PHYSIQUE DE LA VISCOSITE – NOMBRE DE REYNOLDS.

1. TRANSPORT CONVECTIF/TRANSPORT DIFFUSIF DE QUANTITE DE MOUVEMENT.

a. POSITION DU PROBLEME.

- Considérons l'exemple d'un cylindre rempli d'un fluide et mis en rotation à vitesse angulaire Ω autour de son axe; nous observons alors la mise en mouvement progressive du fluide à partir de la paroi du cylindre. Au bout d'un certain temps, si les effets de bord (dus à la longueur finie du cylindre) sont négligés, l'ensemble du fluide tourne à la vitesse angulaire Ω .



- Notons tout d'abord qu'il est clair que, par son mouvement même, un fluide transporte de la quantité de mouvement : ce type de transport dû au mouvement est appelé transport convectif, il est orthoradial.
- Cependant, à partir de l'état de repos, le fluide est mis en mouvement des bords du cylindre vers son centre, c'est-à-dire **radialement**. Mais, la vitesse du fluide est en tout point et à tout instant orthoradiale : **le transport de quantité de mouvement permettant la mise en mouvement du fluide ne peut être convectif**. Il s'agit ici d'un transport diffusif, de nature microscopique, en tout point analogue à un transfert thermique par exemple : nous assistons, par diffusion de quantité de mouvement, à une propagation radiale de proche en proche de la mise en mouvement du fluide. C'est la viscosité du fluide qui assure en fait, par l'intermédiaire de la force de friction qui s'exerce entre les différentes couches concentriques du fluide, le transport diffusif de la quantité de mouvement : La viscosité peut s'interpréter comme une diffusion de quantité de mouvement.

b. TRANSPORT DE QUANTITE DE MOUVEMENT

DEFINITION

On cherche à exprimer des débits de quantités de mouvement, débit de nature convective ou de nature diffusive :

$$D_{\vec{P}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \left(\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \right) \vec{u}_P$$

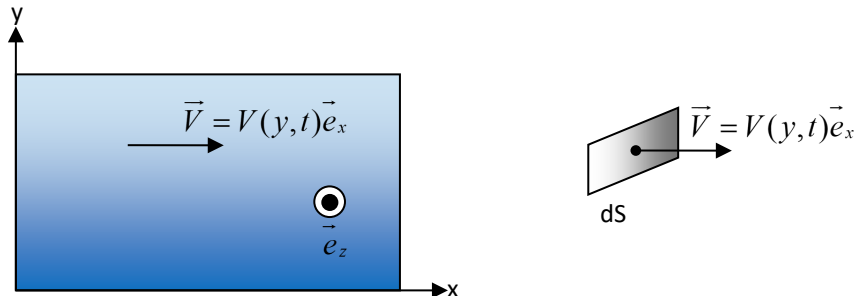
Où $\vec{j}$ est un vecteur densité de courant de quantité de mouvement et où $\vec{u}_P = \frac{\vec{P}}{P}$

A travers une surface élémentaire, on aura donc :

$$\frac{d^3\vec{P}}{dt} = (\vec{j} \cdot d\vec{S}) \vec{u}_P$$

TRANSPORT DE QUANTITE DE MOUVEMENT CONVECTIF

- Le transport convectif résulte du mouvement de la particule fluide : au cours de son mouvement elle transporte avec elle ses caractéristiques physiques, comme la quantité de mouvement. Ce transport se fait dans le sens de l'écoulement.
- Le vecteur densité de courant (de transport de quantité de mouvement par convection) peut être déterminé sur un cas simple : Considérons un écoulement unidimensionnel suivant $\vec{u}_x$ et de section $dS=dy.dz$



- La quantité de mouvement $\vec{dp}$ et la masse dm traversant la surface dS en x entre les instant t et $t+dt$ sont reliées par l'équation :

$$\vec{dp} = dm \cdot \vec{V}(y, t)$$

Où :

$$dm = \mu d\tau = \mu dS dx = \mu V dS dt$$

- D'où :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = (\mu V^2)(y, t) dS \vec{e}_x$$

⇒ Le débit de quantité de mouvement à travers la surface dS vaut donc :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{(\mu V^2)(y, t) dS \vec{e}_x}_{\vec{j}_{conv}(x, t)}$$

Le vecteur densité de courant de quantité de mouvement par convection vaut donc : $\vec{j}_{conv}(y, t) = (\mu V^2)(y, t) \vec{e}_x$

Notons enfin que la force associée est :

$$d\vec{F}(y, t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{(\mu V^2)(y, t) dS \vec{e}_x}_{\vec{j}_{conv}(x, t)}$$

, et la pression associée est appelée **pression dynamique** :

$$P(y, t) = \|\vec{j}_{conv}(y, t)\| = (\mu V^2)(y, t) \text{ est la pression dynamique}$$

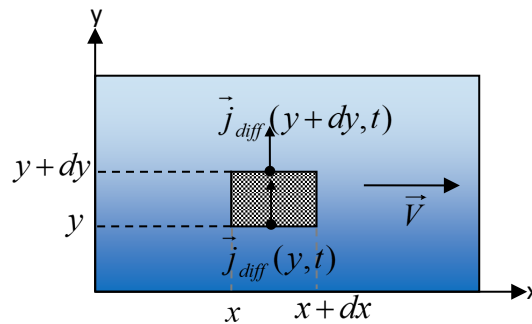
TRANSPORT DE QUANTITE DE MOUVEMENT PAR DIFFUSION.

Le transport diffusif résulte des forces de viscosité agissant sur la particule fluide : au cours de son mouvement sa quantité de mouvement est modifiée. Ce transport se fait perpendiculairement à l'écoulement.

- Le vecteur densité de courant (de transport de quantité de mouvement par diffusion) $\vec{j}_{diff}(M, t)$ peut être déterminé sur un cas simple : Considérons le même écoulement précédemment : écoulement unidimensionnel suivant $\vec{u}_x$ à travers une section $d\Sigma = dx \cdot dz$ tel que le champ des vitesses s'écrive : $\vec{V}(M, t) = V(y, t)\vec{e}_x$
 $\Rightarrow$ Le transport diffusif de quantité de mouvement se fera dans la direction (Oy) :

$$\vec{j}_{diff}(y, t) = j_{diff}(y, t) \cdot \vec{e}_y$$

On pose : $d\Sigma = d\Sigma \vec{e}_y$



- On fait un bilan de quantité de mouvement sur la tranche de fluide comprise entre les sections d'abscisse x et x+dx et en ne prenant en compte que la variation de quantité de mouvement due au transport diffusif (avec $\vec{u}_p = \vec{e}_x$) :

$$\delta^4 \vec{p} = \left(-(\vec{j}_{diff} \cdot d\Sigma)_{y+dy} + (\vec{j}_{diff} \cdot d\Sigma)_y \right) \vec{u}_p dt = -\frac{\partial(\vec{j}_{diff} \cdot d\Sigma)}{\partial y} dy \cdot dt \cdot \vec{e}_x = -\frac{\partial(j_{diff})}{\partial y} d\Sigma \cdot dy \cdot dt \cdot \vec{e}_x = -\frac{\partial(j_{diff})}{\partial y} d\tau \cdot dt \cdot \vec{e}_x$$

$\Rightarrow$ Cette variation de quantité de mouvement étant due aux forces de viscosité, on peut l'exprimer en fonction des forces de viscosités appliquées à la tranche :

$$\frac{\delta^4 \vec{p}}{dt} = \vec{F}_{viscosité} = \vec{f}_{viscosité} \cdot d\tau = \eta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \cdot d\tau \vec{e}_x$$

$\Rightarrow$ On a donc :

$$\frac{\delta^4 \vec{p}}{dt} = -\frac{\partial j_{diff}}{\partial y} dy \cdot dS \cdot \vec{e}_x = \eta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \cdot dy \cdot dS \cdot \vec{e}_x$$

Le vecteur densité de courant de quantité de mouvement par convection vaut donc : $\vec{j}_{diff}(y, t) = -\eta \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_y$

$\Rightarrow$ Cette équation est du même type que les lois phénoménologiques de Fick (diffusion moléculaire), Fourier (diffusion thermique) ou d'Ohm (diffusion électrique).

$$\vec{j}_{el}(y, t) = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V = -\gamma \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_y ; \vec{j}_{th}(y, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_y ; \vec{j}_m(y, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = -D \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_y$$

La différence ici est que la quantité qui diffuse est un vecteur ($\vec{P}$) contrairement aux trois cas précédents.

