

## Vie et mort d'un photon

Corrigé proposé par B. Hallé et S. Laurette pour l'UPS. Distribuible librement aux étudiants.

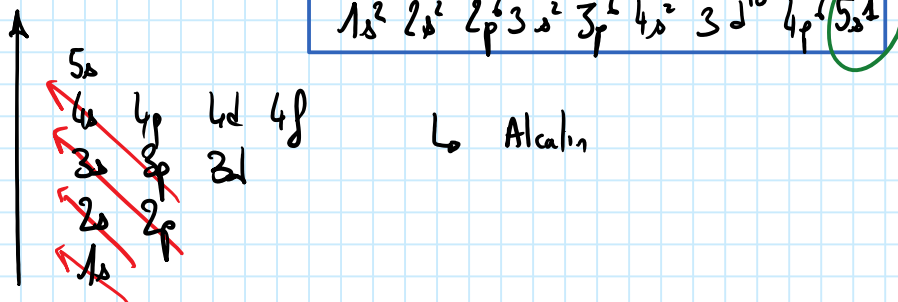
### I Étude des atomes de Rydberg circulaires

Les atomes utilisés dans l'expérience sont des atomes de Rubidium dont l'électron situé sur la couche électronique la plus énergétique est excité dans un état de nombre quantique principal  $n$  très élevé. Des atomes ainsi excités sont appelés *atomes de Rydberg*. Si de plus le nombre quantique secondaire  $\ell$  de l'électron excité est maximum, alors on parle d'*atomes de Rydberg circulaires*.

#### I.A - Préliminaires

Q 1. Donner la structure électronique du Rubidium ( $Z = 37$ ) dans son état fondamental. Entourer le ou les électron(s) de valence. À quelle famille cet élément appartient-il ?

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^1$



Alcalin

Q 2. Justifier le signe de  $U(r)$ .

La force dérivant de  $U(r)$  est  $\vec{F} = -\text{grad } U(r) = -\frac{dU}{dr} \vec{u}_r$

$$\vec{F} = \left( \frac{Z'e}{r^2} - \frac{Ze}{r^2} \right) \vec{u}_r$$

Supposons que  $Z$  soit décroissant  $\Rightarrow Z' < 0$  et  $F_r < 0$

**Force Attractrice** : l' $e$  est attiré par le noyau & le reste du cortège électronique

Q 3. Interpréter physiquement les valeurs limites de la fonction  $U(r)$  en  $r \rightarrow 0$  et  $r \rightarrow +\infty$ .

grand  $r \rightarrow 0$



la sphère de rayon  $r$  tend à englober uniquement le noyau de charge  $Ze$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Ze}{\epsilon_0}$$

sphère de rayon  $r$

l'électron ici "ne voit pas" le reste du cortège électronique

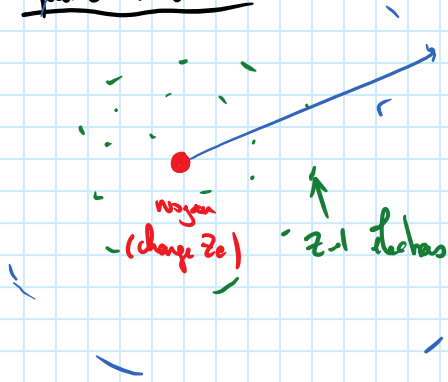
avec la symétrie sphérique  $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$\Rightarrow$  le potentiel associé est  $V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}$

L'énergie potentielle de l'électron est  $U(r) = -eV(r)$

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} Z \quad \Rightarrow \quad Z(r \rightarrow 0) = Z$$

quand  $r \rightarrow \infty$



La sphère de rayon  $r$  contient la charge

$$Ze + (Z-1)e = e$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow U(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Extrait Rapport du Jury :

Q3. Seuls 17% des candidats ont répondu correctement à cette question ! Une bonne partie des réponses erronées rencontrées peut sans doute être attribuée à une lecture trop superficielle de l'énoncé. De façon générale, le jury recommande de consacrer un temps suffisant aux questions qualitatives posées au début de l'épreuve car celles-ci permettent aux candidats de s'appropriier le modèle proposé.

$$\rightarrow \boxed{Z(r \rightarrow \infty) = 1}$$

Q 4. On cherche un ordre de grandeur de la taille typique  $a_0$  de l'atome. On estime que  $a_0$  est de la forme  $a_0 = \hbar^\alpha q^\beta m_e^\gamma$  où  $m_e$  est la masse de l'électron. Établir soigneusement que  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -1$  et  $\gamma = -1$ . La grandeur  $a_0$  est appelée rayon de l'atome de Bohr, calculer sa valeur numérique.

$$a_0 = \hbar^\alpha q^\beta m_e^\gamma$$

$$\Rightarrow [a_0] = [\hbar]^\alpha [q]^\beta [m_e]^\gamma$$

$$L = [J.s]^\alpha \times \left[\frac{e^2}{\epsilon_0}\right]^\beta \times [m_e]^\gamma$$

$$a [J] = [Force \times L] = M L^2 T^{-2} \quad \text{"} E_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0} \text{"}$$

$$\left[\frac{e^2}{\epsilon_0}\right] = \left[\frac{\text{charge}^2}{\text{capacité}}\right] \times L = [J] \cdot L = M L^3 T^{-2}$$

$\epsilon_0$  en  $F.m^{-1}$

$$\Rightarrow L = M^\alpha L^{2\alpha} T^{-2\alpha} T^\alpha M^\beta L^{3\beta} T^{-2\beta} M^\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = -\beta - 2 = -1 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 & \Rightarrow \beta = -1 \\ -2\alpha - 2\beta = 0 & \Rightarrow \alpha = -2\beta \Rightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{a_0 = 5,25 \cdot 10^{-11} \text{ m}}$$

### I.B - Atomes de Rydberg

L'électron le plus énergétique de l'atome précédent est excité dans un niveau de nombre quantique  $n \gg 1$  (typiquement  $n \approx 50$ ), le reste de l'atome étant inchangé. On étudie par la suite le comportement de cet électron dont la masse est toujours notée  $m_e$ . L'atome est isolé de son environnement extérieur.

#### I.B.1) Étude classique

Q 5. Justifier que l'énergie potentielle de l'électron est alors :  $U(r) = -\frac{q}{r}$ .

$n \gg 1 \Rightarrow$  l'électron est très éloigné du noyau,

$\Rightarrow$  on se retrouve dans la situation asymptotique

$$r \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad Z \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r) = -\frac{q}{r}}$$

Q 6. Démontrer que le moment cinétique  $\vec{L}$  de cet électron est constant et en déduire que le mouvement de l'électron est plan. On introduit le repère sphérique  $(r, \theta, \varphi)$  tel que  $\vec{L} = L\vec{e}_z$  avec  $L > 0$ . Le noyau est toujours à l'origine du repère. Montrer que le mouvement de l'électron est alors situé dans le plan  $Oxy$  et donner l'expression de la constante  $L$  en fonction de  $m_e$ ,  $r$  et  $\dot{\varphi}$ .

La force  $\vec{F}$  associée à  $U(r)$  est

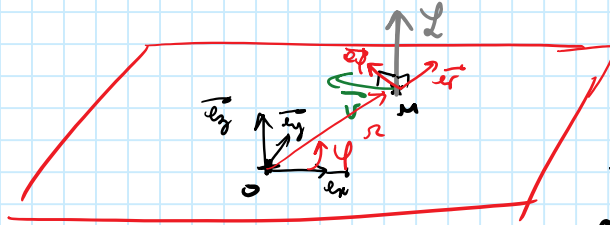
$$\vec{F} = -\frac{dU}{dr} \vec{e}_r = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

Son moment en  $O$  est  $\vec{M}_O(\vec{F}) = \underbrace{\vec{OM}}_{\parallel \vec{e}_r} \wedge \underbrace{\vec{F}}_{\parallel \vec{e}_r} = \vec{0}$

Le théorème du moment cinétique appliqué en  $O$  donne, dans le référentiel héliocentrique galiléen:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{L}$  est constant ou  $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$



ou  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{OM} \perp \vec{L} \quad \forall t \\ O \text{ point fixe} \end{array} \right.$

$\Rightarrow M \in \forall t$   
 au plan  $\perp \vec{L}$  et comprenant  $\vec{OM}(t=0)$

$\Rightarrow$  Le mouvement est plan

Q6. La démonstration du caractère constant de  $\vec{L}$  est bien réalisée. En revanche, la planéité du mouvement qui en découle est souvent affirmée sans aucun élément de justification.

