EXERCICE 1

Isolation thermique d'un tube

Figure 1

Un tube de cuivre de longueur L, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 est entouré d'un isolant thermique de rayon extérieur $R_3 = R_2 + e$. Le cuivre a une conductivité thermique K_1 et l'isolant une conductivité thermique K_2. Un fluide à la température constante T_i circule à l'intérieur du tube et l'air qui l'entoure est à la température constante $T_e < T_i$. On tiendra compte des transferts thermiques conducto-convectifs au niveau des parois intérieure et extérieure du tube : la puissance thermique traversant une surface S de paroi vers le fluide s'écrit : $\Phi_{paroi\to fluide} = hS(T_{paroi} - T_{fluide})$. On notera h et h' les coefficients respectifs d'échanges thermiques de surface à l'interface paroi-fluide et paroi-air. La température dans les matériaux ne dépend donc que de la distance à l'axe des cylindres. On se place par la suite en régime stationnaire.

1. Un ajout d'isolant autour du tube de cuivre permet-il toujours de diminuer le flux thermique à travers le cylindre ? On pourra comparer la résistance thermique du tube sans isolant à celle du tube avec isolant.
2. Quelle est l'épaisseur minimale d'isolant pour réduire les pertes thermiques ?
3. En supposant tous les autres paramètres inchangés, comment doit-on choisir K_2 pour que l'isolant réduise les pertes quelle que soit l'épaisseur e ?

Données : R_1 = 8 mm ; R_2 = 10 mm ; T_i = 120 °C ; T_e = 20 °C ; L = 1 m ; K_1 = 377 S.I ; K_2 = 0,30 SI ; $h = 600\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}$; $h' = 10\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}$.

EXERCICE 2

Pont thermique

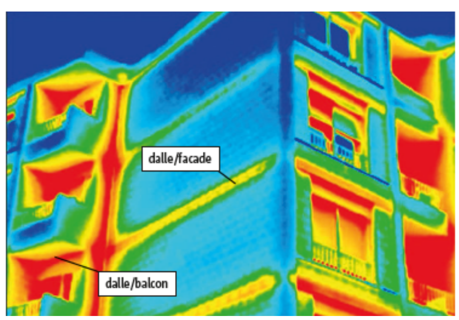

Figure 2

Une poutre en béton horizontale de section carrée (a = 20 cm) traverse un mur et est en contact sur une longueur L = 2 m avec l'air extérieur à la température T_0. La paroi du mur est la température T_1. On modélisera les échanges thermiques par la surface latérale de la poutre selon la loi de Newton : la puissance thermique traversant une surface S de paroi de béton vers le fluide s'écrit :$\Phi_{paroi\to fluide} = hS(T_{paroi} - T_{fluide})$ où h vaut $10\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}$. La conductivité thermique du béton est $\lambda = 1$ SI. Comparer le flux thermique traversant la section carrée a^2 en $x = 0$ avec et sans poutre et commenter le terme de pont thermique qualifiant la présence de la poutre.

EXERCICE 3

Fusible.

FIGURE 3

Un fil cylindrique en plomb de rayon a, de longueur L, est utilisé comme fusible. Il est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite. Les températures aux extrémités sont imposées et égales à celle du milieu ambiant T_0. Le fil est parcouru par un courant électrique continu d'intensité I. L'étude se fait en régime stationnaire. On désire fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{max} = 10$ A.

1. Après avoir déterminé le profil de température $T(x)$ du fil de plomb, déterminer le rayon a du fil.
2. Pour un fil de rayon a parcouru par un courant $-\dfrac{I_{max}}{2}$, déterminer l'entropie créée dans le fil par unité de temps.

Données

✘ Conductivité thermique du plomb : $\lambda = 35\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}K^{-1}}$

✘ Conductivité électrique du plomb : $\gamma = 5.0 \times 10^6\,\Omega^{-1}{\cdot}\mathrm{m}^{-1}$

✘ Température de fusion du plomb : $T_f = 600$ K

✘ Longueur du fil : $L = 3{,}0$ cm

✘ $T_0 = 300$ K

EXERCICE 4

Ailette de refroidissement.

