

Nappe d'eau

1. L'application du premier principe de la thermodynamique à une section S de la nappe donne

$$\rho l S c \frac{dT}{dt} = \left(E_A + \underbrace{\alpha_S(2l)}_{\substack{\text{fond} \\ \text{réfléchissant}}} E_S \right) S - h(T - T_A)S - \sigma T^4 S \quad (1)$$

car le rayonnement solaire se réfléchit sur le fond de la nappe donc la traverse sur une épaisseur $2l$. La vitesse de réchauffement est donc

$$v_R(t) = \frac{dT}{dt} = \left((E_A + \alpha_S(2l)E_S) - h(T - T_A) - \sigma T^4 \right) / (\rho l c)$$

AN : à $t = 0$, $T = T_A$ donc $v_R(0) = 7,9 \times 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1} = 2,8 \text{ K} \cdot \text{h}^{-1}$ et à t_1 : $v_R(t_1) = 4,9 \times 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1} = 1,7 \text{ K} \cdot \text{h}^{-1}$. On peut donc prévoir entre 3 et 4 heures pour la durée t_1 .

2. En posant $\theta = T - T_i$, on linéarise $T^4 \approx T_i^4 \left(1 + 4 \frac{\theta}{T_i} \right)$ car $\theta \ll T_i$ à tout instant.

L'équation (1) devient

$$\tau_0 \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = T_0$$

avec $\tau_0 = \frac{\rho l c}{h + 4\sigma T_i^3}$ et $T_0 = \frac{E_A + \alpha_S(2l)E_S - \sigma T_i^4}{h + 4\sigma T_i^3} = \frac{E_A + \alpha_S(2l)E_S - \sigma T_i^4}{\rho l c} \times \tau_0$

AN : Pour $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $\tau_{0a} = 2,69 \times 10^4 \text{ s}$ et $T_{0a} = 21,2 \text{ K}$

Pour $h = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $\tau_{0b} = 7,53 \times 10^3 \text{ s}$ et $T_{0b} = 5,9 \text{ K}$

La solution de l'équation différentielle est $\theta = T_0(1 - e^{-t/\tau_0})$. On remarque que dans le deuxième cas, l'eau n'atteindra pas la température T_F car $\theta_{\max} = 5,9 \text{ K}$. Une trop forte convection limite le réchauffement par le Soleil.

Pour $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $t_1 = -\tau_0 \ln\left(1 - \frac{T_F - T_i}{T_0}\right) = 1,27 \times 10^4 \text{ s} = 3,5 \text{ h}$ ce qui est conforme à la prévision de la question 1. Pour $h = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, pas de solution !

Questions supplémentaires

- Trouver le coefficient de convection critique qui permet à l'eau d'atteindre la température T_F . Réponse : résoudre $T_0 = 8 \text{ K}$. On trouve $h_c = 35,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Quelles sont les modifications apportées par une surface de fond totalement absorbante ? Réponse : la totalité du rayonnement solaire est absorbée par le système {fond+nappe} donc la vitesse de réchauffement est plus importante.

