

On considère le système représenté figure 1. Les deux poulies sont supposées parfaites et sans inertie et on se place dans le cas où le fil est toujours tendu. Le pendule, constitué de la masse m et du fil, est modélisé par un pendule simple de longueur variable $R = L + z$ où $L = 1$ m est la longueur du pendule à $t = 0$.

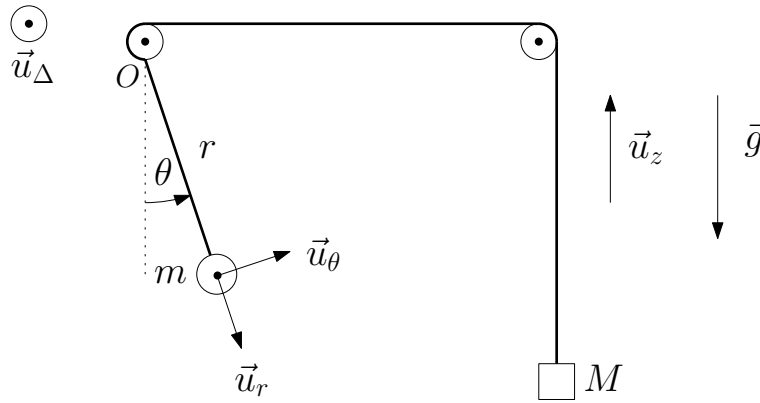


FIGURE 1

Le référentiel R_0 est le référentiel du laboratoire dans lequel les axes des poulies sont fixes, il est supposé galiléen. Le référentiel R est le référentiel tournant avec la masse m dans lequel le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est fixe.

I.– En appliquant le théorème du moment cinétique à la masse m dans le référentiel R_0 , montrer que :

$$(L + z) \ddot{\theta} + 2\dot{z}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (1)$$

II.– On étudie le mouvement de la masse m dans le référentiel R .

a) Retrouver l'équation 1 en appliquant le théorème de la résultante cinétique dans le référentiel R puis montrer que :

$$\ddot{z}(M + m) = -Mg + mg \cos \theta + m(L + z)\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

b) Par analogie avec les équations de la mécanique que vous connaissez, proposer une interprétation à l'influence « du terme de Coriolis » sur l'équation 1.

c) Interpréter le rôle de la force d'entraînement dans le couplage entre les deux masses et notamment montrer que lorsque les deux masses sont égales, le couplage permet de faire monter la masse M .

III.– Simplifier les équations 1 et 2, en considérant le cas des petites amplitudes d'oscillations pour la masse m et en négligeant les termes de couplages. En déduire les équations horaires vérifiées par $z(t)$ et $\theta(t)$. Commenter. Interpréter les simulations obtenues figures 2, 3 et 4. Pourquoi ce régime de petites oscillations ne peut-il pas perdurer ?

IV.– Interpréter la figure 5.

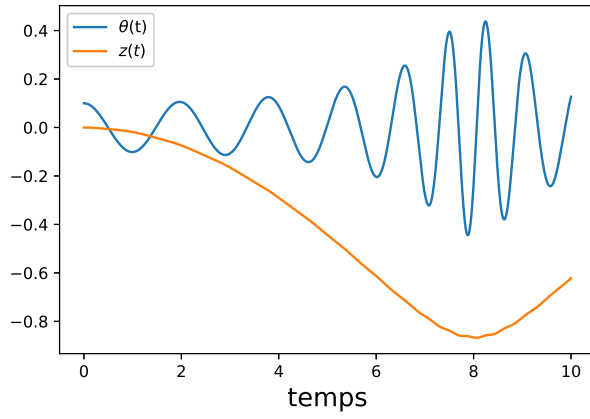


FIGURE 2 – Allures de $\theta(t)$ et $z(t)$ pour $M/m = 1.01$, $\theta(0) = 0.1$ rad, $\dot{\theta}(0) = 0$, $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$

