Mines PC Physique II

Emmanuel Loyer - loyer.cpge@orange.fr

1. $\mathrm{L} = (4\,\pi\,\mathrm{R}_\odot{}^2)\,\sigma\,\mathrm{T}^4 \simeq 4.10^{26}$ W.

2. Vecteur densité volumique de courant $\overrightarrow{\jmath} = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} n_i\,q_i\,\overrightarrow{v_i}$. Force exercée sur les particules de type i dans le volume $\mathrm{d}\tau$:

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f_i} = (n_i\,\mathrm{d}\tau) q_i\,(\overrightarrow{v_i} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}})$$

Force exercée sur l'ensemble des particules :

$$\overrightarrow{\mathrm{dF}} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \overrightarrow{\mathrm{d}f_i} = (\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} n_i\,q_i\,\overrightarrow{v_i}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\tau = \overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\tau$$

Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0\,\overrightarrow{\jmath}$ d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{dF}} = \frac{1}{\mu_0}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}r}\,\widehat{u}_\theta\right) \wedge (\mathrm{B}(r)\,\widehat{u}_z)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{\mathrm{B}(r)}{\mu_0}\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{B}(r)^2}{2\,\mu_0}\right)\widehat{u}_r\,\mathrm{d}\tau$$

soit $$\overrightarrow{\mathrm{dF}} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varepsilon\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon = \frac{\mathrm{B}(r)^2}{2\,\mu_0}$$

3. Dans le plasma à l'équilibre $\overrightarrow{\mathrm{dF}} + \overrightarrow{\mathrm{dF}}_{\text{pression}} + \overrightarrow{\mathrm{dF}}_{\text{gravité}} = \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{dF}}_{\text{pression}} = -(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p)\,\mathrm{d}\tau$ et $\overrightarrow{\mathrm{dF}}_{\text{gravité}} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mu\,g_0\,z)$ (g_0 champ gravitationnel au voisinage de la surface du Soleil ; cette expression n'est vraie qu'au voisinage de la surface) ; d'où $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(p + \varepsilon + \mu\,g_0\,z) = \overrightarrow{0}$; ainsi $p + \mathrm{B}^2/2\mu_0 + \mu\,g_0\,z$ est uniforme. Si l'on reste proche de la surface du Soleil, $\mu\,g_0\,z$ en varie quaisment pas et $p + \mathrm{B}^2/2\mu_0$ est uniforme. D'où

$$p_{\text{ext}} + \mathrm{B}_{\text{ext}}{}^2/2\mu_0 = p_{\text{int}} + \mathrm{B}_{\text{int}}{}^2/2\mu_0 \qquad \text{soit} \qquad p_{\text{int}} = p_{\text{ext}} - \mathrm{B}_{\text{int}}{}^2/2\mu_0 = 0{,}3 \text{ bar}$$

car on néglige B_{ext}. Équation d'état du gaz parfait

$$\rho_{\text{s}} = \frac{\mathrm{M}\,p_{\text{int}}}{\mathrm{R}\,\mathrm{T}_{\text{int}}} = \frac{\mathrm{M}\,p_{\text{ext}}}{\mathrm{R}\,\mathrm{T}_{\text{ext}}} \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{T}_{\text{int}} = \frac{p_{\text{int}}}{p_{\text{ext}}}\,\mathrm{T}_{\text{ext}} = \left(1 - \frac{\mathrm{B}_{\text{int}}{}^2}{2\mu_0\,p_{\text{ext}}}\right)\mathrm{T}_{\text{s}} = 1.10^3 \text{ K}$$

4. On a $$\frac{\Phi_{\text{tache solaire}}}{\Phi_{\text{zone normale}}} = \frac{\sigma \mathrm{T}_{\text{int}}{}^4}{\sigma \mathrm{T}_{\text{int}}{}^4} = \left(\frac{\mathrm{T}_{\text{int}}}{\mathrm{T}_{\text{s}}}\right)^4 = \left(1 - \frac{\mathrm{B}_{\text{int}}{}^2}{2\mu_0\,p_{\text{ext}}}\right)^4 = 3.10^{-3} \ll 1 \quad \text{(La tache est sombre)}$$