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = m_e r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

Q 7. Que peut-on dire de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  de l'électron ? Montrer que l'on peut mettre cette énergie mécanique sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$$

où l'on exprimera  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  en fonction de  $q$ ,  $r$ ,  $m_e$  et  $L$ .

En l'absence de forces non conservatives,  $\mathcal{E}_m$  est constant au cours du temps.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + U(r)$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_e r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{q}{r}$$

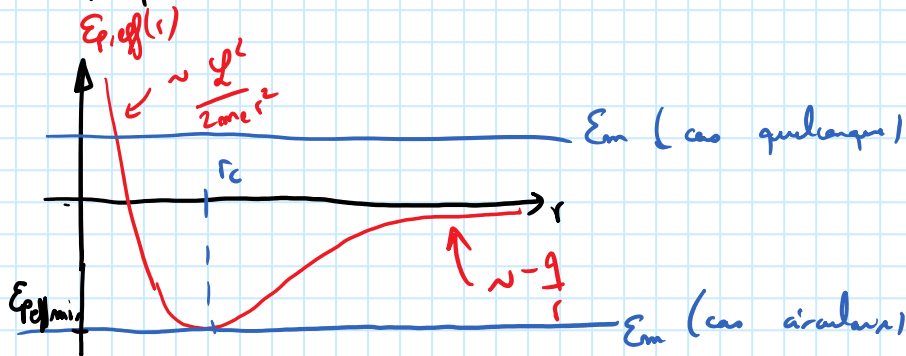
$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}} \frac{L^2}{m_e r^2}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + E_{p,eff} \quad \text{avec} \quad E_{p,eff} = \frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{q}{r}$$

Q7. Il faut expliquer pourquoi l'énergie mécanique se conserve (quelques mots suffisent). L'expression de l'énergie potentielle effective est correcte dans plus de 70% des copies, ce qui témoigne de la bonne assimilation de cette notion par les candidats.

Q8. Justifier que, pour une trajectoire circulaire,  $E_{p,eff}(r)$  est minimale. En déduire la valeur du rayon  $r_C$  de l'électron lorsqu'il est sur une trajectoire circulaire. On exprimera  $r_C$  en fonction de  $\mathcal{L}$ ,  $m_e$  et  $q$ , puis on vérifiera que  $r_C = \frac{\mathcal{L}^2}{\hbar^2 a_0}$ .

Les graphiques associés à  $E_{p,eff}(r)$  et  $E_m$  sont



Les valeurs de  $r$  associées au système sont celles pour lesquelles  $E_m \geq E_{p,eff}(r)$

Pour avoir une trajectoire circulaire, cette condition ne doit être vérifiée que par une unique valeur de  $r$

$$\Rightarrow \text{c'est le cas si } \begin{cases} E_m = E_{p,eff,min} \\ r = r_C \end{cases}$$

$\Rightarrow E_{p,eff}$  est donc minimale pour la trajectoire circulaire

Calculons  $\frac{dE_{p,eff}}{dr} \Big|_{r_C} = -\frac{\mathcal{L}^2}{m_e r_C^3} + \frac{q}{r_C^2} = 0$

$$\frac{\mathcal{L}^2}{m_e} = r_C q \Rightarrow r_C = \frac{\mathcal{L}^2}{m_e q}$$

$$a \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{q m_e} \Rightarrow q m_e = \frac{\hbar^2}{a_0} \Rightarrow r_C = \frac{a_0 \mathcal{L}^2}{\hbar^2}$$

Q8. La formulation de la première partie de cette question a manifestement déstabilisé les candidats. Le jury attendait une argumentation faisant le lien entre le graphe de l'énergie potentielle effective, l'énergie mécanique de l'électron et les valeurs de  $r$  accessibles. Pour la détermination du rayon, certains candidats résolvent l'équation  $E_{p,eff}(r_C) = 0$  au lieu de  $\frac{dE_{p,eff}}{dr}(r_C) = 0$ .

En physique quantique, l'état de l'électron excité dans le niveau  $n$  est décrit par la fonction d'onde  $\Psi(M, t)$ . Celle-ci vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \Psi - \frac{q}{r} \Psi$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien.

On cherche  $\Psi(M, t)$  sous la forme d'un état stationnaire :  $\Psi(M, t) = \Phi(M)\chi(t)$ .



Q 9. Justifier que  $\chi(t)$  est de la forme  $\chi(t) = A \exp\left(-i\frac{\mathcal{E}t}{\hbar}\right)$  avec  $A$  et  $\mathcal{E}$  deux constantes.

On injecte la forme de  $\psi$  dans l'équation de D'Alembert.

$$i\hbar \phi \frac{d\chi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \chi \Delta\phi - \frac{q}{r} \chi \phi$$

$$\Rightarrow \underbrace{i\hbar \frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{dt}}_{f(t)} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{\phi} \Delta\phi - \frac{q}{r}}_{g(r)} = \text{conste} = \mathcal{E}$$

$$i\hbar \frac{d\chi}{dt} = \mathcal{E} \chi \Rightarrow \frac{d\chi}{dt} = -\frac{i\mathcal{E}}{\hbar} \chi$$

$$\chi(t) = A \exp\left(-\frac{i\mathcal{E}}{\hbar} t\right)$$

Q9. Cette question, pourtant proche du cours, est fréquemment mal traitée. Si la majorité des candidats pense à injecter la forme de  $\psi$  dans l'équation de Schrödinger, une part non négligeable d'entre eux ne procède pas correctement à la séparation des variables temps et espace qui permet d'aboutir à l'équation différentielle vérifiée par  $\chi$ .

Q 10. Justifier sans calcul le signe de  $\mathcal{E}$  pour l'électron étudié.

$\mathcal{E}$  est homogène à une énergie, qui correspond ici à celle de l'électron.

Dans le cas classique, cette énergie mécanique est négative ( $E_{\text{m}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} < 0$ ) donc on garde ici  $\mathcal{E} < 0$ .

Q10. Le signe de l'énergie  $\mathcal{E}$  ne peut pas être justifié à partir d'une hypothétique divergence de la fonction  $\chi$  lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$  !

On met  $\Phi(M)$  sous la forme  $\Phi(M) = \frac{1}{r} u(r) Y(\theta, \varphi)$  et on admet que  $u(r)$  vérifie l'équation

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{q}{r}\right) u(r) = \mathcal{E} u(r) \quad (1.1)$$

où  $\ell$  est le nombre quantique secondaire.

Q 11. Rappeler les valeurs permises pour le nombre quantique  $\ell$ .

$$\ell \in \{0; n-1\}$$

Q11. L'intervalle des valeurs permises pour le nombre quantique  $\ell$  est étonnamment mal connu (seuls 42% des réponses apportées sont correctes).

Q 12. En utilisant notamment la question 7 et en procédant par identification, justifier qu'en physique quantique les valeurs possibles de  $\mathcal{L}^2$  sont  $\ell(\ell+1)\hbar^2$ . Quelle est en particulier la valeur maximale que  $\mathcal{L}^2$  peut prendre pour l'électron étudié ?

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{q}{r}\right) u(r) = \mathcal{E} u(r)$$

ou  $E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m_e v^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{q}{r}$  Identification

$$\Rightarrow \mathcal{L}^2 = \hbar^2 \ell(\ell+1)$$

$$l_{\max} = n-1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{\max}^2 = \hbar^2 n(n-1)$$

Q 13. Que vaut alors le rayon  $r_C$  de la trajectoire circulaire obtenue en question 8 ? On donnera le résultat en fonction de  $a_0$  et de  $n$  pour un atome de Rydberg.