- On peut poursuivre l'analogie, en déterminant l'équation de diffusion : Pour cela utilisons l'équation de Navier-Stokes en considérant que seules les forces de viscosité sont les forces appliquées à la particule fluide et en ne considérant que l'accélération locale de la particule fluide (écoulement laminaire) :

$$\mu \cdot \frac{D \vec{V}}{Dt} = \underbrace{-\overrightarrow{\text{grad}}(P)}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{f}_v(M, t)}_{\vec{0}} + \eta \cdot \Delta \vec{V}$$

D'où :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \nu \cdot \Delta \vec{V}$$

⇒ C'est équation est formellement identique aux équations de diffusion thermique, moléculaire et électrique : la viscosité cinématique ν jouant le rôle de diffusivité.

- On peut aussi utiliser la relation classique entre le temps caractéristique de diffusion t^* , la longueur caractéristique de diffusion L^* et la diffusivité égale ici à la viscosité cinématique :

$$L^* = \sqrt{\nu t^*}$$

QUELQUES ODG

	Viscosité dynamique μ ou η (Pa.S)	Viscosité cinématique m^2/s ($\times 10^{-6}$)
Eau (20°C)	10^{-3}	1.006
Air (20°C)	$18.2 \cdot 10^{-6}$	15.1
Glycérine (20°C)	1.49	1180
Benzène (20°)	$0.625 \cdot 10^{-3}$	0.741
Ethanol (20°C)	$1.20 \cdot 10^{-3}$	1.51
Mercure (20°C)	$1.55 \cdot 10^{-3}$	0.116
CO₂ (20°C, 1 atm.)	$14.7 \cdot 10^{-6}$	8.03
H₂ (20°C, 1 atm.)	$8.83 \cdot 10^{-6}$	105

Unités viscosité dynamique : $1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \text{ Pl} = 10 \text{ Po}$ ($\text{Po} = \text{Poise}$)

Unités viscosité cinématique : $1 m^2 \cdot s^{-1} = 10^6 \text{ cSt}$ ($\text{St} = \text{Stoke}$)

2. COMPARAISON DES DEUX TYPES DE TRANSFERT – NOMBRE DE REYNOLDS.

a. A PARTIR DE L'EQUATION DE NAVIER – STOKES.

- Les deux mécanismes de transport de quantité de mouvement ont lieu simultanément, mais n'ont en général pas la même importance.

- Pour les comparer, comparons les ordres de grandeur de l'accélération convective et de la force volumique de viscosité dans l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \cdot \vec{a}(M, t) = \mu \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{\mu (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})(\vec{V})}_{\vec{a}_{\text{convective}}} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{f}_v(M, t) + \underbrace{\eta \cdot \Delta \vec{V}}_{\vec{f}_{v, \text{viscosité}}}$$

Avec :

$$\|\mu (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})(\vec{V})\| \approx \frac{\mu V^2}{L}$$

et :

$$\|\eta \cdot \Delta \vec{V}\| \approx \eta \frac{V}{L^2}$$

⇒ Le rapport entre ces deux grandeurs est appelé nombre de Reynolds :

Le nombre de Reynolds correspond au rapport entre les ordres de grandeur de l'accélération convective et de la force volumique

$$\text{de viscosité : } R_e = \frac{\|\mu (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})(\vec{V})\|}{\|\eta \Delta \vec{V}\|} \approx \frac{V \cdot L}{\nu}$$

⇒ Dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, les forces visqueuses, et le transport diffusif associé, l'emportent sur le transport convectif (écoulements de faible vitesse, de taille caractéristique faible ou encore de fluides très visqueux). Inversement, les écoulements à grand nombre de Reynolds sont des écoulements où le transport convectif l'emporte sur le transport diffusif.

b. A PARTIR DES DENSITES DE COURANT.

- Comparons les ordres de grandeurs des deux vecteurs densité de courant de transport de quantité de mouvement par diffusion et convection :

$$\|\vec{j}_{diff}(x, t)\| = \left\| -\eta \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_x \right\| \approx \eta \frac{V}{L}$$

Et :

$$\|\vec{j}_{conv}(x, t)\| = \|(\mu V^2)(x, t) \vec{e}_x\| \approx \mu V^2$$

D'où le rapport entre les deux :

$$\frac{\|\vec{j}_{conv}(x, t)\|}{\|\vec{j}_{diff}(x, t)\|} = \frac{\mu V^2}{\eta V/L} = \frac{\mu LV}{\eta} = \frac{V \cdot L}{\nu} = R_e$$

Le nombre de Reynolds correspond au rapport entre les ordres de grandeurs des flux convectifs et diffusifs. $\frac{\|\vec{j}_{conv}(x, t)\|}{\|\vec{j}_{diff}(x, t)\|} \approx \frac{V \cdot L}{\nu} = R_e$

c. A PARTIR DES TEMPS DES TEMPS CARACTERISTIQUES.

- Le temps caractéristique de diffusion est :

$$\tau_{diff} = \frac{L^2}{\nu}$$

- Le temps caractéristique de convection est :

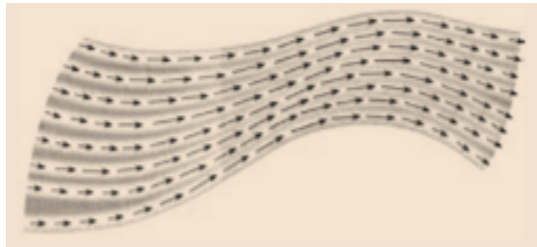
$$\tau_{conv} = \frac{L}{V}$$

- Le nombre de Reynolds correspond au rapport entre ces deux temps (plus le temps de diffusion est grand devant le temps caractéristique de convection, plus l'écoulement est turbulent) :

$$Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} = \frac{LV}{\nu}$$

3. ECOULEMENT LAMINAIRE/TURBULENT.

Écoulement laminaire : Écoulement en tubes de courants. Les particules de fluide se déplacent en procession organisée, chacune suivant le chemin suivi par la précédente. Dans un écoulement laminaire les lignes de courant épousent la forme des obstacles. Ce type d'écoulement correspond en général à « des valeurs de L et V modérées et des valeurs de ν élevées » et donc à des nombres de Reynolds « modérés ».



Exemples importants : Ecoulement de Couette et écoulement de Poiseuille

Écoulement turbulent : Les particules de fluide ont un mouvement chaotique et irrégulier et les lignes de courant s'enchevêtrent. Ce régime correspond en général à des vitesses d'écoulement « élevées », à des valeurs de ν « modérées » et à des valeurs de L « élevées » et donc à des valeurs du nombre de Reynolds « élevées ».

La différence fondamentale entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent, est qu'un écoulement turbulent constitue une solution des équations de la dynamique des fluides, mais que **cette solution est instable**, contrairement au cas de l'écoulement laminaire : la moindre perturbation change considérablement la structure d'un écoulement turbulent. Le champ des vitesses devient beaucoup trop compliqué pour qu'on puisse le décrire en détail, et on doit employer des méthodes statistiques.

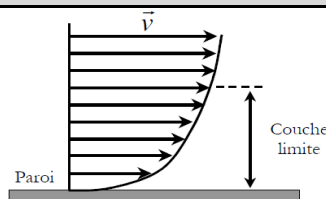
Le nombre de Reynolds est la grandeur pertinente pour caractériser la perte de stabilité d'un écoulement, et donc la transition laminaire/turbulent.

4. COUCHE LIMITE.

a. DEFINITION

L'étude expérimentale montre que la vitesse $\vec{v}$ d'un fluide au contact avec un obstacle augmente de zéro sur la paroi (adhérence imposée par les forces d'attraction intermoléculaires) jusqu'à une valeur correspondant à celle de l'écoulement externe sans frottement. Cette mince zone est appelée couche limite.

On appelle couche limite, la zone d'interface entre un écoulement (écoulement extérieur, parfait) et un obstacle dans laquelle les effets diffusifs prédominent, ces effets permettant de ramener la vitesse de l'écoulement extérieur à zéro au contact avec l'obstacle.



Son concept est dû à Ludwig Prandtl (théorie de la couche limite établie en 1904)

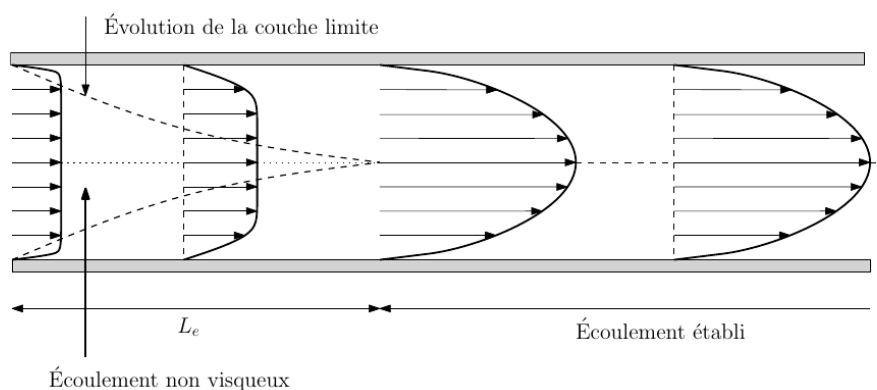
b. PROPRIETES

Dans la couche limite, les contraintes tangentielles sont considérables, même lorsque la viscosité η est faible, car les gradients de vitesse sont importants : on ne peut pas négliger le terme $\eta \vec{\Delta} \vec{v}$ dans l'équation de Navier-Stokes quand on étudie l'écoulement dans la couche limite.