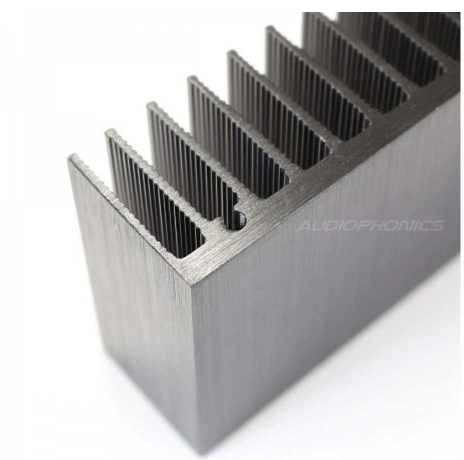

FIGURE 4

On considère une barre horizontale cylindrique de cuivre homogène, de rayon $a = 1{,}0$ cm et de conductivité thermique $\lambda = 4.0\,\mathrm{W{\cdot}cm^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. Une des extrémités de la barre est maintenue à la température T_1, supérieure à celle T_0 de l'air. Les échanges thermiques avec l'air ambiant sont caractérisés par une puissance surfacique égale à $h(T_s - T_0)$ où T_s représente la température de surface au point considéré. On suppose que la température de la barre ne dépend que de x et on se place uniquement en régime stationnaire.

1. Déterminer $T(x)$ en supposant que la tige est infinie. Donner une condition sur la longueur de la tige pour qu'on puisse la considérer comme infinie. Dans le cas d'une convection naturelle on a $h = 20\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}$; effectuer l'application numérique.
2. Déterminer à partir de raisonnements physiques une condition sur λ, a et h pour que l'on puisse considérer que la température ne dépend que de x. Cette condition est-elle vérifiée en pratique ? Le serait-elle également dans le cas d'une convection forcée où h est cent fois plus grand ?

EXERCICE 5

Chauffage d'un appartement.

Un appartement est assimilé à un parallélépipède de largeur 5,00 m, de longueur 9,00 m et de hauteur 2,50 m. Seuls deux murs orthogonaux comportant une fenêtre sont en contact avec le milieu extérieur à la température T_0. Les murs sont constitués d'une épaisseur de 30,0 cm de briques de conductivité thermique $\lambda = 1.00\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Les vitres de surface totale 3,00 m^2 sont constituées d'un verre de conductivité thermique $\lambda' = 1.25\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et de 4,00 mm d'épaisseur. Sur toutes les surfaces en contact avec l'air extérieur (à la température T_0) s'exercent des échanges thermiques radiatifs et conducto-convectifs caractérisés par un coefficient d'échange total (radiatif et conducto-convectifs) $h = 6.00\,\mathrm{W\cdot m{-}2\cdot K^{-1}}$. Sur toutes les surfaces en contact avec l'air intérieur s'exercent seulement des échanges de chaleur conducto-convectifs caractérisés par un coefficient d'échange $h' = 1.00\,\mathrm{W\cdot m{-}2\cdot K^{-1}}$. La capacité thermique de l'appartement vaut $C = 10^5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$. On se place dans tout l'exercice en régime quasi-stationnaire de transferts thermiques.

1. On veut maintenir dans l'appartement une température constante T_1 =290 K, grâce à une pompe à chaleur utilisant comme source froide un lac de température T_0 = 280 K. Quelle est la puissance électrique consommée par la pompe à chaleur pour maintenir une température constante T_1 dans l'appartement sachant que l'efficacité réelle de la pompe à chaleur est égale à 40,0
2. On arrête le chauffage, la température initiale de l'appartement vaut T_1. Quelle est la température de l'appartement au bout d'une heure ?

EXERCICE 6

Transmission d'un « pic de température »

On considère un milieu continu, homogène et isotrope de chaleur massique c, de conductivité thermique λ et de masse volumique ρ supposées constantes et uniformes. On se limite à une diffusion thermique unidimensionnelle selon un axe Ox. On désigne ainsi par $T(x,t)$ le champ des températures dans le milieu, et on suppose l'absence de toute source d'énergie dans ce milieu durant la diffusion.

1. Ecrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $T(x,t)$. On introduira la diffusivité thermique $K = \dfrac{\lambda}{\mu c}$.
2. Préciser la forme des solutions particulières $T(t)$ et $T(x)$ de cette équation.
3. On recherche des solutions de la forme $T(x,t) = f(x)g(t)$.
   (a) Montrer que $g(t)$ obéit à une équation de la forme :
   $$\frac{\frac{dg}{dt}}{g} = C$$
   où C est une constante dont on indiquera le signe. Dans la suite, on posera : $C = -k^2K$ (k réel).
   (b) Exprimer $g(t)$.
   (c) Déterminer l'équation satisfaite par $f(x)$ et donner la forme générale de cette fonction.
4. En déduire que $T_k(x,t) = A(k)\cdot\exp(ikx - Kk^2t)$ est solution de l'équation de la chaleur établie en 1.
5. Montrer que la fonction :
   $$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\cdot\exp(ikx - Kk^2t)dk$$
   est également solution.
6. On note $T_0(x) = T(x,0)$ la valeur de $T(x,t)$ à l'instant initial. Exprimer $T(x,t)$ sous forme d'une intégrale simple.
7. Le milieu est supposé infini et initialement à la température uniforme T_0. A l'instant $t = 0$, le plan $x = 0$ est porté à haute température (« pic de température »). Cette distribution initiale d'un « contenu calorifique » fini appliqué de façon discontinue en $x = 0$ s'exprime proportionnellement à la distribution de Dirac $\delta(x)$ telle que :
   $$\int_{\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0) \text{ (pic de Dirac)}$$
   On posera donc : $T_0(x) = \theta_0 \times \delta(x)$, où θ_0 est une constante.

(a) Montrer que :

$$T(x,t) = \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi K t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Kt}\right)$$

En déduire le champ de température compte tenu d'une condition aux limites qu'on précisera.

(b) Représenter l'allure de cette distribution de température à deux instants t_1 et $t_2 > t_1$. Calculer la largeur L à mi-hauteur du pic de température à un instant donné. Conclure.

8. Représenter de même l'allure de la fonction $T(x,t)$ pour $x = x_0$ fixé. Définir un « temps de diffusion » t_D.
9. Calculer K, puis t_D pour x_0=0.1m puis x_0=1m.

Données :

- ✘ $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik\mu - \gamma k^2\right) dk = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{4\gamma}\right)$
- ✘ si $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \times \exp(-ikx)dx$, alors $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \times \exp(ikx)dk$, moyennant des conditions de validité supposées ici satisfaites.
- ✘ Pour l'aluminium : $\rho = 2.71 \times 10^3$ kg·m^{-3} ; $c = 896$ kJ·kg^{-1}·K^{-1} ; $\lambda = 236$ W·m^{-1}·K^{-1}

EXERCICE 7

Atmosphère isotherme en équilibre.
On considère une atmosphère constituée d'un gaz parfait, en équilibre hydrostatique.

1. Donner l'expression de la densité moléculaire $n(z)$ en fonction de la masse m des molécules, de l'altitude z, de la température T, et du champ de pesanteur g (supposé uniforme). La densité au sol est notée n_0, et la constante de Boltzmann k_B.
2. En déduire l'existence d'un courant de diffusion. Quel est son sens ? Déterminer la vitesse moyenne u des molécules correspondant à ce mouvement de diffusion ; on note $D = 1.8 \times 10^{-5}$ m^2·s^{-1} le coefficient de diffusion.
3. En déduire la nécessité de l'existence d'un courant de sens opposé, de vitesse moyenne $-u$. Quelle en est la cause ? Montrer alors que les collisions subies par une molécule de gaz sont en moyenne équivalente à une force de frottement fluide αu, dirigée en sens inverse de la vitesse $-u$. Exprimer le coefficient de frottement α en fonction des données. Calculer u et α.

EXERCICE 8

Temps d'évaporation.
Un tube cylindrique, de hauteur H, contient de l'éther liquide sur une hauteur h_0. On fait les hypothèses suivantes :

- ✘ A la surface libre, la pression partielle d'éther est égale à sa pression de vapeur saturante à la température ambiante T_0=293 K.
- ✘ A la sortie du tube, la pression partielle d'éther est négligeable.