Trajectoire circulaire  $\Rightarrow \ell$  est max d'après l'énoncé

$$a \quad r_C = \frac{\mathcal{L}^2}{\hbar^2} a_0$$

$$\Rightarrow r_C = n(n-1) a_0$$

Q 14. On cherche à adimensionner l'équation (I.1). Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \epsilon \right) u(\rho) = 0 \quad (I.2)$$

en posant  $\rho = r/a_0$  et  $\epsilon = -\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ , avec  $\mathcal{E}_0$  une constante que l'on exprimera en fonction de  $a_0$  et de  $q$ . Quelle est la valeur numérique de  $\mathcal{E}_0$  en électron-volts ?

$$(I.1) \Rightarrow \left( -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{q}{r} - \mathcal{E} \right) u(r) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{q^2 m_e}{2\hbar^2} \left( \frac{\hbar^2}{m_e q} \right)^2 \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{(q m_e)^2 r^2} + \frac{q}{r} \frac{\hbar^2}{q m_e} + \frac{2\hbar^2}{q^2 m_e} \mathcal{E} u = 0$$

$$a \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{q m_e} \quad \text{or} \quad \rho = \frac{r}{a_0} \quad \Rightarrow \quad dr^2 = a_0^2 d\rho^2$$

$$\Rightarrow \left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \epsilon \right) u(\rho) = 0$$

$$\text{avec} \quad \epsilon = \frac{-\mathcal{E}}{\frac{q^2 m_e}{2\hbar^2}}$$

$$\text{d'où} \quad \mathcal{E}_0 = \frac{q^2 m_e}{2\hbar^2} = \frac{q}{2a_0} = \mathcal{E}_0$$

AN

$$\mathcal{E}_0 = 13.7 \text{ eV}$$

$$(\text{avec } 1 \text{ eV} = 1.606 \cdot 10^{-19} \text{ J})$$

Q14. Le changement de variables  $r \rightarrow \rho$  dans l'équation différentielle est plutôt bien réalisé. Le jury a rencontré quelques erreurs de conversion d'unités lors de l'évaluation numérique de  $\mathcal{E}_0$ .

### I.C - Atomes de Rydberg circulaires

L'électron le plus énergétique est maintenant placé dans un état de nombre quantique principal  $n \gg 1$  et de nombre quantique secondaire  $\ell$  maximum. Sa fonction d'onde spatiale est

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = A(n) \left( -\frac{r}{a_0} \sin \theta e^{i\varphi} \right)^{n-1} \exp\left(\frac{-r}{na_0}\right) \quad (I.3)$$

avec  $A(n)$  une constante réelle positive de normalisation.

Q 15. Exprimer la probabilité  $dP$  de trouver l'électron entre  $r$  et  $r + dr$ , quels que soient  $\theta$  et  $\varphi$ . On ne cherchera pas à calculer les éventuelles intégrales.

$$dP = |\Phi|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Q 15. Exprimer la probabilité  $dP$  de trouver l'électron entre  $r$  et  $r + dr$ , quels que soient  $\theta$  et  $\varphi$ . On ne cherchera pas à calculer les éventuelles intégrales.

$$dP(r, \theta, \varphi) = |\Psi(r, \theta, \varphi)|^2 d\tau = |\phi(r)|^2 d\tau$$

car  $|\chi| = 1$

$$dP(r, \theta, \varphi) = A^2(n) \left( \frac{r^2}{a_0^2} \sin^2(\theta) \right)^{n-1} \exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

La probabilité que l'électron se situe entre  $r$  et  $r + dr$  quelle que soit  $\theta$  et  $\varphi$  est donc

$$dP = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} A^2(n) \left( \frac{r^2}{a_0^2} \sin^2(\theta) \right)^{n-1} \exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$dP = 2\pi A^2(n) \frac{r^{2n}}{a_0^{2n-2}} \exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right) dr \int_0^{\pi} \sin^{2n-1}(\theta) d\theta$$

$I$

Q15. Certains candidats semblent ignorer que la densité de probabilité de présence de l'électron est donnée par  $|\psi|^2$  (et non par  $|\psi|$  par exemple).

Q 16. Montrer que la densité de probabilité  $\frac{dP}{dr}$  est maximale pour le rayon  $r_{\max} = n^2 a_0$ . Commenter ce résultat.

$$\frac{dP}{dr} = \frac{2\pi I A^2(n)}{a_0^{2n-2}} \left[ r^n \exp\left(-\frac{r}{na_0}\right) \right]^2$$

maximale quand  $\left( r^n \exp\left(-\frac{r}{na_0}\right) \right)$  max

quand  $n \ln(r) - \frac{r}{na_0}$  max

$$\frac{d}{dr} \left( n \ln(r) - \frac{r}{na_0} \right) = 0$$

$$\Rightarrow r = n^2 a_0$$

Plus  $n$  est grand, plus l'électron a une probabilité importante d'être loin du noyau.

Q 17. Faire l'application numérique pour  $n = 50$ . Pourquoi qualifie-t-on les atomes de Rydberg circulaires d'atomes géants ?

AN  $r = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m} \gg \text{\AA}$

↑  
taille caractéristique  
d'un atome  
"normal"

⇒ Atomes géants

Q17. L'application numérique est correcte pour deux tiers des candidats ayant proposé une valeur. L'interprétation physique du résultat laisse parfois à désirer : on ne peut pas répondre correctement à la question « Pourquoi qualifie-t-on les atomes de Rydberg circulaires d'atomes géants ? » sans faire une comparaison explicite avec la taille d'un atome usuel.

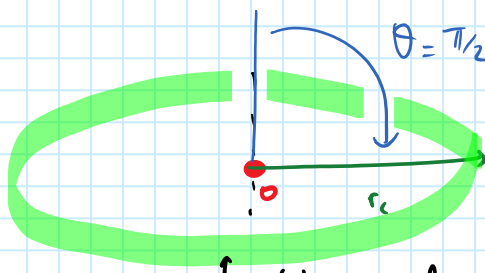
L'expression de la fonction d'onde (non demandée) permettrait en outre de montrer que la probabilité de présence est maximale dans la direction  $\theta = \pi/2$ . On admet également que la dispersion relative de  $r$  et la dispersion de  $\theta$  sont de l'ordre de  $\frac{\Delta r}{r} \approx \Delta\theta \approx \frac{1}{\sqrt{2n}}$ .

Q 18. Pourquoi peut-on dire que le comportement de l'électron excité de l'atome de Rydberg circulaire est « classique » ?

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \Delta\theta \approx 10^{-1}$$

⇒ L'électron est, plutôt, localisé en  $r = r_c$   
et en  $\theta = \pi/2$

⇒ Il est donc situé sur une orbite circulaire



(orbite circulaire "classique",  
comme dans un modèle ploutain)

Q18. Cette question a été mal comprise par certains candidats, qui évoquent le caractère non relativiste de l'électron ou qui cherchent à montrer que la relation d'indétermination de Heisenberg n'est pas vérifiée ! Le jury attendait des candidats qu'ils expliquent que l'électron étudié a une très forte probabilité de présence au voisinage de l'orbite classique caractérisée dans la sous-partie I.B.

Q 19. Donner, à partir de la forme de la fonction d'onde (I.3), l'expression de  $u(\rho)$  pour l'électron le plus énergétique dans un atome de Rydberg circulaire, à un facteur multiplicatif constant près. En déduire l'expression de  $\epsilon$  puis de  $\mathcal{E}$  pour l'électron dans un tel état. Commenter ce résultat.

$$\phi = A(n) \times \underbrace{\left(-\frac{r}{a_0}\right)^{n-1} \exp\left(-\left(\frac{r}{a_0}\right) \frac{1}{n}\right)}_{\frac{u(r)}{r}} \times \underbrace{(\sin(\theta) e^{i\varphi})^{n-1}}_{Y(\theta, \varphi)}$$

$$u(r) = r A(n) \times \left(-\frac{r}{a_0}\right)^{n-1} \times \exp\left(-\left(\frac{r}{a_0}\right) \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow u(\rho) = a_0 A(n) \rho^n \times (-1)^{n-1} \exp\left(-\frac{\rho}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \ln(u) = \ln(c) + n \ln(\rho) - \frac{\rho}{n}$$

$$\frac{d \ln(u)}{d \rho} = \frac{n}{\rho} - \frac{1}{n}$$

"

$$\frac{1}{u} \frac{du}{d\rho} \Rightarrow \frac{du}{d\rho} = \left( \frac{m}{\rho} - \frac{1}{m} \right) u$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\rho^2} = -\frac{m}{\rho^2} u + \left( \frac{m}{\rho} - \frac{1}{m} \right) \frac{du}{d\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left( \frac{n(n-1)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} + \frac{1}{m^2} \right) u$$

par identification avec I.2

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{n^2} & \Rightarrow & \epsilon = -\frac{\epsilon_0}{n^2} \\ & & & \epsilon = -\frac{\epsilon_0}{n^2} \end{aligned}}$$

on trouve un résultat analogue à l'énergie de l'atome d'hydrogène.