Pour la plupart des cas réels, la couche limite n'est pas de nature homogène au cours de son évolution et, à l'image du comportement d'un fluide dans une conduite, une transition va s'effectuer d'un **régime laminaire vers un régime turbulent**. Notons que dans certains cas, on peut observer aussi un **décollement de la couche limite**.

c. EVOLUTION DE LA COUCHE LIMITE DANS UNE CONDUITE.

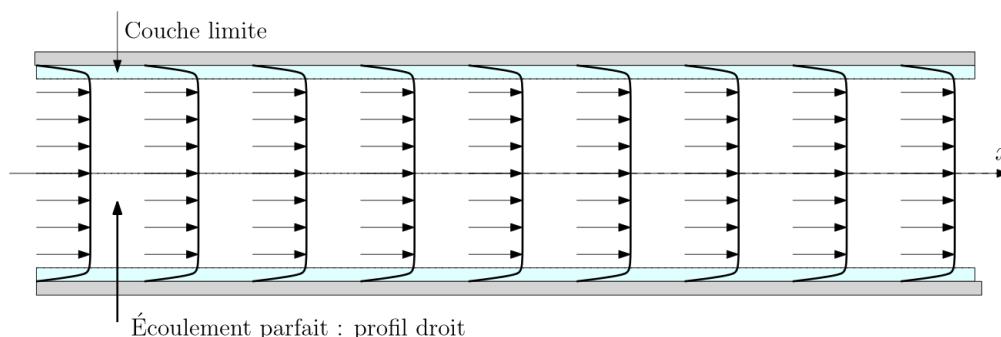
- Dans le cas de l'écoulement laminaire dans une conduite, la couche limite occupe tout l'écoulement :



Pour un diamètre intérieur D , on peut introduire la longueur caractéristique d'entrée L_e :

$$L_e \approx 0,6 D \text{ pour } Re < 100 \text{ et } L_e \approx 0,03 D \text{ à } 0,06 D \text{ pour } 100 < Re < 2000$$

- Dans le cas d'un écoulement turbulent ($Re \gg 2000$), la couche limite a une épaisseur négligeable devant D : Le profil des vitesses reste droit.



La longueur d'entrée est estimée par la formule :

$$L_e = 0,6 \text{ à } 0,8 \times D Re^{1/4} \text{ Pour } Re > 2000$$

L'épaisseur de la couche limite est alors :

$$\delta = 60D \times Re^{-7/8}$$

d. ECOULEMENTS INTERNES/EXTERNES.

On classe les écoulements en fonction de la valeur de R_e : pour se faire il faut distinguer les écoulements internes et externes :

- Les **écoulements externes** concernent les écoulements autour d'obstacles (Ailes d'avion, ballon, voiture...)
 - Un écoulement externe est considéré comme laminaire si $R_e < 1$
 - Un écoulement externe est considéré comme turbulent si $R_e > 10^3$
 - Dans la zone intermédiaire, on trouve l'allée tourbillonnaire de Von Karman
- Les **écoulements internes** concernent les écoulements dans un tube de champ (Conduites, tuyaux, capillaires...)
 - Un écoulement interne est considéré comme laminaire si $R_e \ll 2000$
 - Un écoulement externe est considéré comme turbulent si $R_e \gg 2000$

e. EXEMPLES

ECOULEMENT RAMPANT $R_e \ll 1$

Lorsque les forces d'inertie sont nulles ou négligeables devant les forces de viscosité. On parle alors d'écoulement rampant.

Ce type d'écoulement est obtenu quand :

- Le fluide est de grande viscosité cinématique,



Ecoulement de lave.

- Les vitesses d'écoulement sont relativement lentes,



Ecoulement d'un glacier.

- Il s'agit du mouvement de corps de dimensions réduites, ou d'écoulements dans des conduites de dimensions relativement faibles.



Mouvement d'une bactérie dans un milieu biologique

ÉCOULEMENT LAMINAIRE INCOMPRESSIBLE, POTENTIEL : $\Delta \vec{V} = \vec{0}$ AVEC R_e QUELCONQUE

- On s'intéresse à un écoulement potentiel et incompressible d'un fluide visqueux ou parfait :

$$\text{div } \vec{V} = 0 ; \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{V} = \vec{0}$$

Pour ce type d'écoulement laminaire, le calcul du nombre de Reynolds semble donc a priori inutile puisque le terme diffusif n'intervient pas. En fait ce calcul devient pertinent pour discuter de la possibilité même d'une structure laminaire de l'écoulement, ou plus exactement de sa **stabilité**.

- L'augmentation de la vitesse par exemple dans un écoulement laminaire va créer des instabilités faisant évoluer l'écoulement vers un régime turbulent.



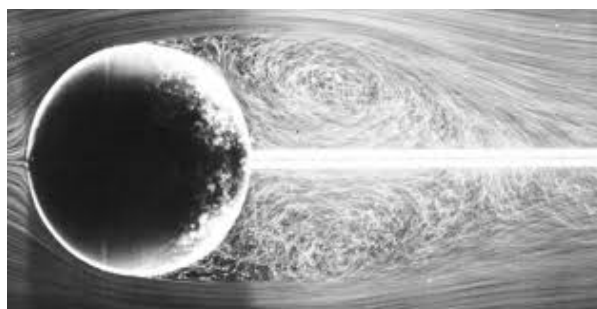
L'écoulement de l'eau à la sortie d'un robinet devient rapidement turbulent ($R_e \approx 10^4$)

ÉCOULEMENTS TURBULENTS

Transition laminaire/turbulent dans une conduite pour $R_e \approx 2000$



Écoulement turbulent autour d'une sphère ($R_e \approx 10^5$)



RETOUR SUR LA NOTION D'ÉCOULEMENT PARFAIT.

- La friction visqueuse, proportionnelle à la vitesse, est paradoxalement négligeable à vitesse élevée, car l'essentiel des variations du champ des vitesses viendra de ses variations spatiales transportées par convection.

Ainsi, dans les écoulements rapides le fluide se comporte comme si sa viscosité était nulle : on parle alors d'écoulement parfait ($\eta \approx 0$).

- Attention toutefois aux conditions aux limites : l'écoulement d'un fluide réel aux grandes valeurs de Re , avec les phénomènes de turbulence qui s'y produisent, est loin d'être un écoulement de fluide parfait. On peut comprendre de paradoxe en notant que la viscosité intervient dans l'équation de Navier - Stokes dans le terme $\eta \Delta \vec{v}$: ce terme n'est pas partout petit, même si η est faible, car **il y a toujours des régions où $\vec{v}$ varie rapidement en fonction des coordonnées (en particulier dans la couche limite) de sorte que le produit $\eta \Delta \vec{v}$ ne soit plus négligeable.**
- Le modèle du fluide parfait utilisé au chapitre précédent est compatible avec l'équation de Navier-Stokes (en prenant $\eta = 0$), mais **il ne peut en général pas satisfaire les conditions aux limites**. En effet, supprimer les termes de viscosité revient à diminuer d'une unité l'ordre des équations aux dérivées partielles, par suite le nombre des constantes d'intégration est réduit d'une unité. Cela revient à supprimer une condition aux limites du problème original. En effet : Pour l'écoulement visqueux, il y adhérence du fluide à toute paroi solide : ($\vec{v}_{\parallel paroi} = \vec{0}$ et $\vec{v}_{\perp paroi} = \vec{0}$) alors que pour l'écoulement potentiel, on suppose seulement le glissement à la paroi : ($\vec{v}_{\perp paroi} = \vec{0}$).

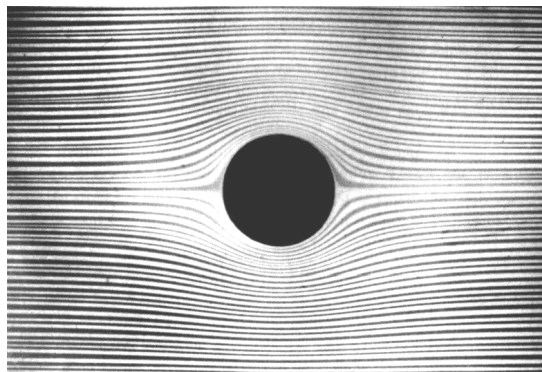
III. ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE AUTOUR D'UN OBSTACLE.

1. DESCRIPTION DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN OBSTACLE.

a. OBSERVATION EXPERIMENTALE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE.

