Correction exercice 30 : Filtre de Lyot

On considère que (Ox)est l'axe rapide :

$$V_x > V_y \Rightarrow n_x < n_y \Rightarrow \Delta n = n_y - n_x > 0$$

On a d'aprés l'énoncé le schéma suivant :

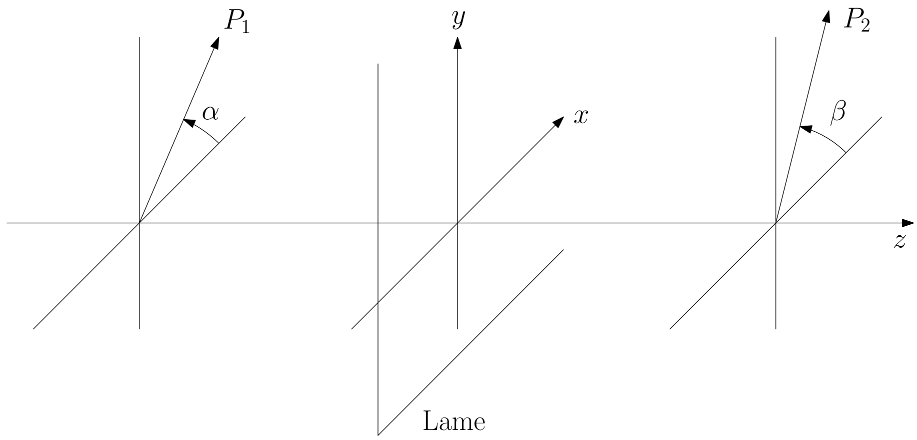

Figure 1 – Dispositif relatif à l'exercice

1. ✘ Champ à la sortie de P_1 :

$$\underline{\vec{E}}_{P_1} = E_0 \exp^{j\omega t} \overrightarrow{u_1}$$

Avec :

$$\overrightarrow{u_1} = \cos\alpha \, \vec{u}_x + \sin\alpha \, \vec{u}_y$$

✘ Champ à la sortie de la lame :

$$\underline{\overrightarrow{E_L}} \left| \begin{array}{l} \cos\alpha \exp^{j(\omega t - k_0 n_x e)} \\ \sin\alpha \exp^{j(\omega t - k_0 n_y e)} \end{array} \right.$$

$$\underline{\overrightarrow{E_L}} \left| \begin{array}{c} \cos\alpha \exp^{j(\omega t')} \\ \sin\alpha \exp^{j(\omega t' - \phi)} \end{array} \right.$$

où :

$$\omega t' = \omega t - k_0 n_x e$$

$$\phi = k_0 \Delta n e = 2\pi\sigma\Delta n e$$

✘ Champ à la sortie de P_2 :

$$\underline{\vec{E}}_{P_2} = \underline{E}_2 \overrightarrow{u_2}$$

Avec :

$$\overrightarrow{u_2} = \cos\beta \, \vec{u}_x + \sin\beta \, \vec{u}_y$$

et :

$$\underline{E}_2 = \underline{\overrightarrow{E_L}} \cdot \overrightarrow{u_2} = E_0 \left(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \exp^{-j\phi} \right) \exp^{j\omega t'}$$

On peut alors définir la fonction de transfert complexe en amplitude du champ électrique :

$$\underline{t} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \exp^{-j\phi}$$

2. ✘ Intensité incidente :

$$I_0 = k E_0^2$$

- ✘ Intensité sortante :
$$I_{P_2} = k|\underline{E}_{P_2}|^2$$
- ✘ Fonction de transfert :
$$T = \frac{I_{P_2}}{I_0} = |\underline{t}|^2$$

Aprés calculs, on trouve :

$$T = \cos^2\alpha sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\cos\phi$$

Avec :

$$T\left(\phi = 2k\pi\right) = \left(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\right)^2 = \left(\cos(\alpha-\beta)\right)^2$$
$$T\left(\phi = \pi + 2k\pi\right) = \left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right)^2 = \left(\cos(\alpha+\beta)\right)^2$$