[chaque rayon + (Z-1) e "vus de loin" ≈ 1 proton + neutrons]

Q19. Les candidats ont généralement réussi à exprimer correctement la fonction  $u(\rho)$ . L'obtention de l'expression de  $\epsilon$ , puis de l'énergie  $\mathcal{E}$ , s'avère plus délicate : les erreurs de calcul lors de l'injection de  $u(\rho)$  dans l'équation (I.2) sont très fréquentes.

Q 20. Calculer la fréquence  $\nu_{at}$  du photon correspondant à la transition entre les états  $\mathcal{E}_{n=50}$  et  $\mathcal{E}_{n=51}$ . Dans quel domaine des ondes électromagnétiques se situe-t-il ?

$$h \nu_{at} = \mathcal{E}_{n=51} - \mathcal{E}_{n=50}$$

$$\boxed{\nu_{at} = \frac{\mathcal{E}_{n=51} - \mathcal{E}_{n=50}}{h}}$$

AN  $\boxed{\nu_{at} = 5,13 \cdot 10^{10} \text{ Hz}}$

Domaine des hyperfréquences / microondes

#### I.D - Détection des atomes de Rydberg circulaires

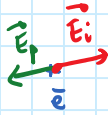
On se reportera aux différents documents de l'annexe pour traiter cette sous-partie qui est indépendante des résultats précédents.

Q 21. Considérons tout d'abord un atome d'hydrogène dans son état fondamental. L'électron est à une distance moyenne du noyau de l'ordre de  $10^{-10}$  m. Donner l'ordre de grandeur de la norme du champ électrique créé par le proton au niveau de l'électron. Justifier pourquoi on peut, en ordre de grandeur, assimiler la valeur de ce champ électrique à celle du champ d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

$$\boxed{\|\vec{E}_T\| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 10^{11} \text{ V.m}^{-1}}$$

Q21. Que de confusions entre les notions de champ électrique, de potentiel électrique ou encore de force électrostatique ! Il en découle de nombreuses erreurs sur l'unité du champ  $E$  recherché ; le jury rappelle qu'une valeur numérique — même juste — accompagnée d'une unité incorrecte est systématiquement considérée comme fautive. Par ailleurs, lorsque l'énoncé demande d'évaluer un ordre de grandeur, le résultat doit être exprimé avec un unique chiffre significatif.

$p^+$



Si l'électron est soumis à un champ extérieur  $\vec{E}_d = -\vec{E}_p$ , il subit alors une force électrique  $\vec{F} = q\vec{E} = q(\vec{E}_d + \vec{E}_p) = \vec{0}$

et apparaît ainsi comme libéré de l'attraction du noyau

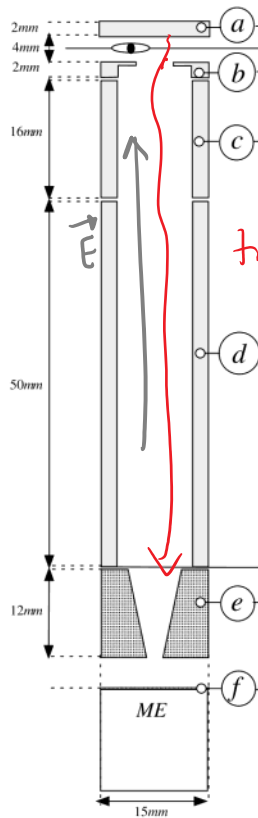
On a alors  $\|\vec{E}_d\| = \|\vec{E}_p\|$  et on peut donc assimiler la valeur du champ électrique pertinent au champ d'ionisation de l'hydrogène.

Q 22. On assimile l'état de Rydberg circulaire  $n$  à un atome d'hydrogène dont l'électron est excité dans le niveau  $n \gg 1$ . On s'intéresse aux trois états de Rydberg circulaires  $n = 50$ ,  $n = 51$  et  $n = 52$ . Une approche théorique non détaillée ici permet de calculer les champs d'ionisation des trois états précédents. Ces champs sont dans le désordre, en unités du système international,  $1,48 \times 10^4$ ,  $1,36 \times 10^4$  et  $1,60 \times 10^4$ . Attribuer à chaque  $n$  son champ d'ionisation en justifiant succinctement.

Plus  $n$  est grand et plus on s'éloigne du noyau  $\Rightarrow$  le champ d'ionisation décroît avec l'augmentation de  $n$

$n = 50$	$E_i = 1,6 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$
$n = 51$	$E_i = 1,48 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$
$n = 52$	$E_i = 1,36 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$

Q 23. Classer les potentiels  $V_a$ ,  $V_b$ ,  $V_c$ ,  $V_d$ ,  $V_e$  et  $V_f$  des différentes électrodes de la figure 11 dans l'ordre croissant en justifiant.



traject de l' $\vec{x}$

du traject de l' $\vec{x}$ , on déduit le sens du champ  $\vec{E}$  (car

$$\vec{F}_{\text{attraction par l'électron}} = -e \vec{E}, \text{ de sens opposé à } \vec{E})$$

~  $\vec{E}$  descend les potentiels ( $\vec{E} = -\text{grad}(V)$ )

donc  $V_f > V_e > V_d > V_c > V_b > V_a$

Figure 11 Présentation générale du détecteur et zoom sur la zone d'ionisation

Q 24. Estimer la vitesse des atomes de Rydberg dans la zone d'ionisation à l'aide du protocole 1.

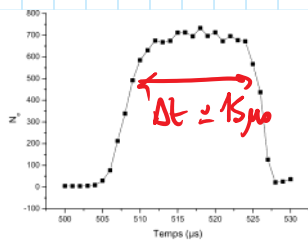
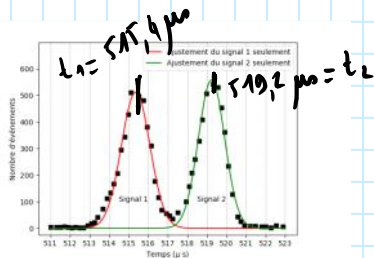


Figure 12 Pointé du centre du diaphragme de la zone d'ionisation

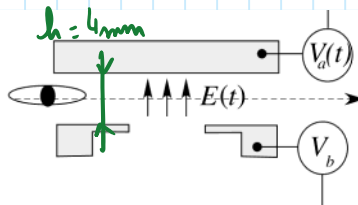
La durée pendant laquelle les atomes sont devant le diaphragme de diamètre  $d = 3\text{mm}$  est  $\Delta t \approx 15\mu\text{s}$

$$\Rightarrow v \approx \frac{d}{\Delta t} \approx 0,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Q 25. Dans le protocole 2, la variation de  $V_a(t)$  suit une loi affine:  $V_a(t) = V_b + K(t - t_0)$  avec  $V_b = 32\text{V}$  le potentiel de l'électrode  $b$ ,  $t_0$  l'instant initial de déclenchement de la variation de  $V_a(t)$  et  $K$  une constante. Déterminer l'instant de déclenchement  $t_0$  de la rampe et sa pente  $K$  permettant d'observer les deux signaux d'ionisations sélectives de la figure 13 de l'annexe.



Ajustement des deux signaux par une fonction gaussienne



$$E_{cs1} < E_{cs0}$$

A  $t = t_1$ , on a  $E = E_{cs1}$  (ionisation des atomes  $n = 51$ )

$$\begin{array}{l} \text{A } \underbrace{t = t_1}_{\text{51}} \text{ , on a } E = E_{51} \text{ (ionisation des atomes } n=51) \\ \quad \underbrace{t = t_2}_{\text{50}} \text{ , on a } E = E_{50} \text{ ( } n=50) \end{array}$$

$$\text{a } E = \frac{V_b - V_a}{h} = -\frac{K(t - t_0)}{h}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{51} = -\frac{K}{h}(t_1 - t_0) \\ E_{50} = -\frac{K}{h}(t_2 - t_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bullet \frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{E_{50}}{E_{51}}$$

$$\Rightarrow (t_2 - t_0) E_{51} = (t_1 - t_0) E_{50}$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{t_1 E_{50} - t_2 E_{51}}{E_{50} - E_{51}} = 4,69 \text{ ps}$$

$$\bullet K = -\frac{h E_{51}}{t_1 - t_0} = -2,09 \cdot 10^{-25} \text{ V}\cdot\text{s}^{-1}$$

parfois maladroite. En revanche, les deux questions non guidées, repérées par une marge dans l'énoncé, ont été délaissées d'emblée par plus de 80% des candidats. Cela est regrettable dans la mesure où ces deux questions représentent environ 18% du barème, sans être particulièrement chronophages. Les candidats qui ont proposé des éléments de réponse sont souvent récompensés : un quart d'entre eux obtient au moins la moitié du total des points alloués.