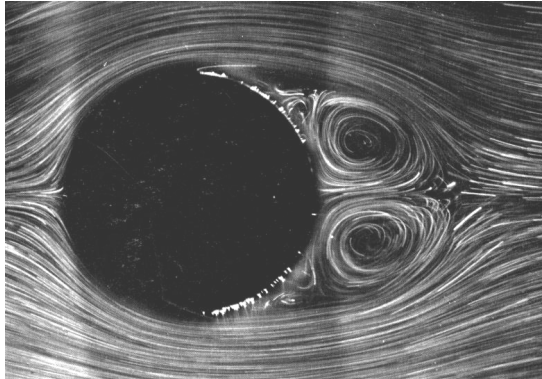
On étudie l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre pour différents nombres de Reynolds et on se place dans le référentiel lié au cylindre.

- $0 < Re < 10$** : Les lignes de courant sont symétriques par rapport au plan perpendiculaire à l'écoulement et passant par l'axe du cylindre (plan Π_1). L'écoulement est réversible : les termes non linéaires de l'équation de Navier-Stokes sont négligeables. L'écoulement est laminaire.



Quand on Re augmente, les lignes de courant restent bien dessinées mais on perd la symétrie par rapport au plan Π_1 et donc la réversibilité de l'écoulement.

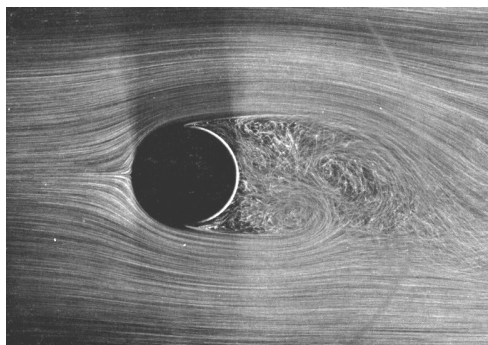
- **Pour $R_e \approx 10$** : Il apparaît derrière le cylindre un sillage formé d'une paire de tourbillons stables (zone de recirculation). L'écoulement est toujours symétrique par rapport au cylindre mais perd sa symétrie par rapport à l'amont et à l'aval du cylindre. Les dimensions du tourbillon augmentent avec R_e .



- **Pour $R = R_c \approx 47$** : La zone de recirculation occupe toute la partie aval du cylindre,
- **Pour $R_c < R_e < 300$** : l'écoulement cesse d'être stationnaire et la vitesse du fluide dépend du temps
Des tourbillons se détachent périodiquement en aval de l'écoulement. Ils forment une double rangée de tourbillons, appelée « allée de Bénard Von Karman ». Ainsi, le plan horizontal, contenant l'axe du cylindre, n'est plus un plan de symétrie pour l'écoulement instantané, mais seulement pour l'écoulement moyenné dans le temps.



- **Pour R_e compris entre 300 et 5.10^5** : les tourbillons se détachent du cylindre au-delà d'une zone entourant le cylindre appelée couche limite et l'écoulement devient alors turbulent : Dans ces zones turbulentes, le champ de vitesse échappe au déterminisme (on parle de domaine chaotique). Dans de tels régimes d'écoulement, les prédictions deviennent difficiles (ex météorologie) et requièrent une description statistique.



- Pour $2 \cdot 10^5 < Re < 10^6$: Diminution brutale de la taille du sillage.

b. ECOULEMENT AUTOUR D'UNE SPHERE.

Pour un écoulement autour d'une sphère, on observe le même type de comportement mais les valeurs de Re sont différentes :

- Pour $Re \approx 20$: apparition des tourbillons de recirculation.
- Pour $Re \approx 300$: la zone de recirculation occupe toute la partie aval de la sphère.
- Pour $300 < Re < 1000$: allée tourbillonnaire de Von Karman.
- Pour $1000 < Re < 2 \cdot 10^5$: Régime turbulent avec en aval de la sphère un sillage turbulent dissipant beaucoup d'énergie.
- Pour $2 \cdot 10^5 < Re < 10^6$: Diminution brutale de la taille du sillage.

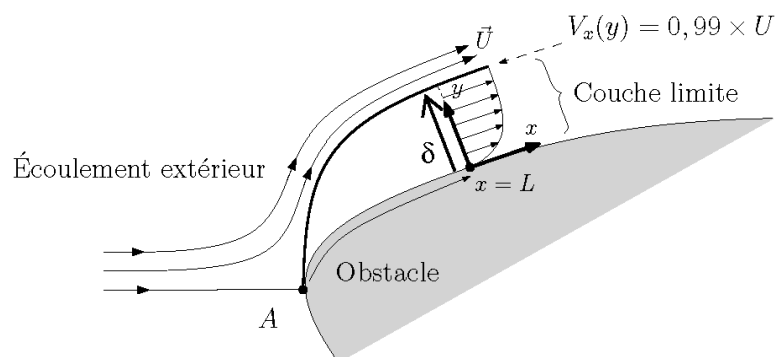
2. INTERPRETATION : ROLE DE LA COUCHE LIMITE.

a. DESCRIPTION DE L'EVOLUTION DE LA COUCHE LIMITE AUTOUR D'UN OBSTACLE.

- En général, la couche limite est très mince aux limites amont d'un obstacle (à partir du point d'arrêt), mais elle augmente d'épaisseur en raison de l'action continue de la contrainte tangentielle visqueuse (diffusion de quantité de mouvement)
 - Pour des nombres de Reynolds faibles, la couche limite toute entière est soumise aux forces de viscosité et l'écoulement y est laminaire.
 - Pour des valeurs moyennes de Re , la couche limite est laminaire aux limites amont de l'obstacle et turbulente au-delà.
 - Pour des nombres de Reynolds élevés, la couche limite toute entière est turbulente.
- La couche limite n'adhère pas dans tous les cas à la paroi de l'obstacle pendant tout le temps de son développement et, à un moment, peut survenir son décollement. Ce phénomène est toujours associé à la formation de gros tourbillons, initiateurs du sillage d'un obstacle par exemple.

b. TAILLE D'UNE COUCHE LIMITE LAMINAIRE.

- Dans la couche limite, le transport diffusif domine le transport convectif, alors qu'à l'extérieur de la couche limite, c'est l'inverse.



- En écrivant qu'au bord de la couche limite (épaisseur δ), les deux termes de l'équation de Navier – Stokes sont du même

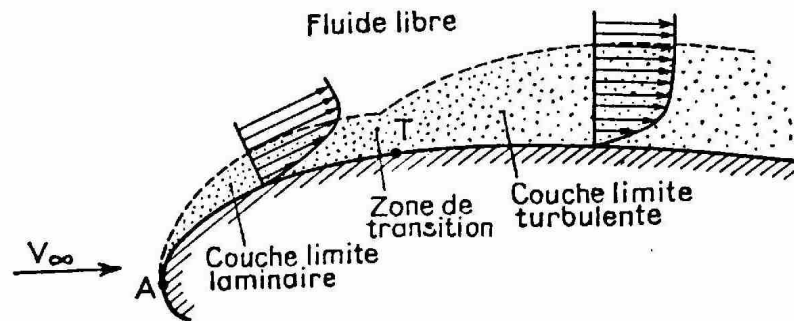
ordre de grandeur, on obtient : $1 \approx \frac{\mu(\vec{v} \cdot \text{grad})(\vec{v})}{\eta \cdot \Delta \vec{v}} \approx \frac{(\frac{\mu V^2}{L})}{(\frac{\eta V}{\delta^2})} = \frac{(\frac{\mu V L}{\eta})}{Re} \cdot \left(\frac{\delta^2}{L^2}\right)$

Epaisseur de la couche limite : $\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$

- AN : Pour une voiture roulant à 90 km/h (en prenant $L=2\text{m}$, $\mu=1,3 \text{ kg/m}^3$ et $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}$), on obtient $Re=4 \cdot 10^6$ et $\delta \approx 1 \text{ mm}$!

c. COUCHE LIMITE LAMINAIRE/COUCHE LIMITE TURBULENTE.

La couche limite se développe le long de l'obstacle à partir du point d'arrêt A. Au voisinage de ce point, l'écoulement dans la couche limite est d'abord laminaire, mais il devient turbulent à partir d'une certaine distance. Le passage s'effectue le long d'une zone critique appelée zone de transition d'étendue faible.