- ✘ Les variations de T sont les plus importantes quand l'écart entre T_{max} et T_{min} est maximal c'est à dire quand l'un vaut 1 etl'autre vaut zéro.
- ✘ Cas où :
$$T_{max} = T\left(\phi = 2k\pi\right) = \left(\cos(\alpha-\beta)\right)^2 = 1 \text{ et } T_{min} = T\left(\phi = \pi + 2k\pi\right) = \left(\cos(\alpha+\beta)\right)^2 = 0$$
  - ☛ $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha-\beta) = 1$ et $\cos(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ $(P_1 \parallel P_2)$
  - ☛ $\alpha = \beta = -\frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha-\beta) = 1$ et $\cos(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = -\frac{\pi}{2}$ $(P_1 \parallel P_2)$
  - ☛ $\alpha = \frac{3\pi}{4}; \beta = -\frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha-\beta) = -1$ et $\cos(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ $(P_1 \parallel P_2)$
  - ☛ $\alpha = \frac{\pi}{4}; \beta = \frac{-3\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha-\beta) = -1$ et $\cos(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = -\frac{\pi}{2}$ $(P_1 \parallel P_2)$
- ✘ Cas où :
$$T_{max} = T\left(\phi = \pi + 2k\pi\right) = \left(\cos(\alpha+\beta)\right)^2 = 1 \text{ et } T_{min} = T\left(\phi = 2k\pi\right) = \left(\cos(\alpha-\beta)\right)^2 = 0$$
  - ☛ $\alpha = -\beta = \frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha+\beta) = 1$ et $\cos(\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow \alpha-\beta = \frac{\pi}{2}$ $(P_1 \perp P_2)$
  - ☛ $\alpha = -\beta = -\frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha+\beta) = 1$ et $\cos(\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow \alpha-\beta = -\frac{\pi}{2}$ $(P_1 \perp P_2)$
  - ☛ $\alpha = \frac{3\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha+\beta) = -1$ et $\cos(\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow \alpha-\beta = \frac{\pi}{2}$ $(P_1 \perp P_2)$
  - ☛ $\alpha = \frac{\pi}{4}; \beta = \frac{3\pi}{4}$ pour $\cos(\alpha+\beta) = -1$ et $\cos(\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow \alpha-\beta = -\frac{\pi}{2}$ $(P_1 \perp P_2)$
- ✘ Conclusion : T est maximal quand P_1 et P_2 sont soit parallèles soit perpendiculaires entre eux et sont à 45 ° des lignes neutres de la lame.
- ✘ Expression simplifiée de T quand les deux polariseurs sont parallèles et à 45 ° des axes de la lame :
$$T = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\phi\right) = \cos^2\frac{\phi}{2}$$
- ✘ Expression simplifiée de T quand les deux polariseurs sont perpendiculaires et à 45 ° des axes de la lame :
$$T = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\phi\right) = \sin^2\frac{\phi}{2}$$

3. Les cannelures correspondent à $T = 0$, en se plaçant dans les deux cas précédents, on obtient :
   - ✘ Cas où les deux polariseurs sont parallèles et à 45 ° des axes de la lame :
$$T = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\phi\right) = \cos^2\frac{\phi}{2} = 0 \Rightarrow \phi = \pi + 2p\pi \Rightarrow \sigma_p = \frac{p}{\Delta ne}$$

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont perpendiculaires et à 45 ° des axes de la lame :

$$T = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\phi\right) = \sin^2\frac{\phi}{2} = 0 \Rightarrow \phi = 2p\pi \Rightarrow \sigma_p = \frac{p + \frac{1}{2}}{\Delta ne}$$

On définit la largeur d'une cannelure en cherchant σ telle que :

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont parallèles et à 45 ° des axes de la lame :

$$\cos^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\phi = \pi \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{1}{2\Delta ne}$$

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont perpendiculaires et à 45 ° des axes de la lame :

$$\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\phi = \pi \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{1}{2\Delta ne}$$

Ainsi, dans les deux cas, la largeur d'une cannelure est :

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2\Delta ne}$$

Ainsi, lorsque Δne augmente, la largeur d'une cannelure diminue.
Le nombre de cannelures est déterminé à partir de la largeur du spectre de la lumière blanche :

$$\sigma_R < \sigma < \sigma_V$$

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont parallèles et à 45 ° des axes de la lame :

$$\sigma_p = \frac{p}{\Delta ne} \Rightarrow \sigma_R < \frac{p}{\Delta ne} < \sigma_V \Rightarrow \Delta ne\sigma_R < p < \Delta ne\sigma_V \Rightarrow N = \Delta p = (\sigma_V - \sigma_R)\Delta ne$$

- ✘ Cas où les deux polariseurs sont perpendiculaires et à 45 ° des axes de la lame :

$$\sigma_p = \frac{p + \frac{1}{2}}{\Delta ne} \Rightarrow \sigma_R < \frac{p + \frac{1}{2}}{\Delta ne} < \sigma_V \Rightarrow \Delta ne\sigma_R - \frac{1}{2} < p < \Delta ne\sigma_V - \frac{1}{2} \Rightarrow N = \Delta p = (\sigma_V - \sigma_R)\Delta ne$$

Ainsi, dans les deux cas, le nombre de cannelures observées est :

$$N = \Delta\sigma\Delta ne$$

Ainsi, lorsque Δne augmente, le nombre de cannelures augmente.