Q 26. Quel problème pourrait-on rencontrer si l'on choisissait une variation de  $V_a(t)$  plus rapide ? Et plus lente ?

Si Variation plus rapide

$\Rightarrow$  recouvrement des pics correspondant à  $n=50$   
et  $n=51 \Rightarrow$  perte de précision dans la distinction des 2 états

[comme figure 12]

Si variation plus lente

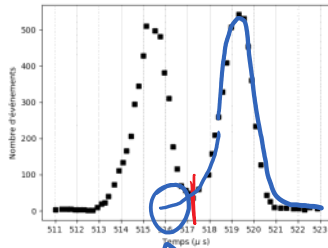
$\Rightarrow$  les atomes  $n=50$  risquent d'être ionisés après être passés devant le diaphragme et les électrons ainsi générés ne peuvent être détectés.

[ou les  $n=51$  s'ionisent avant d'être passés, selon la valeur de  $t_0$ ]

$\Rightarrow$  IMPOSSIBILITE d'obtenir 2 pics.



Q 27. Quelle valeur faut-il prendre pour  $t_e$ , défini dans le paragraphe « Principe de la détection » à la fin de l'annexe ? Quelle(s) cause(s) expérimentale(s) pourraient fausser l'attribution de l'électron détecté au bon état de Rydberg ?



### Sources d'erreurs

- on voit qu'il y a une ligne recouvrant des pics  $\Rightarrow$  des atomes  $n=50$  peuvent être ionisés avant  $t_e$  [et des  $51$  après]

- on a négligé ici le temps de trajet de l' $e^-$  jusqu'au détecteur (zones b, c, d, e, f) ; en tout cas, on l'a supposé identique pour tous les  $\mathbb{I}$ . Si une dispersion des temps de trajet dans cette zone existe, alors des  $\bar{z}$  peuvent en "doubler" d'autres et créer des erreurs de détection.

Cette partie, qui représente 25% du barème a globalement été mal traitée, comme en attestent les statistiques : la médiane des scores obtenus se situe à 20% du nombre de points récupérables et seuls un quart des candidats obtient plus de 33% des points alloués à cette partie.

## II Étude de la cavité micro-ondes

La cavité micro-ondes est constituée de deux miroirs métalliques en vis-à-vis entre lesquels un photon de longueur d'onde  $\lambda_0$  est piégé. Dans un premier temps (sous-partie II.A) nous allons nous intéresser aux propriétés d'une cavité composée de miroirs métalliques plans avant d'aborder le cas des miroirs sphériques (sous-partie II.B).

Q 28. On se place en un point d'abscisse  $z$  à l'intérieur de la cavité. Exprimer  $\underline{s}_1(z, t)$  en fonction de  $\underline{s}_0(z, t)$ .

$\underline{s}_1$  est une onde

- monochromatique de pulsation  $\omega$
- se propageant dans le sens des  $z \downarrow$

$$\Rightarrow \underline{s}_1 = \underline{s}_2 \exp(j(\omega t + kz))$$

Par définition du coefficient de réflexion :

$$r_n = \left. \frac{\underline{s}_1}{\underline{s}_0} \right|_{z=d} = \frac{\underline{s}_1 e^{jkd}}{\underline{s}_0 e^{-jkd}}$$

$$\Rightarrow \underline{s}_1 = r_n \underline{s}_0 e^{-jkd}$$

$$\Rightarrow \underline{S}_1 = r_n S_0 e^{-2jkd}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta}_1 = r_n S_0 e^{j(\omega t + k_3 z)} e^{-2jkd}$$

Q 29. Exprimer  $\underline{s}_2(z, t)$  en fonction de  $\underline{s}_0(z, t)$  ainsi que  $\underline{s}_3(z, t)$  en fonction de  $\underline{s}_1(z, t)$ . On fera intervenir la grandeur  $\Phi = 4\pi d/\lambda_0$ .

De même  $\underline{\Delta}_2 = \underline{S}_2 e^{j(\omega t - k_3 z)}$

$$r_n = \left. \frac{\underline{\Delta}_2}{\underline{\Delta}_1} \right|_{z=0} = \frac{\underline{S}_2}{r_n S_0 e^{-2jkd}}$$

$$\Rightarrow \underline{S}_2 = r_n^2 S_0 e^{-2jkd}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta}_2 = r_n^2 S_0 e^{j(\omega t - k_3 z)} e^{-2jkd}$$

$$\underline{\Delta}_2 = r_n^2 e^{-2jkd} \underline{\Delta}_0$$

cohérent:  $r_n^2$  car 2 réflexions  
différence  $e^{-2jkd}$  car 2d parcourus  
en plus (aller-retour)

$$\underline{\Delta}_3 = \underline{S}_3 e^{j(\omega t + k_3 z)}$$

$$r_n = \left. \frac{\underline{\Delta}_3}{\underline{\Delta}_2} \right|_{z=d} = \frac{\underline{S}_3 e^{jkd}}{r_n e^{-2jkd} S_0 e^{-jkd}}$$

$$\underline{S}_3 = r_n^3 S_0 e^{-j4kd}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta}_3 = r_n^3 S_0 e^{-j4kd} e^{j(\omega t + k_3 z)}$$

$$\underline{\Delta}_3 = r_n^2 \underline{\Delta}_1 e^{-2jkd}$$

pas forcément nécessaire  
on pourrait procéder par analogie.

or  $k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Rightarrow$  En utilisant les notations de l'énoncé:

$$\frac{\underline{\Delta}_3}{\underline{\Delta}_1} = \frac{\underline{\Delta}_1}{\underline{\Delta}_0} = r_n^2 e^{-j\Phi}$$

Q 30. Simplifier alors l'expression de la somme cohérente des amplitudes complexes des ondes se propageant dans le sens des  $z$  croissants:  $\underline{s}_+(z, t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \underline{s}_{2p}(z, t)$ . De même pour la somme cohérente des amplitudes

complexes des ondes se propageant dans le sens des  $z$  décroissants:  $\underline{s}_-(z, t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \underline{s}_{2p+1}(z, t)$ .

$$\underline{\Delta}_+ = \sum_{p=0}^{\infty} \underline{\Delta}_{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} \underline{\Delta}_0 \left( r_n^2 e^{-j\Phi} \right)^p$$

$$\underline{\Delta}_+ = \sum_{p=0}^{\infty} \underline{\Delta}_0 r^p = \sum_{p=0}^{\infty} \underline{\Delta}_0 (r^2 e^{-j\Phi})^p$$

$$\underline{\Delta}_0 * (r^2)^p * (e^{-j\Phi})^p$$

$$\underline{\Delta}_+ = \underline{\Delta}_0 * \sum_{p=0}^{\infty} (r^2 e^{-j\Phi})^p$$

Σ termes d'une suite géométrique

$$\underline{\Delta}_+ = \underline{\Delta}_0 \frac{1}{1 - r^2 e^{-j\Phi}}$$

De même,

$$\underline{\Delta}_- = \underline{\Delta}_0 * \frac{1}{1 - r^2 e^{-j\Phi}}$$

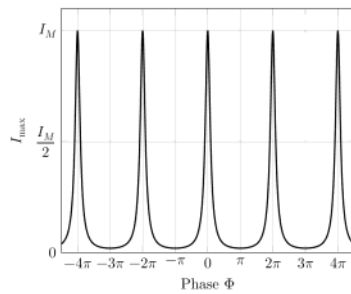


Figure 3 Tracé de  $I_{\max}$  en fonction de  $\Phi$

Q 31. Pour quelles fréquences  $\nu_{\text{cav}}$  cette intensité est-elle maximale ?