- Ainsi, l'écoulement dans la couche limite peut être laminaire ou turbulent, indépendamment de l'écoulement extérieur.
- Sachant que le nombre de Reynolds local dans la couche limite est :

$$Re_{local} = \frac{\mu \delta V}{\eta}$$

et compte tenu de l'expression de $\delta \approx \frac{L}{\sqrt{Re}}$, on en déduit :

$$Re_{local} = \underbrace{\frac{\mu LV}{\eta}}_{Re} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re}} = \sqrt{Re}$$

- Si l'on considère que la transition laminaire/turbulent se fait pour $Re_{local} \approx 10^3$, on obtient alors la valeur de Re pour laquelle on observe la transition laminaire/turbulent dans la couche limite :

$$Re_{local} = \sqrt{Re} : \text{la couche limite devient turbulente pour } Re_{local} \approx 10^3 \text{ et donc pour } Re = 10^6$$

Cette transition coïncide avec la chute du sillage autour d'un obstacle. En effet, dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre ou d'une sphère, la couche limite devient turbulente pour $2 \cdot 10^5 < Re < 10^6$: cela coïncide bien avec une diminution brutale de la taille du sillage. Ceci s'explique grâce aux propriétés d'une couche limite turbulente et notamment le décollement de cette couche limite.

d. DECOLLEMENT DE LA COUCHE LIMITE.

MODELE :

- On considère l'écoulement extérieur incompressible-homogène, stationnaire et parfait, caractérisé par les champs $V(x)$, $P(x)$ et on néglige les effets de la pesanteur. Le théorème de Bernoulli permet donc d'écrire :

$$\frac{dP}{dx} \propto -\frac{dV}{dx}$$

Avant le col, on a :

$$\frac{dP}{dx} < 0 \text{ et } \frac{dV}{dx} > 0$$

Au niveau du col :

$$\frac{dP}{dx} = 0 \text{ et } \frac{dV}{dx} = 0$$

Après le col :

$$\frac{dP}{dx} > 0 \text{ et } \frac{dV}{dx} < 0$$

Le champ des pressions après le col est dit défavorable.

▪ **L'écoulement dans la couche limite** est laminaire,

- Le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v} = \underbrace{v_x(x, y)}_{u(x, y)} \vec{e}_x + v_y(x, y) \vec{e}_y$$

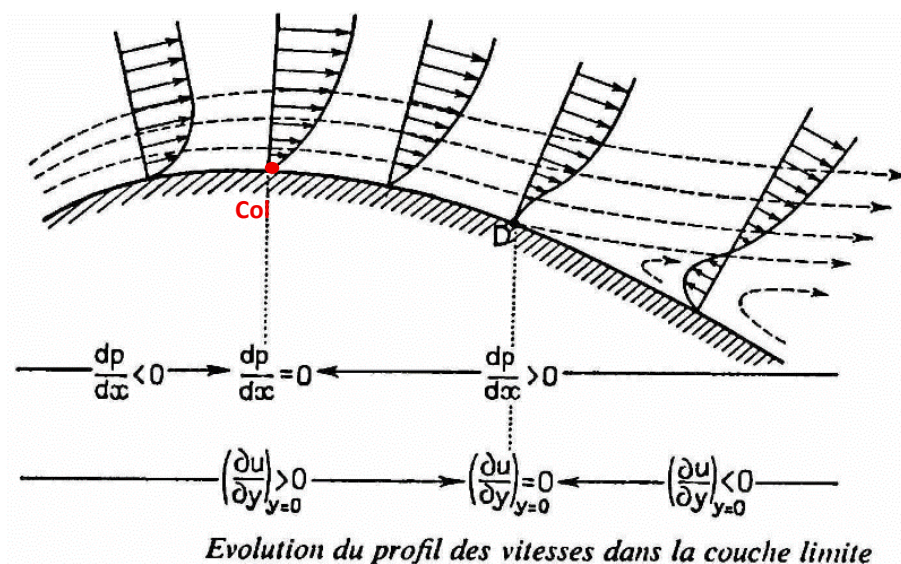
- Le champ des pressions est imposé par l'écoulement extérieur :

$$P_{cl}(x) \propto P(x)$$

- On admet qu'avant le col, on a :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} > 0$$

EVOLUTION



- Avant le col, l'écoulement dans la couche limite se rapproche d'un écoulement de Couette : la vitesse (suivant x) augmente continuellement avec y .
- Après le col, le champ des pressions est défavorable et les particules fluides sont ralenties par ce champ de pression :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} > 0 \text{ diminue après le col}$$

- Le décollement se produit précisément lorsque ce terme s'annule :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \text{ au point de décollement } D$$

- Après le décollement, il se forme dans la couche limite des tourbillons de recirculation : c'est le début du sillage

Le point de décollement D est un point singulier où le gradient de vitesse s'annule et où la couche limite décolle

DECOLLEMENT D'UNE COUCHE LIMITE LAMINAIRE ET D'UNE COUCHE LIMITE TURBULENTE

Le décollement de la couche limite peut intervenir sur une couche limite laminaire ou turbulente, mais le point essentiel à retenir est qu'une couche limite turbulente se décolle moins facilement et moins brusquement qu'une couche limite laminaire.

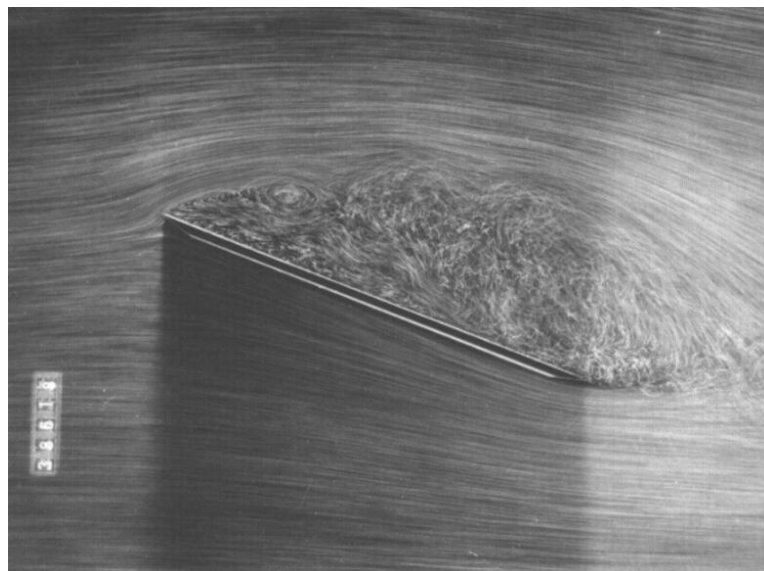
Cela s'explique bien si l'on se rappelle que la couche turbulente et le fluide libre (extérieur) échangent des quantités de mouvement d'une façon beaucoup plus vive et importante que la couche laminaire, aussi les particules de fluide voisines de la paroi conservent elles plus facilement leur énergie cinétique dans la couche turbulente que dans la couche laminaire.

Dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre :

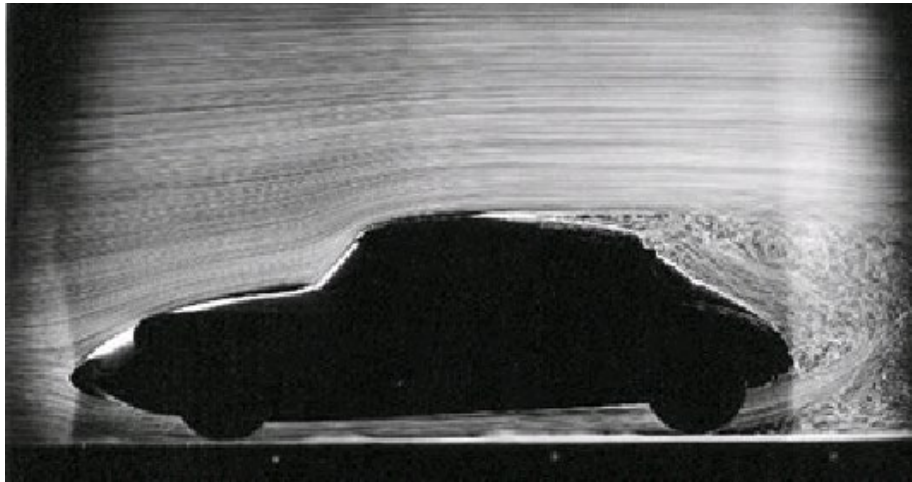
- Le décollement de la couche limite laminaire apparaît pour $Re \approx 300$: **plus Re augmente plus le point de décollement est en amont du cylindre et plus le sillage est important.**
- La transition laminaire/turbulent de la couche limite apparaît pour $2 \cdot 10^5 < Re < 10^6$, la couche limite turbulente adhérant mieux à la paroi, le point de décollement se déplace vers l'aval du cylindre. **Plus Re est important, plus le point de décollement est en arrière du cylindre et plus le sillage diminue.**

La crise de trainée est donc due à la transition laminaire turbulent de l'écoulement dans la couche-limite : une couche limite turbulent adhérant mieux à la paroi, le point de décollement D se décale vers l'aval de l'obstacle

- Autres exemples de décollement de couche limite :



Décollement de la couche limite le long d'une plaque.