Données :

- ✘ Masse molaire de l'éther : $M = 74.1$ g·mol^{-1}
- ✘ Masse volumique de l'éther :$\rho = 626$ kg·m^{-3}
- ✘ Coefficient de diffusion dans l'air : $D = 1.5 \times 10^{-5}$ m^2·s^{-1}
- ✘ Pression de vapeur saturante de l'éther à 293 K : P_s=0,583 Bar
- ✘ H=20 cm ; h_0=15 cm

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$ la hauteur d'éther liquide.
2. En déduire le temps nécessaire à l'évaporation de l'éther contenu dans le tube.

EXERCICE 9

Diffusion de macromolécules.

Un récipient contient un liquide homogène, de masse volumique μ, dans lequel on ajoute des macromolécules insolubles de masse volumique $\mu > \mu_0$.

En supposant ces macromolécules de forme sphérique, nous nous proposons de calculer leur rayon moyen R et leur masse m à partir des résultats de l'expérience suivante.

La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date $t=0$. A partir de cet instant elle est abandonnée à elle-même et sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent vers le fond du récipient. Nous supposerons un mouvement unidirectionnel vertical et les macromolécules soumises, entre autres, à une force de type frottement visqueux : $\overrightarrow{F} = -f\overrightarrow{V}$ (f constante positive, $\overrightarrow{V}$ vitesse des molécules).

1. Donner l'équation différentielle du mouvement d'une macromolécule (on considérera un axe (zOz') vertical descendant, l'origine O coïncidant avec le fond du récipient).
2. Montrer que ces particules atteignent une vitesse limite que l'on exprimera en fonction de m, g (intensité du champ de pesanteur), f, μ et μ_0.
3. La vitesse limite étant supposée atteinte très rapidement, donner l'expression de la densité du flux d'entraînement molaire $\overrightarrow{j}_E$ des macromolécules à la côte z où leur concentration molaire est $C(z)$, ($\|\overrightarrow{j}_E\| = j_E$ correspondant au nombre de moles de macromolécules traversant une surface unité horizontale par unité de temps).
4. La sédimentation ayant entraîné une inhomogénéité de la solution, le phénomène de diffusion dans le sens ascendant apparaît. On admet que la densité du flux de diffusion molaire J_D des particules est donnée par la loi de Fick : $J_D = -D\dfrac{\partial C}{\partial z}$. Quelles sont les dimensions de D ? Déterminer, en régime stationnaire, la loi de variation de C avec z.
5. Des mesures optiques montrent que, à 25 °C, $\dfrac{C(z=0)}{C(z=2cm)} = 2$. Quelle est la masse molaire des macromolécules et la valeur de leur rayon ? Avez-vous une idée d'un principe possible pour ces mesures optiques ?

Données :

- ✘ $D = (k_B.T)/f$ (la constante de Boltzmann vaut $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K .
- ✘ $\dfrac{\mu}{\mu_0} = 0,8$ avec $\mu = 1000\,\mathrm{Kg/m^3}$.

EXERCICE 10

Diffusion de molécules à travers une membrane.

La diffusion de molécules à travers une membrane est très utilisée dans des domaines très divers, en médecine par exemple. On considère le dispositif suivant où les deux compartiments, séparés par une membrane verticale supposée poreuse, contiennent une même solution moléculaire, mais à des concentrations molaires différentes C_1 et C_2 ($C_1 > C_2$). Leurs volumes seront notés respectivement V_1 et V_2. La membrane, de surface S, d'épaisseur e, comporte par unité de surface n pores cylindriques d'axe horizontal normal à la paroi. Les pores sont supposés identiques. Dans chacun d'eux s'établit un flux macroscopique de molécules suivant (Ox), de densité molaire J_D, tendant à égaliser les concentrations. On admettra que $\dfrac{\partial j_D}{\partial z} = 0$ et que J_D est donné par la loi de Fick : $j_D = -D\dfrac{\partial C}{\partial z}$ A une date t les concentrations, maintenues homogènes sur les volumes V_1 et V_2 sont $C_1(t)$ et $C_2(t)$. On notera $\Delta C(t) = C_1(t) - C_2(t)$.

