LAMES RETARD.

Soit un milieu linéaire homogène, isotrope et transparent (LHI) d'indice n réel, où se propage une onde lumineuse dont $\vec{u}(M)$ est le vecteur unitaire qui oriente la propagation, M étant un point quelconque de ce milieu. Cette onde présente localement une **structure d'onde plane qui se propage à la vitesse $v = \frac{c}{n}$** : elle consiste en un champ électromagnétique variable, transverse, dont les vecteurs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ sont perpendiculaires.

⇒ **On peut de fait utiliser les résultats relatifs aux $OPPM(\pm)$ dans le vide, en remplaçant la célérité c par $\frac{c}{n}$**

	Vide	LHI
Relation de dispersion	$k_0 = \frac{\omega}{c}$ $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$	$k = \frac{\omega}{\left(\frac{c}{n}\right)} = n\frac{\omega}{c} = nk_0$ $\lambda = \frac{2\pi\left(\frac{c}{n}\right)}{\omega} = \frac{1}{n}\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right) = \frac{\lambda_0}{n}$
Relation de structure (direction de propagation donnée par $\vec{u}$)	$\vec{B} = \frac{(\vec{k}_0 \wedge \vec{E})}{\omega} = \frac{(\vec{u} \wedge \vec{E})}{c}$	$\vec{B} = \frac{(\vec{k} \wedge \vec{E})}{\omega} = n\frac{(\vec{k}_0 \wedge \vec{E})}{\omega} = \frac{(\vec{u} \wedge \vec{E})}{c/n}$

Dans ce complément de cours, on s'intéresse aux ondes lumineuses, mais les résultats obtenus pourront être appliqués aux autres ondes électromagnétiques.

1. DEFINITIONS.

- Une lame à retard de phase est une lame à faces parallèles, d'une épaisseur de l'ordre de quelques dixièmes de millimètres, transparente, linéaire, homogène taillée dans un matériau ***anisotrope***.
- On considère une onde lumineuse plane monochromatique qui traverse sous incidence normale (Oz) une lame d'épaisseur e, dont les faces extrêmes sont les plans de cotes $z = 0$ et $z = e$.
- Si l'onde incidente est polarisée rectilignement, elle n'émerge polarisée rectilignement que pour deux orientations particulières orthogonales qui définissent ***les lignes neutres*** de la lame. Pour la suite, nous supposerons ces deux directions confondues avec les axes (Ox) et (Oy). Suivant ces deux directions privilégiées, la lame se comporte comme un milieu linéaire, homogène, transparent et isotrope d'indices respectifs n_x et n_y associés à des vitesses de propagation différentes V_x *et* V_y.
- Si $n_x < n_y$ alors $V_x > V_y$, la vitesse de propagation d'une onde polarisée selon (Ox) est supérieure à celle d'une onde polarisée selon (Oy). On qualifie la ligne neutre (Ox) d'***axe rapide*** et la ligne neutre (Oy) d'***axe lent***.

2. LES PROPRIETES D'UNE LAME

- A la traversée de la lame, les composantes suivant les deux lignes neutres ne subissent pas le même traitement. Les chemins optiques n_ye et n_xe à travers la lame étant différents, sa traversée introduit une différence de marche $\delta_L = (n_y - n_x)e$ donc une différence de phase $\Delta\theta = \frac{2\pi(n_y-n_x)e}{\lambda_o} = \frac{2\pi}{\lambda_o}\delta_L$ entre les deux vibrations parallèles aux lignes neutres.

> ***L'action d'une lame cristalline sur un faisceau monochromatique est complètement définie par :***
> - ***Les directions (Ox) et (Oy) des lignes neutres ;***
> - ***Le retard de phase $\Delta\theta = \frac{2\pi(n_y-n_x)e}{\lambda_o}$ pris à sa traversée par la composante du champ $\vec{E}$ incident parallèle à l'axe lent sur la composante parallèle à l'axe rapide.***

- Dans le cas général, une onde polarisée elliptique reste après la traversée de la lame elliptique.

3. Les lames demi-onde.

a. Definitions.

- ***Une lame demi-onde est une lame à retard taillée dans un matériau anisotrope de façon que $\Delta\theta = \pi$.***
- Son épaisseur est telle que $\delta_L = (n_y - n_x)e = \frac{\lambda_o}{2}$. La différence de marche entre les deux vibrations est alors une demi-longueur d'onde d'où son nom.
- Il est clair qu'une lame d'une épaisseur donnée ne peut être rigoureusement demi – onde que pour une onde de fréquence, de longueur d'onde λ_o dans le vide bien déterminée.

b. Proprietes.