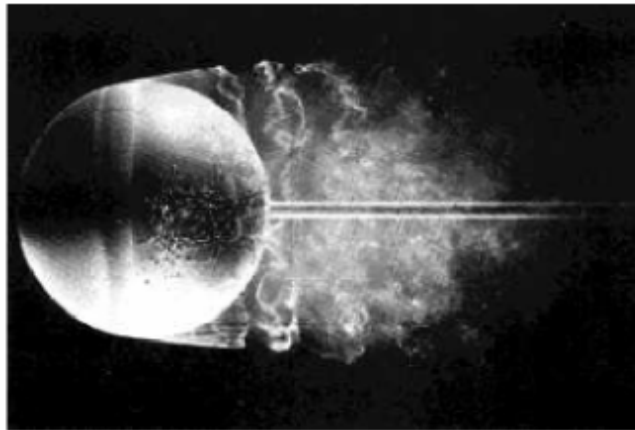


Décollement de la couche limite le long d'une voiture.

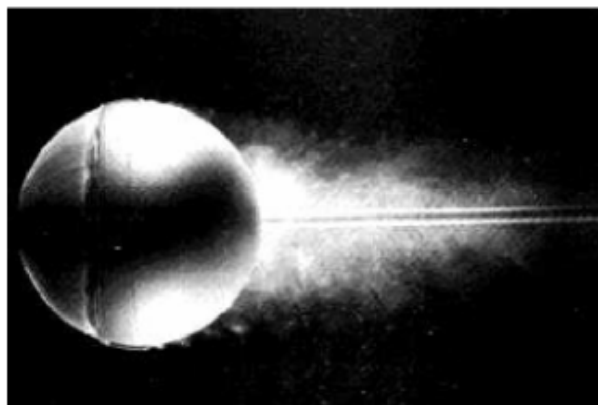
e. AVANTAGES D'UNE COUCHE LIMITE TURBULENTE :

La transition laminaire - turbulente est favorable car elle a pour effet de réduire le sillage (et donc la traînée).

- Cette propriété est mise à profit dans la conception des balles de golf : leur surface irrégulière favorise la transition vers une couche limite turbulente, qui diminue la traînée, augmentant par là même la portée des balles.



Absence d'aspérité : couche limite laminaire, sillage et trainée importants



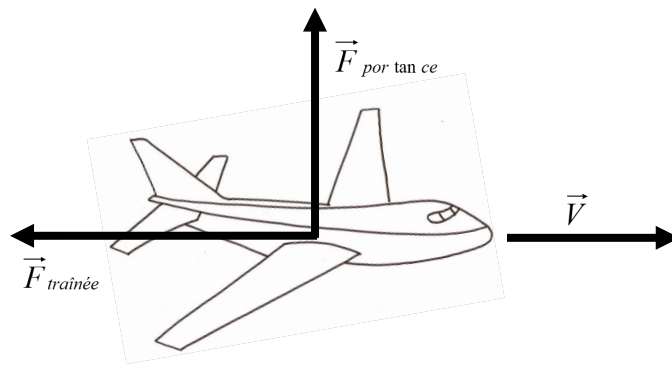
Présence d'un aspérité : couche limite turbulente, sillage et trainée réduits.

IV. FORCE DE TRAINEE EXERCEE SUR UN OBSTACLE EN TRANSLATION UNIFORME DANS UN FLUIDE.

1. FORCE DE TRAINEE ET PORTANCE.

a. DESCRIPTION

- Un corps solide, en mouvement de translation dans un fluide, est soumis à des forces, réparties en surface, dont les valeurs et distributions dépendent du fluide, de son état physique, de la vitesse relative, et bien sûr de la forme du corps et de la rugosité de sa surface.
- La somme de ces forces peut être décomposée en une composante dirigée en sens inverse de la vitesse, appelée *résistance* ou **traînée**, et une composante perpendiculaire appelée **portance** en aérodynamique.



Dans ce qui suit, nous nous limiterons à l'étude de la traînée.

- Expérimentalement, on constate l'existence de deux régimes particuliers :
 - ✓ Aux faibles vitesses, l'écoulement du fluide autour du corps est laminaire, c'est-à-dire sans turbulences. Le fluide possède une vitesse locale, égale à celle du corps à la surface de celui-ci, et décroissant régulièrement en fonction de son éloignement du corps. Les "couches" de fluide glissent les unes sur les autres, avec frottement interne ; c'est le phénomène de viscosité ; l'effet résultant sur le corps de ces forces de frottement internes le freine et donne la traînée : celle-ci est alors proportionnelle à la viscosité du fluide et à la vitesse de l'obstacle :

$$\vec{F}_{trainée} = \vec{T} \propto -\vec{V}$$

$$\|\vec{F}_{trainée}\| \propto \eta$$

- ✓ Un autre régime se rencontre pour des vitesses relatives nettement plus élevées ; le corps "pousse" violemment le fluide devant lui et il se forme à l'arrière un sillage avec turbulences où le fluide est partiellement entraîné avec le corps solide. Expérimentalement, on constate qu'il existe toute une plage de vitesse pour laquelle la traînée est proportionnelle au carré de la vitesse. Dans ce régime, c'est la mise en mouvement du fluide par le corps, donc son inertie, qui prédomine dans l'effet de traînée : celle-ci est proportionnelle à V^2

$$\vec{F}_{trainée} = \vec{T} \propto -V \vec{V}$$

- Entre ces deux régimes, il existe toute une gamme de vitesses intermédiaires pour lesquelles les deux propriétés, viscosité et inertie du fluide, jouent un rôle, et la relation traînée-vitesse n'y possède pas d'expression simple.

a. TRAINEE EN REGIME LAMINAIRE.

- Dans le cas d'une sphère de rayon r se déplaçant à faible vitesse V dans un fluide, on peut démontrer, à partir des équations de l'hydrodynamique, que la traînée est donnée par une formule due à Stokes :

$$\vec{F}_{\text{traînée}} = \vec{T} = -6\pi r \eta \vec{V} \quad (1)$$

- Le facteur 6π est propre à la sphère, mais la structure de cette équation est générale :

La force de traînée agissant sur un objet quelconque se déplaçant à faible vitesse est proportionnelle :

A la vitesse de l'objet $\vec{V}$ ¹

A la viscosité du fluide η ²

A une longueur caractéristique de l'objet L (dans le cas de la sphère : le diamètre).

$$\Rightarrow \vec{T} \propto -\eta L \vec{V} \text{ Loi de Stokes}$$

b. TRAINEE A GRANDE VITESSE.

- Lorsqu'un objet se déplace à grande vitesse dans un fluide de masse volumique μ , il met le fluide en mouvement dans son sillage. L'énergie ainsi communiquée, égale à $\frac{1}{2}\mu V^2$ par unité de volume, a pour effet de ralentir le mobile et doit donc intervenir dans l'expression de la force de frottement. La dimension latérale du sillage étant de l'ordre de grandeur de la surface apparente S présentée par le corps perpendiculairement à la vitesse (surface appelée « maître-couple »).

La force de traînée exercée sur un objet quelconque se déplaçant à grande vitesse est proportionnelle :

A la vitesse de l'objet au carré V^2

A la masse volumique du fluide μ .

A la surface apparente de l'objet S

$$\vec{T} = -C_x \frac{1}{2} \mu V^2 S \left(\frac{\vec{V}}{V} \right) \quad (2)$$

L'intérêt de cette définition est que le coefficient C_x est un nombre sans dimension. Il dépend de la forme du corps et de son orientation par rapport à la direction de la vitesse, et il est mesuré en soufflerie. Les constructeurs automobiles cherchent évidemment à réduire la valeur de C_x , car en réduisant la traînée, on réduit la consommation du véhicule.

¹ La vitesse V correspond à la vitesse limite de déplacement de l'objet dans le fluide

² La viscosité d'un fluide dépend de sa température. Mais alors que la viscosité d'un liquide, en général, diminue lorsque la température augmente (penser à de l'huile dans une poêle que l'on chauffe), celle d'un gaz croît avec la température. Cette différence de comportement tient au rôle des interactions. Dans le cas d'un liquide, les molécules sont liées les unes aux autres, et la force qu'une couche de fluide exerce sur sa voisine sera d'autant plus faible que les molécules peuvent bouger facilement : ce mouvement est facilité lorsque la température augmente, d'où diminution de la viscosité. Dans un gaz, les interactions sont souvent négligeables et l'action d'une couche de gaz sur une voisine est directement liée à la vitesse moyenne des molécules ; une théorie simple conduit à une viscosité proportionnelle à la racine carrée de la température absolue ; l'expérience donne une variation plus importante, en T^α avec α de l'ordre de 0,8 pour l'air.