1. En admettant que dans un pore la concentration soit une fonction affine de x, montrer que la densité de flux molaire $\overrightarrow{j}_m$ des molécules à travers toute la membrane est de la forme :
$$\overrightarrow{j}_m = K\Delta C\overrightarrow{e}_x$$
On exprimera K, appelée perméabilité de la membrane, en fonction de n, D, e et r, rayon d'un pore.
2. Calculer la valeur numérique de r sachant que $K = 10^{-6}$ m/s ; $n = 10^6$ pores·cm^{-2} ; $e = 10\,\mu$m ; $D = 10^{-9}$ SI.
3. Établir l'équation différentielle donnant $\Delta C(t)$.
4. Intégrer cette équation différentielle. On notera : $\dfrac{1}{\tau} = KS\left(\dfrac{1}{V_1} + \dfrac{1}{V_2}\right)$
5. Au bout de quelle durée la différence des concentrations est-elle égale au dixième de sa valeur initiale ?

EXERCICE 11

Vérification de l'ARQS.

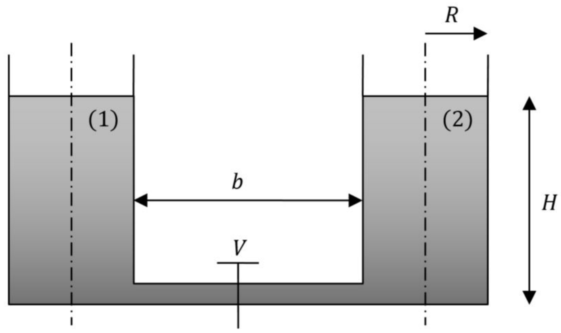

FIGURE 5

On considère deux colonnes cylindriques identiques, de rayon R, reliées par un tube mince de longueur b, de section s et de volume négligeable par rapport au volume des colonnes. Une vanne permet de mettre en communication les deux colonnes à travers le tube. Initialement la colonne (1) est remplie d'une solution aqueuse d'un soluté X de concentration c_0 et la colonne (2) est pure. On ouvre la vanne à l'instant $t = 0$. Dans le tube, la concentration $c(x,t)$ et la densité de courant de soluté $j_D(x,t)$ sont reliées par la loi de Fick : $j_D(x,t) = -D\dfrac{\partial c(x,t)}{\partial x}$ où D est le coefficient de diffusion.

1. A l'instant t, on note respectivement $c_1(t)$ et $c_2(t)$ les concentrations, supposées uniformes, dans les colonnes (1) et (2). On suppose de plus que $c_1(t)$ et $c_2(t)$ varient suffisamment lentement pour pouvoir faire l'approximation du régime permanent dans le tube. Calculer le courant I_c de moles de soluté qui traverse le tube par unité de temps en fonction de $\Delta c = c_1(t) - c_2(t)$.
2. Etablir l'équation donnant l'évolution de Δc en fonction du temps et la résoudre. Calculer le temps τ au bout duquel Δc est réduit de moitié. AN : H=2 cm ; R=0,3 cm ; b=0,5 cm ; s = 1 mm^2 et $D = 10^{-9}$ m^{2}s^{-1}.

   On veut vérifier que l'approximation faite à la question précédente était justifiée. On se replace pour cela dans les conditions initiales et l'instant $t = 0$ on ouvre la vanne pendant un cours instant de façon à produire n moles de soluté dans un petit volume situé au bas de la colonne 2. On suppose que, par la suite, la vanne restant fermée, la concentration de soluté dans la colonne 2 ne dépend que du temps et de la hauteur z au dessus de l'orifice du tube.
3. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $c_2(z,t)$.
4. On cherche les solutions sous la forme $c_2(z,t) = f(t)\exp\left(-\dfrac{z^2}{4Dt}\right)$. Exprimer $f(t)$ en fonction de t ; n ; R et D. On rappelle que : $\int_0^\infty \exp(-au^2)du = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$
5. Exprimer et calculer numériquement le temps τ' caractéristique de la diffusion du soluté sur la hauteur H. Comparer τ et τ' et conclure sur la validité de l'approximation faite à la question 1.