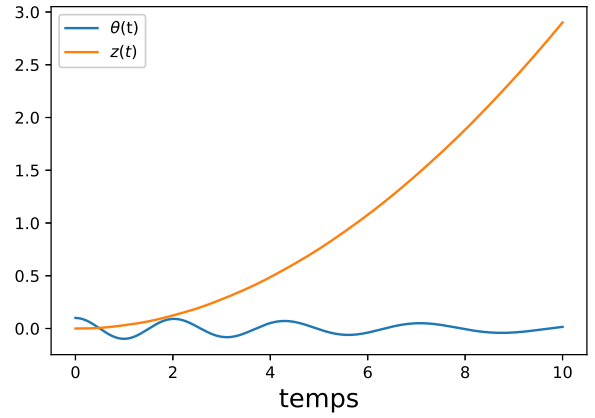


FIGURE 3 – Allures de $\theta(t)$ et $z(t)$ pour $M/m = 0.990$, $\theta(0) = 0.1$ rad, $\dot{\theta}(0) = 0$, $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$

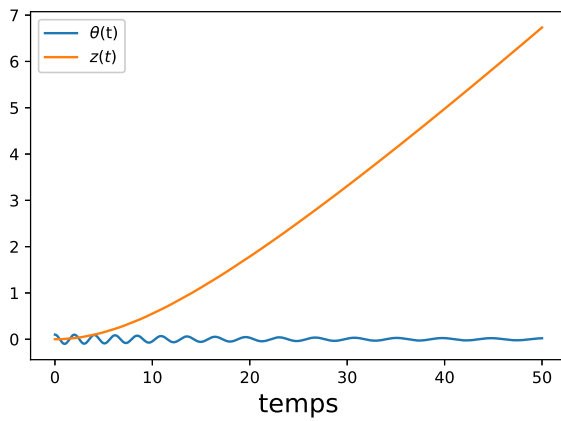


FIGURE 4 – Allures de $\theta(t)$ et $z(t)$ pour $M = m$, $\theta(0) = 0.1$ rad, $\dot{\theta}(0) = 0$, $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$

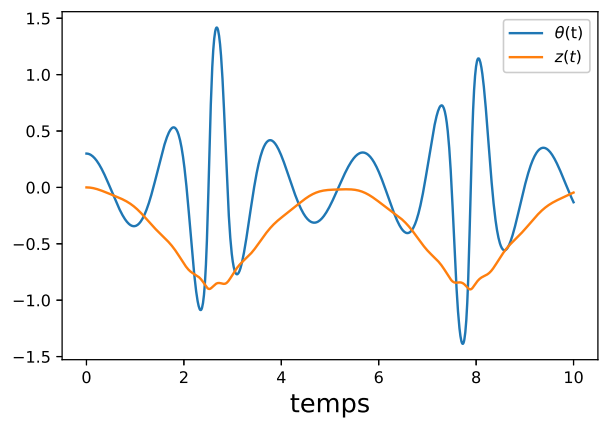


FIGURE 5 – Allures de $\theta(t)$ et $z(t)$ pour M/m inconnu et conditions initiales inconnues

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

m1=1;m2=1;k1=1;k2=1;k3=1;m=1;k=1;a=1;

def equadiff(var,t):
    x1=var[0]
    x2=var[1]
    v1=var[2]
    v2=var[3]
    a1=( k2*x2-(k1+k2)*x1)/m1
    a2=( k2*x1-(k2+k3)*x2)/m2
    return ([v1,v2,a1,a2])

def Oscillateur(x10,x20,v10,v20,tmax):
    t=np.linspace(0,tmax,300)
    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(1,1,1,aspect="equal")
    ax.spines["left"].set_position("zero")
    ax.spines["right"].set_color("none")
    ax.spines["bottom"].set_position("zero")
    ax.spines["top"].set_color("none")
    ax.xaxis.set_ticks_position("bottom")
    ax.yaxis.set_ticks_position("left")
    plt.axis("tight")
    var0=[x10,x20,v10,v20]
    solution=odeint(equadiff,var0,t)
    x1=solution[:,0]
    x2=solution[:,1]
    v1=solution[:,2]
    v2=solution[:,3]
    plt.plot(t,x1,t,x2)
    plt.axis("tight")
    plt.show()

Oscillateur(a,a,0,0,10)
Oscillateur(a,-a,0,0,10)
Oscillateur(2*a,0,0,0,50)

```