5. On a $\overrightarrow{\mathrm{dF}} = -(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varepsilon)\,\mathrm{d}\tau = -(\mathrm{B}/\mu_0)\,(\mathrm{dB}/\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\tau\,\widehat{u}_r$; comme $\mathrm{B} > 0$ et $\mathrm{dB}/\mathrm{d}r < 0$, alors $\overrightarrow{\mathrm{dF}}$ est selon $+\widehat{u}_r$ tend à dilater le tube de champ.

6. Modélisation du tube du champ par un fil infini ; étude des symétries et des invariance + théorème d'Ampère :

$$\overrightarrow{\mathrm{B}_{\text{t}}} = \frac{\mu_0\,\mathrm{I}(r)}{2\,\pi\,r}\,\widehat{u}_\theta \qquad \text{(cours)}$$

On a $$\mathrm{I}(r) = \int_{r'=0}^{r} j_{\text{t}}(r')\,2\,\pi\,r'\,\mathrm{d}r' \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{d}r}(r) = 2\,\pi\,r\,j_{\text{t}}(r) \qquad \text{et} \qquad j_{\text{t}}(r) = \frac{1}{2\,\pi\,r}\,\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{d}r}(r)$$

Ainsi $$\overrightarrow{\mathrm{dF}_{\text{t}}} = \overrightarrow{j_{\text{t}}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}_{\text{t}}}\,\mathrm{d}\tau = \left(\frac{1}{2\,\pi\,r}\,\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{d}r}(r)\,\widehat{u}_z\right) \wedge \left(\frac{\mu_0\,\mathrm{I}(r)}{2\,\pi\,r}\,\widehat{u}_\theta\right)\mathrm{d}\tau = -\frac{\mu_0}{4\,\pi\,r^2}\,\mathrm{I}(r)\,\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{d}r}(r)\,\widehat{u}_r\,\mathrm{d}\tau$$

Avec $\mathrm{I}(r) > 0$ et $\mathrm{I}(r)$ croissant, alors $\mathrm{I}(r)\,(\mathrm{dI}/r) > 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{dF}_{\text{t}}}$ est selon $-\widehat{u}_r$ et tend à contracter le tube de champ.

7. Équilibre du tube de champ : $\overrightarrow{\mathrm{dF}} + \overrightarrow{\mathrm{dF}_{\text{t}}} = \overrightarrow{0}$ soit $(j\,\widehat{u}_\theta) \wedge (\mathrm{B}\,\widehat{u}_z) + (j_{\text{t}}\,\widehat{u}_z) \wedge (\mathrm{B}_{\text{t}}\,\widehat{u}_\theta) = \overrightarrow{0}$ et ainsi $j\,\mathrm{B} - j_{\text{t}}\,\mathrm{B}_{\text{t}} = 0$.

Or $$\overrightarrow{j_{\text{tot}}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}_{\text{tot}}} = (j\,\widehat{u}_\theta + j_{\text{t}}\,\widehat{u}_z) \wedge (\mathrm{B}\,\widehat{u}_z + \mathrm{B}_{\text{t}}\,\widehat{u}_\theta) = (j\,\mathrm{B} - j_{\text{t}}\,\mathrm{B}_{\text{t}})\,\widehat{u}_r = \overrightarrow{0}$$

donc $\overrightarrow{\jmath}_{\text{tot}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}_{\text{tot}}$ sont colinéaires.