- On considère une onde lumineuse plane monochromatique de longueur d'onde dans vide λ_o qui traverse sous incidence normale (Oz) une lame demi-onde pour λ_o d'épaisseur e, dont les faces extrêmes sont les plans de cotes z = 0 et z = e.

En entrée, on a l'onde quelconque : $\boldsymbol{\vec{E}(0,t) = E_{ox}.cos(\omega t).\vec{u}_x + E_{oy}.cos(\omega t + \varphi).\vec{u}_y}$

En sortie, on a l'onde : $\vec{E}(e,t) = E_{ox}.cos[\omega\left(t - \frac{n_x e}{c}\right)].\vec{u}_x + E_{oy}.cos[\omega\left(t - \frac{n_y e}{c}\right) + \varphi].\vec{u}_y$

$\Rightarrow \vec{E}(e,t) = E_{ox}.cos[\omega\left(t - \frac{n_x e}{c}\right)].\vec{u}_x + E_{oy}.cos[\omega\left(t - \frac{n_x e}{c}\right) + \varphi'].\vec{u}_y$ avec $\varphi' = \varphi - \Delta\theta = \varphi - \pi$

En posant $t' = t - \frac{n_x e}{c}$, on obtient : $\boldsymbol{\vec{E}(e,t') = E_{ox}.cos\omega t'.\vec{u}_x - E_{oy}.cos(\omega t' + \varphi).\vec{u}_y}$

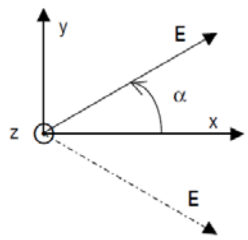
La composante du champ électrique suivant l'axe de lent, E_y, a été remplacée par son opposé.

Action sur une onde polarisee rectilignement.

$$\boldsymbol{\vec{E}(0,t) = E_o.cos\alpha.cos\omega t.\vec{u}_x + E_o.sin\alpha.cos\omega t.\vec{u}_y}$$

$\Rightarrow$ Après la traversée de la lame demi-onde, l'onde devient : $\boldsymbol{\vec{E}(e,t') = E_o.cos\alpha.cos\omega t'.\vec{u}_x - E_o.sin\alpha.cos\omega t'.\vec{u}_y}$

La lame demi-onde transforme une vibration rectiligne en une vibration rectiligne symétrique par rapport à ses lignes neutres. Une onde polarisée rectiligne reste polarisée rectilignement après la traversée de la lame.



Action sur une onde polarisee elliptiquement

- $\boldsymbol{\vec{E}(0,t) = E_{ox}.cos\omega t.\vec{u}_x + E_{oy}.cos(\omega t + \varphi).\vec{u}_y}$

  Si $\varphi \in]0, \pi[$, la polarisation est elliptique droite et si $\varphi \in]-\pi, 0[$, la polarisation est elliptique gauche.

- Donc après la traversée de la lame demi-onde, l'onde devient :

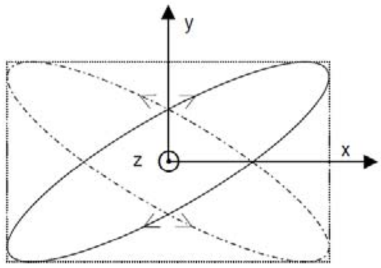
$$\boldsymbol{\vec{E}(e,t') = E_{ox}.cos\omega t'.\vec{u}_x + E_{oy}.cos(\omega t' + \varphi').\vec{u}_y \; avec \; \varphi' = \varphi - \pi}$$

  donc si $\varphi \in]0, \pi[$, alors $\varphi' \in]-\pi, 0[$ et si $\varphi \in]-\pi, 0[$ alors $\varphi' \in]0, \pi[$

- La lame demi-onde transforme une vibration elliptique en une vibration elliptique dont les axes sont symétriques par rapport aux lignes neutres de la lame demi-onde, de même excentricité et de sens de rotation inverse.

CONCLUSION :

Une lame demi-onde transforme la polarisation d'une onde en une polarisation symétrique par rapport à ses axes neutres. Pour une lame donnée, cette propriété n'est vérifiée que pour une longueur d'onde déterminée.



4. LES LAMES QUART D'ONDE.

a. DEFINITION.