Intensité max  $\Rightarrow \Phi = 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z}$   
 (NB:  $\Delta_+$  et  $\Delta_{+2}$  en phase  
 $\Rightarrow$  interférence constructive)

$$\Rightarrow \frac{4\pi d}{\lambda_0} = 2\pi p \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{\lambda_0} = \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{c} \nu_{\text{cav}} = \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad \nu_{\text{cav}} = p * \frac{c}{2d}$$

$p \in \mathbb{Z}$   
 $c$ : célérité de la lumière dans le vide

Q 32. On s'intéresse à la largeur à mi-hauteur  $\delta\Phi$  des pics de  $I_{\max}$  définie par  $I_{\max}(\delta\Phi/2) = I_M/2$ . Dans l'hypothèse où  $1 - R \ll 1$ , donner l'expression de  $\delta\Phi$  en fonction de  $M$ . En déduire la largeur en fréquence  $\delta\nu$  des pics de résonance de la cavité.

$$I_{\max} = \frac{I_M}{1 + M \sin^2(\Phi/2)}$$

$$I_{\max}\left(\frac{\delta\Phi}{2}\right) = \frac{I_M}{2}$$

$$\Rightarrow M \sin^2\left(\frac{\delta\Phi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin\left(\frac{\delta\Phi}{4}\right)}_{\ll 1} = \sqrt{\frac{1}{M}} = \frac{(1-R)}{2\sqrt{R}} \ll 1$$

$$\Rightarrow \text{on } \left( \frac{\delta \omega}{\omega} \right) = \sqrt{\frac{1}{M}} = \left( \frac{1}{2\sqrt{R}} \right) \ll 1$$

$$\underbrace{\delta \omega}_{\sim \frac{\delta \phi}{4}} \approx \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow \boxed{\delta \phi = \frac{4}{\sqrt{M}}}$$

$$a \quad \nu = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{4\pi d} \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta \nu = \frac{c}{4\pi d} \delta \phi = \frac{c}{\pi d \sqrt{M}}}$$

Q 33. Associer à cette largeur de fréquence une durée typique  $\tau$  de l'onde dans la cavité en fonction de  $c$ ,  $d$  et  $R$ , toujours dans l'hypothèse où  $1 - R \ll 1$ .

$$\tau \sim \frac{1}{\delta \nu} = \frac{\pi d \sqrt{M}}{c} = \frac{\pi d}{c} \frac{2\sqrt{R}}{1-R}$$

Nous cherchons maintenant à retrouver l'ordre de grandeur de cette durée  $\tau$  en adoptant un point de vue corpusculaire. À chaque réflexion, la probabilité que le photon franchisse le miroir et sorte de la cavité est  $T = 1 - R$ .

Q 34. Déterminer la durée de vie moyenne du photon dans la cavité en fonction de  $c$ ,  $d$  et  $R$ .

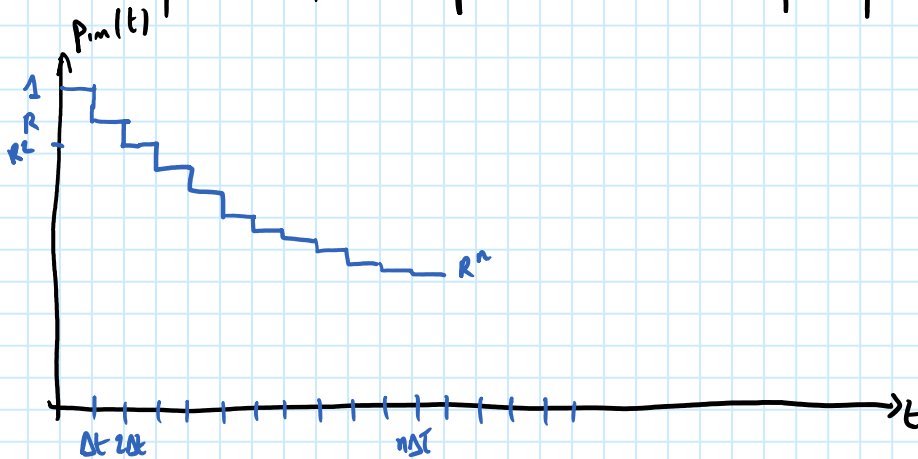
### Démo 1

Soit  $p_i(t)$  la probabilité que le photon soit encore dans la cavité après  $t$  secondes.

On suppose qu'à  $t=0$ , il est en  $z=0$  et dirige vers la droite.

Soit  $\Delta t = \frac{d}{c}$  le temps de trajet entre  $z=0$  et  $z=d$

À chaque choc, la probabilité est multipliée par  $R < 1$



$$p_{im} (t \in [n \Delta t; \overset{t_m}{(n+1) \Delta t}]) = R^n$$

Soit  $\tau$  la durée de vie du photon

$$\underbrace{p(\tau \in [n \Delta t; (n+1) \Delta t])}_{\text{probabilité que } \tau} = p_{im}(t \in [n \Delta t; (n+1) \Delta t]) - p_{im}(t \in [(n+1) \Delta t; (n+2) \Delta t])$$

$P(t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]) = P_{in}(t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]) - P_{in}(t \in [(n+1)\Delta t, (n+2)\Delta t])$   
 probabilité que  $\tau$  soit dans l'intervalle  $[n\Delta t; (n+1)\Delta t]$ :  
 le photon soit dans la cavité dans cet intervalle, mais plus dans l'intervalle suivant

Cherchons l'espérance associée  
 $\bar{\tau} = E(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n p(\tau \in [t_n; t_{n+1}])$   
 $= \sum_{n=0}^{\infty} n \Delta t R^n (1-R)$   
 $= (1-R) \Delta t R \sum_{n=0}^{\infty} n R^{n-1}$   
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dR^n}{dR} = \frac{d}{dR} \sum_{n=0}^{\infty} R^n = \frac{d}{dR} \frac{1}{1-R}$   
 $\Rightarrow \bar{\tau} = \frac{\Delta t R}{(1-R)} = \frac{d}{c} \frac{R}{1-R}$

Démo 2 Soit  $N(t)$  le nombre total de photons dans la cavité à l'instant  $t$ .  
 Durant  $dt$ , la variation du nombre de photons (due aux sortites) est  
 $dN = -\lambda dt N (= -\delta N_{sortites})$   
 Or, pour un photon, la probabilité de sortie d'un photon / unité de temps est  $\frac{c}{d}$  avec une collision tous les  $\Delta t = \frac{d}{c}$  avec probabilité de sortie de  $T \Rightarrow \lambda = \frac{Tc}{d}$   
 $\Rightarrow \delta N_{sortites} = \frac{cT}{d} dt N$

$\Rightarrow \frac{dN}{dt} + \frac{cT}{d} N = 0$  associé au temps caractéristique  $\tau = \frac{d}{cT} = \frac{d}{c(1-R)}$

Q 35. Que doit valoir  $1 - R$  pour avoir une durée de vie du photon de 100 ns ? Commenter.

$\tau = \frac{d}{c} \frac{R}{(1-R)} \approx \frac{d}{c(1-R)}$

Pour  $R \rightarrow 1$ , les deux démonstrations donnent un résultat proche.

$1-R = \frac{d}{c\tau} = \frac{26,6 \cdot 10^{-3}}{3,0 \cdot 10^8 \cdot 0,10}$

$1-R = 8,87 \cdot 10^{-10}$

$\Rightarrow R > 99,999\% \Rightarrow$  grande exigence sur qualité du miroir.

Q 36. On recouvre en pratique les miroirs d'un supraconducteur de résistance électrique nulle. Pourquoi ?

lorsque une onde EM arrive sur un métal  $\rightarrow$  effet de peau sur une profondeur  $\delta = \sqrt{2}$

lorsque une onde EM arrive sur un métal  
 $\Rightarrow$  effet de peau sur une profondeur  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$   
 associé à de la dissipation par effet Joule (et donc à une diminution de l'énergie réfléchi et donc de R)  
 conductivité métal

Pour faire tendre  $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma \rightarrow \infty$   
 (Résistance  $\rightarrow 0$ )

$\Rightarrow$  utilisation de supraconducteurs.

### II.B - Miroirs sphériques

Les miroirs ont en réalité une dimension finie. Considérons la situation où l'on aurait des disques plans de rayon  $a = 25$  mm. Comme indiqué en figure 4, l'onde électromagnétique parvenant sur un miroir (ici le miroir de droite) est ainsi diffractée. Une partie de l'onde diffractée n'est pas captée par le miroir en vis-à-vis (ici le miroir de gauche).

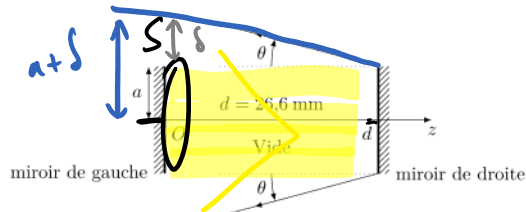


Figure 4 Diffraction sur l'un des deux miroirs (ici le miroir de droite)

Q 37. Estimer la durée  $\tau_{\text{diff}}$  au bout de laquelle l'intensité restant dans la cavité est divisée d'un facteur 1000 par rapport à l'intensité initiale pour un photon de fréquence 51,1 GHz. Commenter ce résultat.