4. ✘ Cas où il y a deux systèmes $\{P_i; L_i; P_{i+1}\}$:

$$T_1 = \cos^2\frac{\phi_1}{2} \text{ avec } \phi_1 = 2\pi\sigma\Delta ne$$

$$T_2 = \cos^2\frac{\phi_2}{2} \text{ avec } \phi_2 = 2\phi_1$$

D'où :

$$T = \cos^2\left(\frac{\phi_1}{2}\right)\cos^2\left(\phi_1\right)$$

- ✘ Cas de N systèmes $\{P_i; L_i; P_{i+1}\}$:

$$T_N = \prod_{i=1}^{i=N}\cos^2\left(\frac{N\phi_1}{2}\right) \approx \left(\frac{\sin\left(\frac{N\phi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_1}{2}\right)}\right)^2$$

✘ Exemples

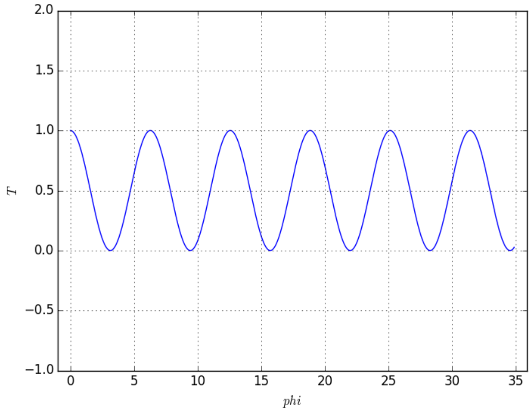

Figure 2 – $T(\phi_1)$ pour $N = 1$

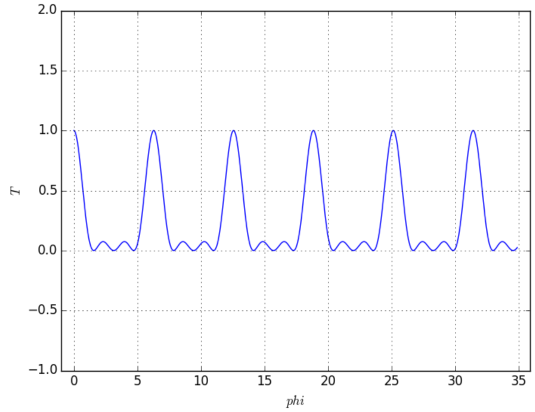

Figure 3 – $T(\phi_1)$ pour $N = 2$

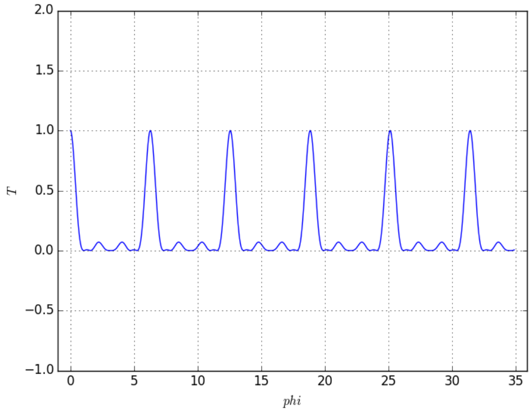

Figure 4 – $T(\phi_1)$ pour $N = 3$

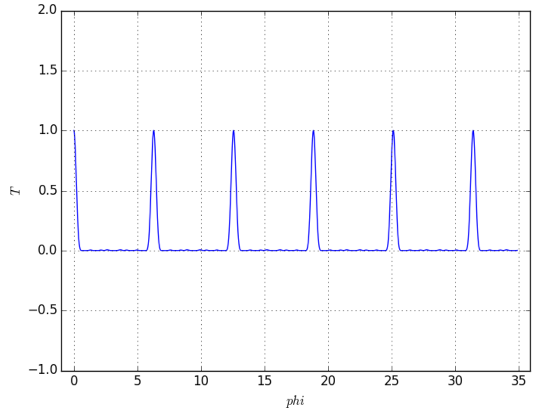

Figure 5 – $T(\phi_1)$ pour $N = 5$