- ***Une lame quart d'onde est une lame à retard taillée dans un matériau anisotrope de façon que $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$***
- Son épaisseur est telle que $\delta_L = (n_y - n_x)e = \frac{\lambda_0}{4}$. La différence de marche entre les deux vibrations est alors un quart de longueur d'onde d'où son nom.
- Il est clair qu'une lame d'une épaisseur donnée ne peut être rigoureusement quart-d'onde que pour une onde de fréquence, de longueur d'onde λ_o dans le vide bien déterminée.

b. PROPRIETES.

- On considère une onde lumineuse plane monochromatique de longueur d'onde dans vide λ_o qui traverse sous incidence normale (Oz) une lame quart d'onde pour λ0 d'épaisseur e, dont les faces extrêmes sont les plans de cotes z = 0 et z = e.
- En entrée, on a l'onde quelconque : $\boldsymbol{\vec{E}(0,t) = E_{ox}.cos\omega t.\vec{u}_x + E_{oy}.cos(\omega t + \varphi).\vec{u}_y}$

  En sortie, on a : $\vec{E}(e,t) = E_{ox}.cos[\omega(t - \frac{n_x e}{c})].\vec{u}_x + E_{oy}.cos[\omega(t - \frac{n_x e}{c}) + \varphi'].\vec{u}_y$ avec $\varphi' = \varphi - \Delta\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$

  En posant $t' = t - \frac{n_x e}{c}$, on obtient : $\boldsymbol{\vec{E}(e,t') = E_{ox}.cos\omega t'.\vec{u}_x + E_{oy}.sin(\omega t' + \varphi).\vec{u}_y}$

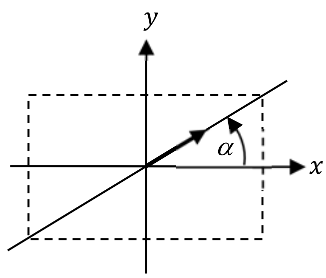
ACTION SUR UNE ONDE POLARISEE RECTILIGNEMENT

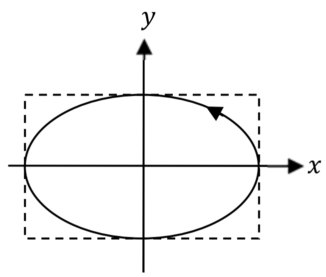
- Reprenons l'angle α défini précédemment pour la polarisation rectiligne :
  $\boldsymbol{\vec{E}(0,t) = E_o.cos\alpha.cos\omega t.\vec{u}_x + E_o.sin\alpha.cos\omega t.\vec{u}_y}$ ($E_{ox} = E_o cos\alpha$ et $E_{oy} = \pm E_o sin\alpha$, suivant le signe de α)
- Sachant que la lame introduit un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$, après la traversée de la lame quart d'onde, l'onde devient :

$$\boldsymbol{\vec{E}(e,t') = E_o.cos\alpha.cos\omega t'.\vec{u}_x + E_o.sin\alpha.sin\omega t'.\vec{u}_y}$$

- La lame quart-d'onde transforme une onde polarisée rectilignement en une onde de polarisation elliptique. Les axes de l'ellipse sont les lignes neutres de la lame quart-d'onde.
- Plus précisément, sachant que : $\vec{E})_{t'=0} = E_o cos\alpha\, \vec{u}_x$ et $\frac{d\vec{E}}{dt}\Big)_{t'=0} = \omega E_o sin\alpha\, \vec{u}_y$

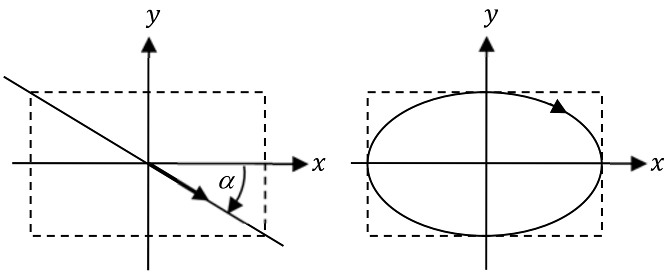
  Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ($\Leftrightarrow \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$) alors $E_x)_{t'=0} > 0$ et $\frac{dE_y}{dt}\Big)_{t'=0} > 0$: Elliptique gauche





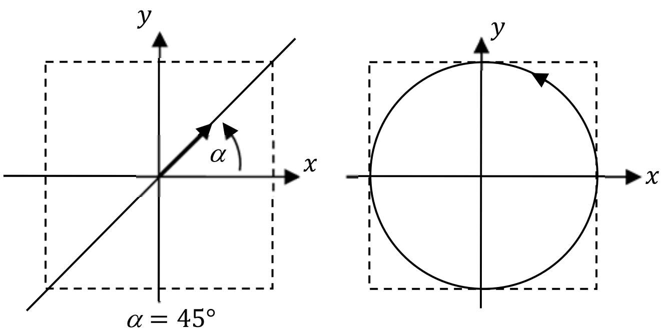
$tan\alpha = \frac{E_{oy}}{E_{ox}} > 0$ avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

- Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\quad E_x)_{t'=0} < 0$ et $\left.\frac{dE_y}{dt}\right)_{t'=0} > 0$: Elliptique droite
  ($\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$)



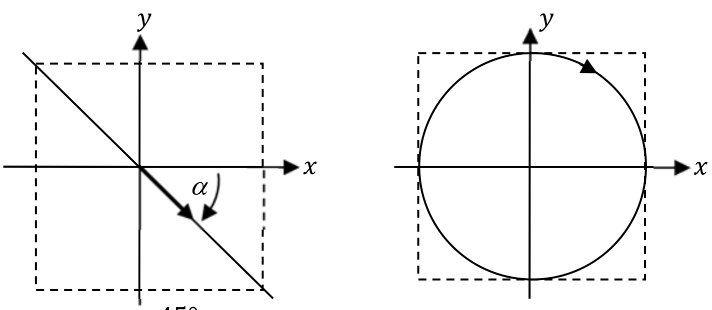
$tan\alpha = \frac{E_{oy}}{E_{ox}} < 0$ avec $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

- Si $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$, la lame transforme la vibration rectiligne en une vibration circulaire :
  - Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $E_x)_{t'=0} > 0$ et $\left.\frac{dE_y}{dt}\right)_{t'=0} > 0$: Circulaire gauche



$\alpha = 45°$

  - Si $\alpha = -\frac{\pi}{4}$: $E_x)_{t'=0} > 0$ et $\left.\frac{dE_y}{dt}\right)_{t'=0} > 0$: Circulaire droite.



$\alpha = -45°$

ACTION SUR UNE ONDE POLARISEE ELLIPTIQUEMENT

- Soit : $\vec{E}(0,t) = E_{ox}.cos\omega t.\vec{u}_x + E_{oy}.cos(\omega t + \varphi).\vec{u}_y$ avec $tan\alpha = \frac{E_{oy}}{E_{ox}}$

  Si $\varphi \in]0, \pi[$, la polarisation est elliptique droite et si $\varphi \in]-\pi, 0[$, la polarisation est elliptique gauche.

- Donc après la traversée de la lame quart-d'onde, l'onde devient : $\vec{E}(e,t') = E_{ox}.cos\omega t'.\vec{u}_x + E_{oy}.sin(\omega t' + \varphi).\vec{u}_y$

  $\Rightarrow$ Dans le cas général, l'onde elliptique reste elliptique.

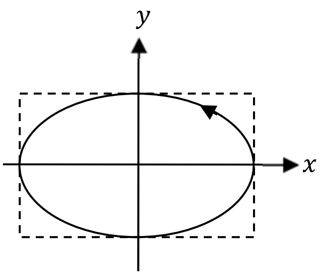
- Examinons le cas particulier pour lequel, ***les axes de l'ellipse coïncident avec les lignes neutres*** de la lame quart d'onde $\left(\varphi = \pm \frac{\pi}{2}\right)$. Nous obtenons deux cas :

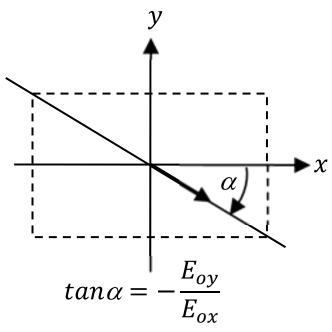
Si $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\vec{E}(0,t) = E_{ox} cos\omega t.\vec{u}_x + E_{oy} sin\omega t.\vec{u}_y$, l'ellipse est gauche.

Donc après la traversée de la lame quart d'onde, l'onde devient :

$$\vec{E}(e,t') = E_{ox}.cos\omega t'.\vec{u}_x - E_{oy}.cos\omega t'.\vec{u}_y$$

L'onde finale est polarisée rectilignement suivant la deuxième diagonale du rectangle contenant l'ellipse.