Supposons un faisceau de section  $S = \pi a^2$   
 A chaque réflexion, une fraction du faisceau sort de la cavité  
 Cette fraction est  $\frac{\pi(a+\delta)^2 - \pi a^2}{\pi a^2} = \alpha$

avec  $\delta = d \sin \theta$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi a \delta + \pi \delta^2}{\pi a^2} = \frac{2\delta}{a} \text{ au premier ordre en } \frac{\delta}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2d \frac{\sin(\theta)}{a} \quad \alpha \quad \sin \theta \approx \frac{\lambda}{a} \text{ par diffraction}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \frac{\lambda d}{a^2} \ll 1 \text{ (faisceau d'énergie sortant à chaque réflexion)}$$

On cherche  $\tau_{\text{diff}} = n * \frac{d}{c} / (1 - \alpha)^n = 10^{-3}$

On cherche  $\tau_{diff} = n * \frac{d}{c} / (1 - \alpha) = 10^{-9}$

↑  
nombre de réflexions  
sur 1 miroir

$$\Rightarrow n = \frac{-3}{\log(1-\alpha)} = -\frac{3 \ln(10)}{\ln(1-\alpha)}$$

$$\stackrel{\alpha \ll 1}{=} + \frac{3 \ln(10)}{\alpha} = \frac{3 \ln(10) a^2}{2 \lambda d}$$

$$\Rightarrow \tau_{diff} = \frac{3 \ln(10) a^2}{2 \lambda c} = \frac{3 \ln(10) a^2}{2 c^2} \checkmark$$

AN

$$\tau_{diff} = 1,2 \text{ ns}$$

⇒ semble faible pour effectuer la détection du photon au regard des autres coûts de temps en jeu dans le pb.

(notamment les 100 ns de durée de vie du photon que l'on souhaite observer)

Q 38. Calculer  $w_0$  pour une fréquence de 51,1 GHz.

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi}} \sqrt{\frac{d'}{2} \left( R_{M} - \frac{d'}{2} \right)}$$

$$w_0 = 6,0 \text{ mm}$$

Q38. Beaucoup d'erreurs sur la dimension de  $w_0$ , souvent assimilée à une pulsation au lieu d'une longueur.

Q39 et Q40. Ces questions, relativement délicates, ont rarement été abordées.

Q 39. Au niveau de l'axe ( $Oz$ ) ( $r = 0$ ), on souhaite que la structure d'onde stationnaire présente un nœud au niveau de chaque miroir et  $p$  ventres avec en particulier un ventre au niveau de  $O$ . En déduire, en fonction de  $p$ , la variation en valeur absolue de  $\Phi(r = 0, z)$  entre  $z = 0$  et  $z = d'/2$ . Que vaut  $p$  pour une fréquence de l'onde de 51,1 GHz ?

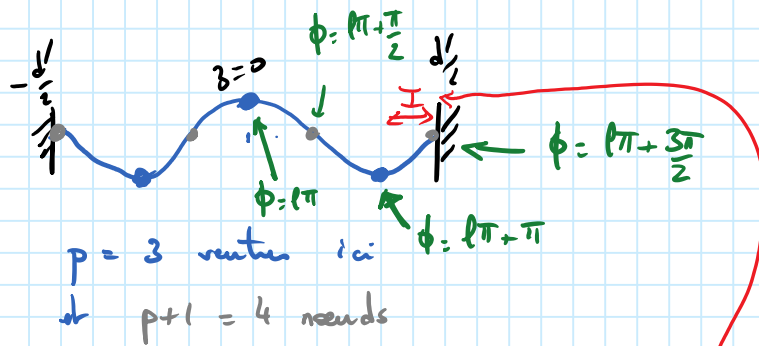
$$g(M, t) = s_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_0} - \arctan\left(\frac{\lambda_0 z}{\pi w_0^2}\right) + \frac{\pi r^2}{\lambda_0 R_p(z)} + \varphi\right) \exp(i\omega t) \quad (\text{II.2})$$

$\Phi(r, z)$

$$\Delta(r=0, t) = s_0 \frac{w_0}{w(z)} \cos\left(kz - \arctan\left(\frac{\lambda_0 z}{\pi w_0^2}\right) + \varphi\right) e^{i\omega t}$$

ventre en 0  $z = 0 \Rightarrow \cos\varphi = \pm 1 \Rightarrow \varphi = k \times \pi \quad (3)$

$p$  ventres  
 exemple avec  
 $p = 3$  pour  
 "voir"



$z=0$  est ventre  $\Rightarrow p$  impair

on remplace  $p$  intervalles de ventre à ventre à nœud "I" en passant de  $z=0$  à  $z=d'/2$

$\hookrightarrow$  chaque intervalle correspond à une variation de  $\frac{\pi}{2}$  de  $\phi$  [car chaque intervalle correspond à  $1/4$  de période du cosinus]

$$\Rightarrow \left| \phi(z=0, \frac{d'}{2}) - \phi(z=0, \frac{d'}{2}) \right| = \frac{p\pi}{2}$$

en  $z=0$   $\phi(0,0) = \varphi$

en  $z=\frac{d'}{2}$   $\phi(0, \frac{d'}{2}) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d'}{2} - \arctan\left(\frac{d_0}{\pi \omega_0^2} \frac{d'}{2}\right) + \varphi$

$$\Rightarrow \left| \frac{\pi d'}{\lambda} - \arctan\left(\frac{d_0}{\pi \omega_0^2} \frac{d'}{2}\right) \right| = p\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow p = \left| \frac{2d'}{\lambda} - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{d_0}{\pi \omega_0^2} \frac{d'}{2}\right) \right|$$

AN  $\boxed{p=9}$

Q 40. En faisant l'analogie avec la corde de Melde, estimer l'ordre de grandeur de la taille d'un fuseau. Faire l'application numérique et commenter sachant que le jet atomique traverse la cavité en son centre et a un diamètre de 0,7 mm.

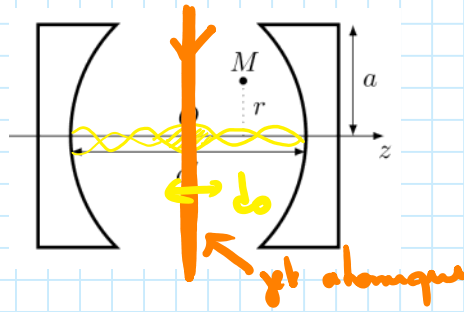
Pour une corde de Melde, la distance entre 2 nœuds est  $d_0 = \frac{\lambda}{2}$  [cela revient à négliger l'influence du tube en  $\arctan()$ ]

AN  $\boxed{d_0 = \frac{c}{2f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 5 \cdot 10^{10}} = 3 \text{ mm}}$



$$\underline{AN} \quad \boxed{d_0 = \frac{c}{2f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 5 \cdot 10^{10}} = 3 \text{ mm}}$$

le diamètre du jet atomique étant  $\approx \frac{d_0}{4}$ , il sera, au voisinage de  $z=0$ , en interaction avec un ventre de l'onde lumineuse  
 $\Rightarrow$  Interaction Optimale

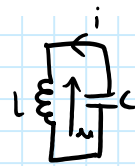


### III Couplage entre un atome de Rydberg et la cavité

Q 41. Déterminer les expressions de  $\omega_{at}$  et  $\omega_{cav}$  en fonction de  $L$ ,  $C_{at}$  et  $C_{cav}$ .

$$\omega_{at} = \frac{1}{\sqrt{LC_{at}}} \quad \omega_{cav} = \frac{1}{\sqrt{LC_{cav}}}$$

Q41. Quelques candidats écrivent des relations de la forme  $i = C \frac{dq_c}{dt}$  pour le condensateur ou  $u_L = L \frac{di}{dt}$  pour la bobine sans s'être assurés au préalable que ces dipôles étaient orientés en convention récepteur.



démo  $i = -C \frac{du}{dt}$  *convention générateur*

$$u = L \frac{di}{dt} = -LC \frac{d^2 u}{dt^2}$$

Q 42. Les deux circuits sont considérés sans résistance. Quels phénomènes physiques sont ainsi négligés au niveau de l'atome et au niveau de la cavité ?

$$u + LC \frac{d^2 u}{dt^2} = 0$$

$\uparrow$   
 $1/\omega_0^2$

l'énergie du système couplé de 2 oscillateurs et du condensateur  $\Rightarrow$  on n'envisage aucun échange d'énergie autre que celui entre l'atome et le photon