EXERCICE 12

Diffusion neutronique.

On étudie la diffusion de neutrons dans la matière fissile (plutonium 239) d'un réacteur. On suppose que le milieu dans lequel évoluent les neutrons est homogène et contient N atomes de plutonium par unité de volume. On suppose, pour simplifier, que tous les neutrons ont des vitesses de module moyen v. On désigne par $n(M,t)$ le nombre de neutrons par unité de volume en tout point M à l'instant t ; $\vec{j}(M,t)$ le vecteur densité de courant neutronique en M à l'instant t et par D le coefficient de diffusion. Le réacteur est sphérique, de centre O et de rayon a ; on admet que $n = n(r,t)$ et que $\vec{j} = j(r,t)\vec{u}_r$ ne dépendent que de la distance $r = OM$ et du temps t.

1. Lors de leur diffusion, les neutrons subissent des collisions avec les noyaux de plutonium. Au cours de ces chocs, les noyaux de plutonium, très lourds, restent quasiment immobiles. On appelle σ la section efficace de collision d'un neutron avec le noyau cible. Calculer le libre parcours moyen λ des neutrons en fonction de s et

de N. Déterminer, en fonction de v, n et λ le nombre de neutrons qui subissent une collision avec les noyaux de plutonium pendant l'unité de temps et par unité de volume du matériau.

Au cours de la collision, une fraction α des neutrons peut être absorbée par les noyaux ; en outre certains neutrons absorbés conduisent à la fission du noyau de plutonium qui produit des neutrons appelés neutrons secondaires. Pour simplifier, on admet qu'en moyenne, il y a K ($K > 1$) neutrons crées pour un neutron absorbé, et on suppose que les neutrons secondaires ont la même vitesse v que les neutrons initiaux.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $n(r,t)$. On se place en régime stationnaire. Déterminer la fonction $n(r)$. On supposera que, pour $r = 0$, on a $n(0) = n_0$.
3. On montre qu'une condition simple rendant compte du milieu pour $r = a$ est d'imposer à n de s'annuler à une distance extrapolée égale à $b = a + 0,071\lambda$. Montrer que ce régime de fonctionnement ne peut exister que si a présente une valeur critique a_0. Calculer λ et a_0. Calculer également la masse critique m_0 de plutonium qui correspond à a_0
4. Pour $a \neq a_0$, on cherche les solutions de l'équation de diffusion donnée à la question 2. Sous la forme $n(r,t) = n(r)\exp(\gamma t)$ où γ est une constante réelle dont on comparera le signe à celui de $a - a_0$. Donner l'interprétation physique du résultat.

Données :

✘ $D = 20\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$; $\sigma = 5.9\times10^{-28}\,\mathrm{m^2}$; $v = 2\times10^3\,\mathrm{m/s}$; $K = 2,75$; $\alpha = 0,30$

✘ Masse volumique du plutonium : $\rho = 19.74\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

✘ Masse atomique du plutonium : $M = 239\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$

Exercice ouvert

La figure 6, représente le principe d'un puits canadien. Après avoir analysé son principe, estimer les économies réalisées par l'installation d'un tel dispositif, en été et en hiver.

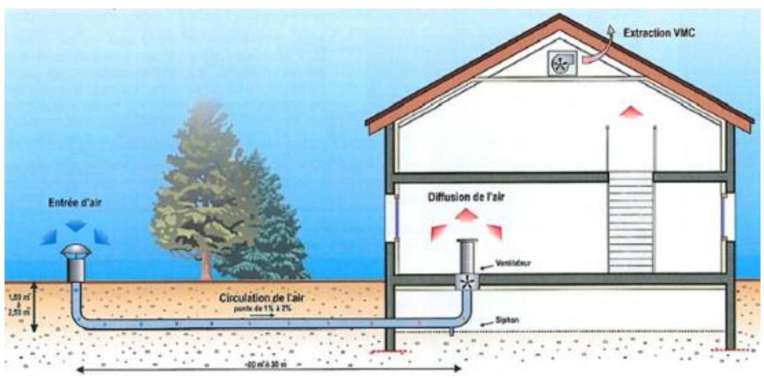

FIGURE 6