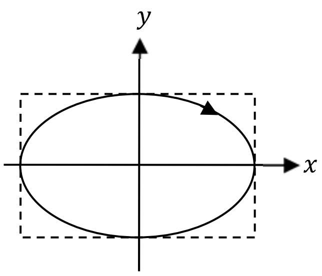


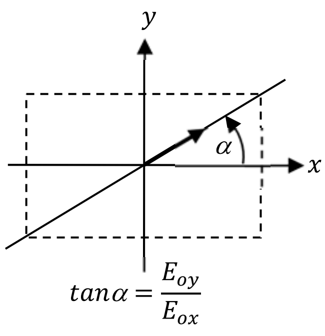
Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\vec{E}(0,t) = E_{ox}.cos\omega t.\vec{u}_x - E_{oy}.sin\omega t.\vec{u}_y$, l'ellipse est droite.

Donc après la traversée de la lame quart d'onde, l'onde devient :

$\vec{E}(e,t') = E_{ox}.cos\omega t'.\vec{u}_x + E_{oy}.cos\omega t'.\vec{u}_y$

L'onde finale est polarisée rectilignement suivant la première diagonale du rectangle contenant l'ellipse.





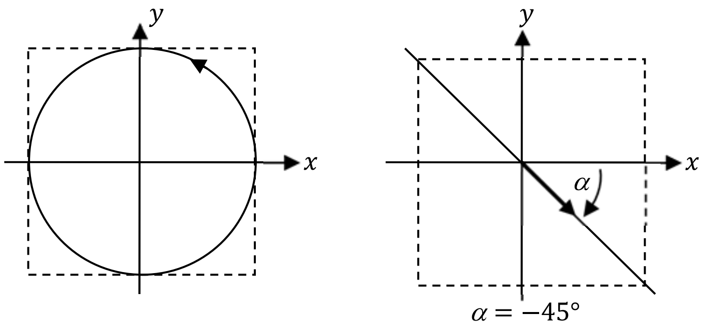
ACTION SUR UNE ONDE POLARISEE CIRCULAIREMENT.

- Considérons une onde polarisée circulaire gauche : Soit : $\vec{E}(0,t) = E_o.cos\omega t.\vec{u}_x + E_o.cos(\omega t - \frac{\pi}{2}).\vec{u}_y$

  $\Rightarrow$ Après la traversée de la lame, on a : $\vec{E}(e,t') = E_o.cos\omega t'.\vec{u}_x + E_o.sin\left(\omega t' - \frac{\pi}{2}\right).\vec{u}_y$

  $\Rightarrow \vec{E}(e,t') = E_o.cos\omega t'.\vec{u}_x - E_o.cos\omega t'.\vec{u}_y$

  $\Rightarrow$ L'onde est polarisée rectilignement suivant la 2ème bissectrice.

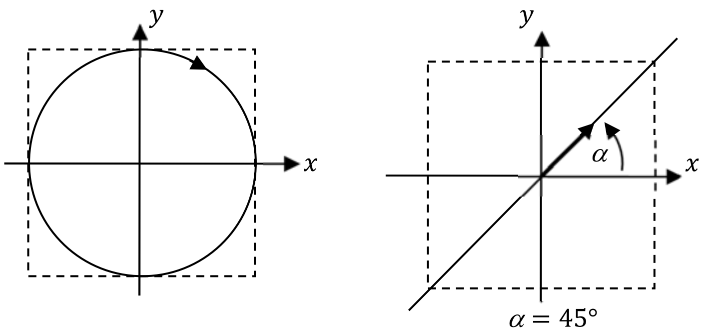


- Considérons une onde polarisée circulaire droite : Soit : $\vec{E}(0,t) \;=\; E_o.cos\omega t.\vec{u}_x \;+\; E_o.cos(\omega t + \frac{\pi}{2}).\vec{u}_y$

  $\Rightarrow$ Après la traversée de la lame, on a : $\vec{E}(e,t') =\; E_o.cos\omega t'.\vec{u}_x \;+\; E_o.sin\left(\omega t' + \frac{\pi}{2}\right).\vec{u}_y$

  $\Rightarrow \vec{E}(e,t') =\; E_o.cos\omega t'.\vec{u}_x +\; E_o.cos(\omega t').\vec{u}_y$

  $\Rightarrow$ L'onde est polarisée rectilignement suivant la 1ère bissectrice.



Une lame quart-d'onde :
- ***Transforme une vibration rectiligne en une vibration elliptique dont les axes sont les lignes neutres de la lame.***
- ***Transforme une vibration rectiligne faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec les lignes neutres de la lame en une vibration circulaire.***
- ***Transforme une vibration elliptique en vibration rectiligne si les axes de l'ellipse se confondent avec les lignes neutres de la lame.***
- ***Transforme toute onde polarisée circulairement en onde de polarisation rectiligne. Ceci constitue le critère de reconnaissance d'une onde polarisée circulairement.***