$\rightarrow$  pas de désexcitation spontanée de l'atome vers niveau  $n < 50$  menant à l'émission d'un photon hors cavité // pas de désexcitation non radiative

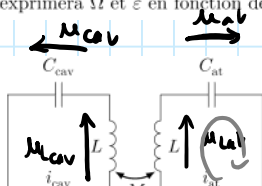
$\rightarrow$  au niveau de la cavité, pas de perte d'énergie au niveau des parois :  $R=1$

$\rightarrow$  pas de pertes par diffraction au niveau de la cavité

Q 43. Montrer que les deux intensités  $i_{cav}$  et  $i_{at}$  vérifient le système d'équations couplées suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + (\omega_0^2 - \varepsilon) i_{cav} &= 0 \\ \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + (\omega_0^2 + \varepsilon) i_{at} &= 0 \end{aligned} \quad (III.1)$$

où l'on exprimera  $\Omega$  et  $\varepsilon$  en fonction de  $\omega_0$ ,  $\delta$ ,  $M$  et  $L$ .



$$\mathcal{M}_{cav} + \mathcal{M}_{Lcav} = 0$$

$$\mathcal{M}_{cav} + L \frac{di_{cav}}{dt} + M \frac{di_{at}}{dt} = 0$$

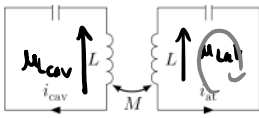


Figure 6 Circuit équivalent au système {photon + atome}

$$M i_{cav} + L \frac{d i_{cav}}{dt} + M \frac{d i_{at}}{dt} = 0$$

$$i_{cav} + LC_{cav} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \pi C_{cav} \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{i_{cav}}{LC_{cav}} = 0$$

$$M i_{at} + M i_{cav} = 0$$

$$L \frac{d i_{at}}{dt} + M \frac{d i_{cav}}{dt} + M i_{cav} = 0$$

$$* C_{at} \frac{d}{dt}$$

$$LC_{at} \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + MC_{at} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + i_{at} = 0$$

$$\frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{\pi}{L} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{i_{at}}{LC_{at}} = 0$$

Par identification  $\frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{M}{L} \Rightarrow \Omega = \omega_0 \frac{M}{L}$

$$\frac{1}{LC_{at}} = \omega_0^2 + \epsilon = \omega_{at}^2$$

$$\frac{1}{LC_{cav}} = \omega_0^2 \cdot \epsilon = \omega_{cav}^2$$

$$\Rightarrow 2\epsilon = \omega_{at}^2 - \omega_{cav}^2$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{\omega_{at}^2 + \omega_{cav}^2}{2} \approx (\omega_{at} - \omega_{cav})$$

$$\epsilon = \omega_0 \delta$$

Q 44. Déterminer l'équation vérifiée par  $\omega$ , équation que l'on écrira sous la forme d'un polynôme en  $\omega$  qui s'annule, mais que l'on ne cherchera pas à résoudre.

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + (\omega_0^2 - \epsilon) i_{cav} = 0 \\ \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + (\omega_0^2 + \epsilon) i_{at} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 \underline{i_{cav}} - \frac{\Omega}{\omega_0} \omega^2 \underline{i_{at}} + (\omega_0^2 - \epsilon) \underline{i_{cav}} = 0 \\ -\omega^2 \underline{i_{at}} - \frac{\Omega}{\omega_0} \omega^2 \underline{i_{cav}} + (\omega_0^2 + \epsilon) \underline{i_{at}} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{i_{at}} = \frac{(\omega_0^2 - \epsilon - \omega^2)}{\Omega} * \frac{\omega_0}{\omega^2} \underline{i_{cav}} \\ - \frac{\omega_0^2 - \epsilon - \omega^2}{\Omega} \omega_0 \underline{i_{cav}} - \frac{\Omega}{\omega_0} \omega^2 \underline{i_{cav}} + \frac{\omega_0^2 + \epsilon}{\Omega} \frac{(\omega_0^2 - \epsilon - \omega^2)}{\omega^2} \omega_0 \underline{i_{cav}} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{\omega_0}{\Omega} (\omega_0^2 - \varepsilon - \omega^2) \omega^2 - \frac{\Omega \omega^4}{\omega_0} + \frac{\omega_0^2 + \varepsilon}{\Omega} (\omega_0^2 - \varepsilon - \omega^2) \omega_0 = 0$$

En présence de couplage entre l'atome et la cavité, le niveau  $\{n = 50 + 0 \text{ photon dans la cavité}\}$  garde la même énergie. Il est pris comme niveau de référence des énergies.

En présence de couplage, l'état {atome  $n = 50 + 1$  photon dans la cavité} a une énergie  $\hbar\omega_-$  tandis que l'état {atome  $n = 51 +$  aucun photon dans la cavité} a une énergie  $\hbar\omega_+$ . L'état {atome  $n = 51 + 1$  photon dans la cavité} voit quant à lui son énergie augmentée de  $+\hbar\Omega^2/(2\delta)$ .

Q 45. Reproduire la figure 7 sur votre copie et dessiner en pointillés la position des quatre états considérés en présence de couplage.

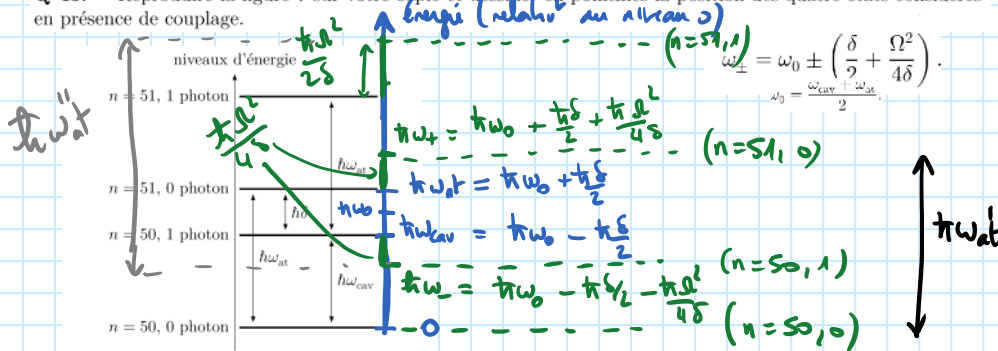


Figure 7 Niveaux d'énergie du système {atome + cavité} en l'absence de couplage

Q 46. En l'absence de couplage entre la cavité et l'atome, la différence d'énergie entre les niveaux  $n = 50$  et  $n = 51$  est  $\hbar\omega_{\text{at}}$ . Que vaut la différence d'énergie  $\hbar\omega'_{\text{at}}$  entre les niveaux  $n = 50$  et  $n = 51$  en présence d'un couplage cavité-atome dans le cas où la cavité ne contient pas de photon ? En déduire la variation de la pulsation  $\Delta\omega_{\text{at}}^{(0\text{ph})} = \omega'_{\text{at}} - \omega_{\text{at}}$  de l'atome correspondante.

$$\hbar\omega'_{\text{at}} = \hbar\omega_{\pm} = \hbar\omega_0 + \frac{\hbar\delta}{2} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\delta}$$

$$\text{or } \hbar\omega_{\text{at}} = \hbar\omega_0 + \frac{\hbar\delta}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega_{\text{at}}^{(0\text{ph})} = \omega'_{\text{at}} - \omega_{\text{at}} = \frac{\Omega^2}{4\delta}$$

Q 47. Déterminer de même l'expression de  $\Delta\omega_{\text{at}}^{(1\text{ph})}$  dans le cas où la cavité contient 1 photon.

$$\begin{aligned} \text{Tout d'abord } \hbar\omega'_{\text{at}} &= \hbar(\omega_{\text{at}} + \omega_{\text{cav}}) + \frac{\hbar\Omega^2}{2\delta} \\ &\quad \text{entre les 2 niveaux } n=50 \text{ et } n=51 \text{ en présence de photon.} \\ &\quad - \left(\hbar\omega_{\text{cav}} - \frac{\hbar\Omega^2}{4\delta}\right) \\ &= \hbar\left(\omega_{\text{at}} + \frac{3\Omega^2}{4\delta}\right) \end{aligned}$$

$$\text{or } \Delta\omega_{\text{at}}^{(1\text{ph})} = \frac{1}{\hbar} (\omega'_{\text{at}} - \omega_{\text{at}}) = \frac{3\Omega^2}{4\delta}$$