En ce qui concerne les effets de la pression, là aussi gaz et liquides ont des comportements différents : une augmentation de pression a tendance à empêcher le mouvement des molécules d'un liquide, donc à augmenter sa viscosité. En revanche la viscosité d'un gaz dépend très peu de la pression

Fig. 19		Géométries	C _{xp}
a		$\frac{h}{b} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 10 \\ 18 \\ \infty \end{cases}$	$\begin{matrix} 1,10 \\ 1,15 \\ 1,19 \\ 1,29 \\ 1,40 \\ 2,01 \end{matrix}$
b			1,11
c		$\frac{L}{D} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{cases}$	$\begin{matrix} 0,91 \\ 0,85 \\ 0,87 \\ 0,99 \end{matrix}$
d		$\frac{L}{D} = \begin{cases} 1 \\ 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$	$\begin{matrix} 0,93 \\ 0,78 \\ 1,04 \\ 1,52 \end{matrix}$
e		$\frac{L}{D} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \\ 40 \\ \infty \end{cases}$ Re ~ 9.10 ⁴ (sous-critique) Re ~ 5.10 ⁵	$\begin{matrix} 0,63 \\ 0,68 \\ 0,74 \\ 0,82 \\ 0,98 \\ 1,02 \\ 0,35 \end{matrix}$
	Coef. de correction de l'obliquité $C_{xp\alpha} = k \cdot C_{xp0}$		
	k pour alpha		
	1,0 0°		
	0,7 30°		
	0,2 60°		
f		$\begin{matrix} \text{Sans fond} \\ \text{Avec fond} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,34 \\ 0,40 \end{matrix}$
g		$\begin{matrix} \text{Sans fond} \\ \text{Avec fond} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,33 \\ 1,17 \end{matrix}$

Plaque plane près du sol		C _{xp}
a		1,27
b		0,9
c		0,52
d		0,34
e		0,2
f		0,43
g		0,75 à 0,9
h		Premier régime 0,51 Sphère Second régime 0,1
i		0,16
j		0,054

c. CAS GENERAL

Dans la gamme des vitesses intermédiaires, la viscosité et les effets de sillage (donc l'inertie du fluide), jouent un rôle, mais on ne dispose pas d'une relation simple entre la traînée et la vitesse. Compte tenu de l'importance des situations où l'inertie du fluide joue un rôle prédominant (traînée en V^2), on convient d'écrire :

Dans tous les cas la force de traînée³ est de la forme :

$$\vec{T} = -C_x \frac{1}{2} \mu V^2 S \left(\frac{\vec{V}}{V} \right)$$

Avec C_x , coefficient de traînée, fonction de la vitesse.

Dans le cas d'une sphère, pour $R_e < 1$, la traînée est donnée par la formule de Stokes $T = 6\pi r \eta V$; en utilisant $S = \pi r^2$, on obtient :

$$C_x = \frac{12\eta}{r\mu V}$$

d. NOMBRE DE REYNOLDS.

Il est intéressant de considérer le rapport des deux expressions de la traînée, à grande vitesse et à vitesse faible. Pour exprimer le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{\|\vec{T}_{trainée}\|_{grande\ vitesse}}{\|\vec{T}_{trainée}\|_{faible\ vitesse}} \approx \frac{\frac{1}{2} \rho C_x S V^2}{\eta L V} \approx \frac{\rho L^2 V^2}{\eta L V} = \frac{LV}{\nu}$$

On ne considère que les grandeurs dimensionnées (c'est-à-dire en laissant de côté les coefficients numériques)

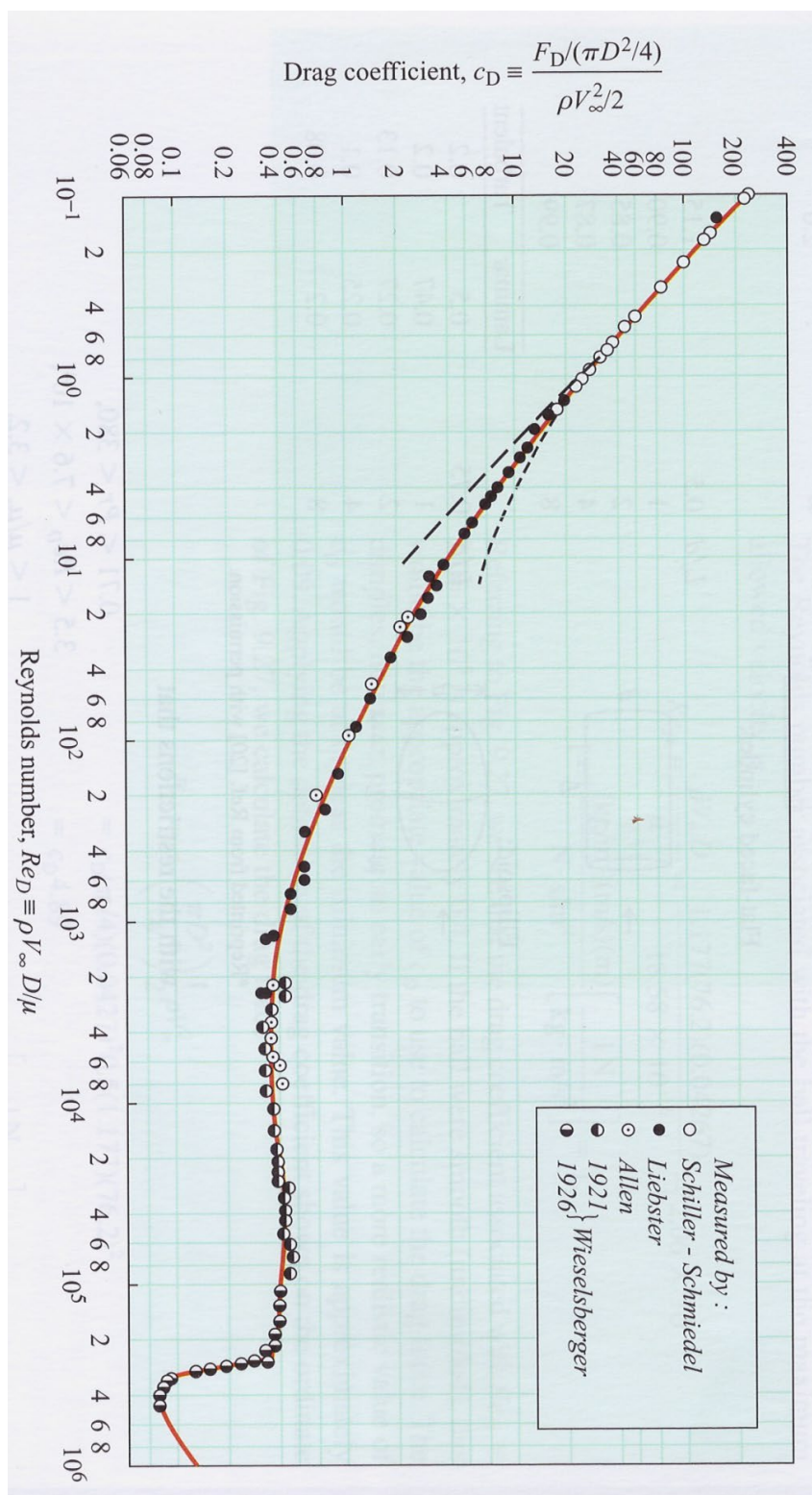
Le nombre de Reynolds correspond au rapport entre les ordres de grandeurs de la force de traînée à grande vitesse et la force de traînée à faible vitesse :

$$R_e = \frac{\|\vec{T}_{trainée}\|_{grande\ vitesse}}{\|\vec{T}_{trainée}\|_{faible\ vitesse}} = \frac{VL}{\nu}$$

³ De même la portance se met sous la forme : $\vec{F}_{portance} = C_z \frac{1}{2} \mu V^2 S \vec{u}_N$ où C_z est le coefficient de portance. Ce coefficient dépend de nombreux paramètres et notamment de l'angle d'attaque : lorsque l'angle augmente la portance augmente jusqu'à l'angle de portance maximale qui dépend du profil de l'objet. Une fois cet angle dépassé, la portance s'effondre, c'est le décrochage.

2. ETUDE EXPERIMENTALE DU COEFFICIENT DE TRAINEE D'UNE SPHERE.

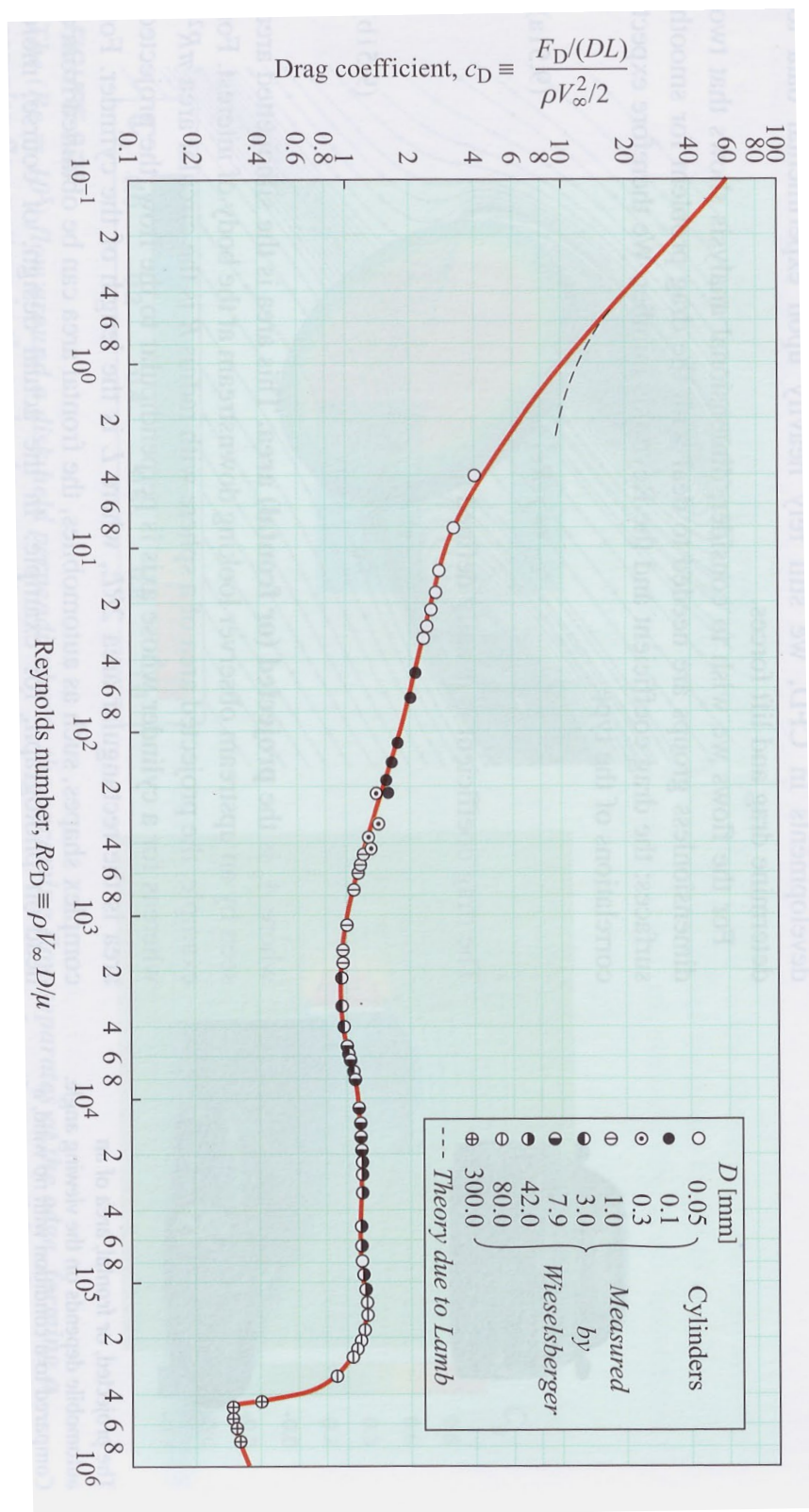
Pour une sphère, $S = \pi r^2$ et on prend pour L son diamètre $2r$. Ainsi : $T = C_x \frac{1}{2} \mu V^2 \pi r^2$ et $R_e = \frac{\mu V(2r)}{\eta} = \frac{V(2r)}{\nu}$



Le graphe reproduit ci-dessus représente C_x (C_D) en fonction de R_e , en coordonnées log-log : en abscisses $\log_{10}(R_e)$, en ordonnées $\log_{10}(C_x)$.

3. ETUDE EXPERIMENTALE DU COEFFICIENT DE TRAINEE D'UN CYLINDRE.

Pour un cylindre, $S = 2r \times L = D \times L$ Ainsi : $T = C_x \frac{1}{2} \mu V^2 DL$ et $R_e = \frac{\mu V(2r)}{\eta} = \frac{V(2r)}{\nu}$



Le graphe reproduit ci-dessus représente C_x (C_D) en fonction de R_e , en coordonnées log-log : en abscisses $\log_{10}(R_e)$, en ordonnées $\log_{10}(C_x)$.

4. INTERPRETATION.

Plaçons-nous dans le cas de l'écoulement autour de la sphère.

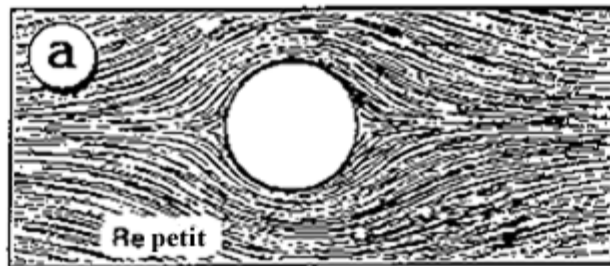
- Rappelons que le nombre de Reynolds est proportionnel à la vitesse relative corps/fluide. Aussi, les faibles nombres de Reynolds correspondent aux faibles vitesses, donc au cas où les forces de viscosité dominent, et les grandes valeurs de Re aux grandes vitesses où les effets d'inertie dominent.
- **Pour des valeurs faibles de Re :**

La traînée, due à la viscosité, est donnée par la formule de Stokes ; en utilisant l'expression du nombre de Reynolds, ce

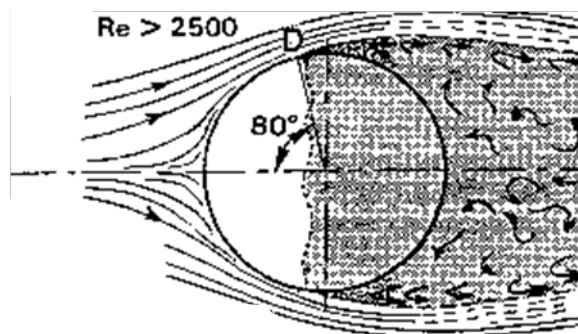
résultat se traduit par :
$$\begin{cases} C_x = \frac{12\eta}{r\mu V} \\ Re = \frac{\mu V(2r)}{\eta} \end{cases} \Rightarrow C_x = \frac{24}{Re}$$

$\Rightarrow$ Soit en coordonnées log-log : $\log_{10}(C_x) = -\log_{10}(Re) + \log_{10}(24)$

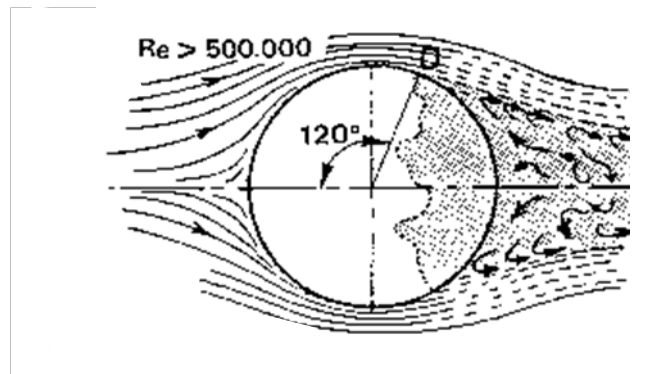
$\Rightarrow$ C'est la droite de pente -1 ajoutée au graphe : La coïncidence montre que la loi de Stokes est valable pour $Re \leq 1$.



- **Pour $Re \approx 1000$:** Le C_x devient constant. le régime turbulent est alors installé, mais la transition n'a bien sûr pas lieu pour une valeur déterminée, la transition est continue.
- **Pour $1000 < Re < 2 \times 10^5$:** La traînée est en V^2 et le C_x est constant : C_x vaut alors environ 0,45. Notons que la couche limite, laminaire en amont, se décolle « rapidement », le sillage est alors important et donc la traînée aussi.



- **Pour $2 \times 10^5 < Re < 1 \times 10^6$:** La diminution brusque de C_x est due à une modification de la "couche limite" : La couche limite devient entièrement turbulente et adhère ainsi mieux à la sphère. Le décollement de la couche limite se fait donc plus en aval de la sphère et le sillage est moins important : la traînée diminue.



AUTRES ORDRES DE GRANDEURS.

- Pour une chute dans du glycérol pur à 25°C, la formule de Stokes est valable pour des billes (du verre au plomb) de rayon inférieur à 2 mm environ.
- Pour une chute dans de l'eau pure, on obtient une traînée en v^2 pour un rayon de bille supérieur à 1mm environ.
- Pour une automobile, prenons $d = 1,5$ m ; avec $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ g.L}^{-1}$, $\eta_{\text{air}} = 18,6 \times 10^{-6} \text{ Pa.s}$, on obtient des nombres de Reynolds allant de 3×10^5 à 3×10^6 pour des vitesses de 10 à 100 km/h. Ce sont des situations où une traînée en v^2 est observée. Les constructeurs d'automobiles cherchent à obtenir des C_x les plus faibles possibles pour diminuer la traînée et économiser le carburant. Les véhicules modernes ont des C_x de l'ordre de 0,30 au mieux.