8. Il faut tenir compte de la courbure de la surface du Soleil et du fait que le champ magnétique dépend de z.

9. Question de cours ; équations linéarisées dans l'approximation acoustique :

$$\rho_0\,\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}\ \text{(Euler)} \qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \rho_0\,\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0\ \text{(continuité)} \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \rho_0\,\chi_{\text{S}}\,\frac{\partial p_1}{\partial t}\ \text{(isentropique)}$$

Équation de d'Alembert $$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\,\chi_{\mathrm{S}}}}$$

10. Problème de notation dans l'énoncé : p_0 désigne la pression uniforme du fluide au repos, et l'amplitude de l'onde acoustique stationnaire ; on note ici P_0 la pression uniforme du fluide au repos, et p_0 l'amplitude de l'onde acoustique stationnaire.

La présence d'une paroi imperméable en $x = 0$ impose $v_x(x = 0) = 0$ soit $v_1(0, t) = 0$ pour tout t. De plus, comme le tuyau est ouvert en $x = \mathrm{L}$, $p(x = \mathrm{L}) = \mathrm{P}_0$ soit $p_1(\mathrm{L}, t) = 0$ pour tout t.

On cherche une solution à variable sépare de l'équation de d'Alembert $p_1(x, t) = f(x)\,g(t)$; il vient

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\,\frac{g''(t)}{g(t)} = \mathrm{K}$$

où K est une constante ; on se limite à $\mathrm{K} < 0$ et on pose $\mathrm{K} = -k^2$ et $\omega^2 = -\mathrm{K}\,c^2$, soit $\omega = k\,c$. Il vient

$$f(x) = \alpha\cos(k\,x + \phi) \qquad \text{et} \qquad g(t) = \beta\cos(\omega\,t + \varphi)$$

qui correspond au résultat attendu si on prend $\varphi = 0$ et $p_0 = \alpha\,\beta$. L'équation d'Euler linéarisé donne

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{p_0\,k}{\rho_0}\sin(k\,x + \phi)\cos(\omega\,t)$$

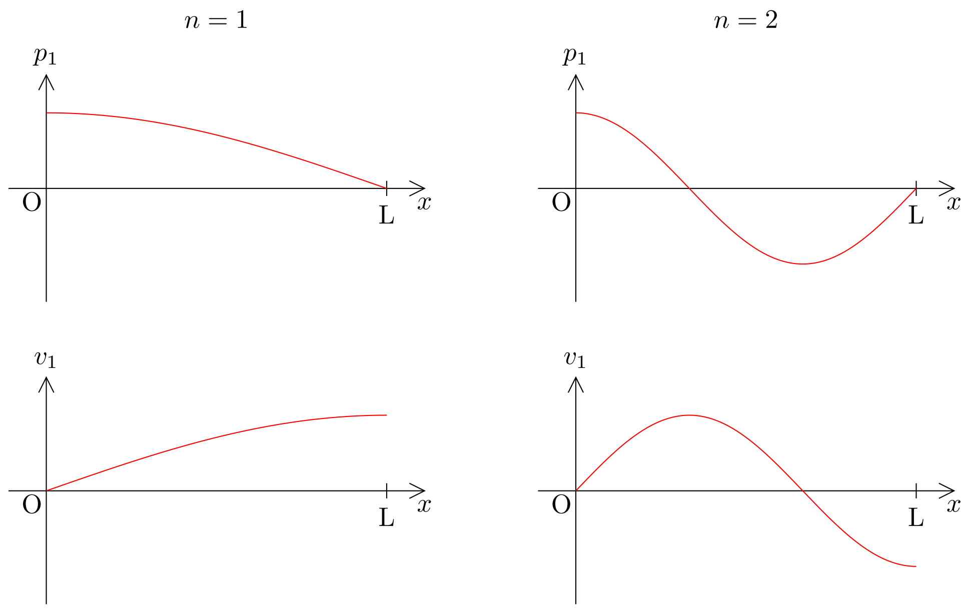
qui s'intègre en $$v_1(x, t) = \frac{p_0}{\rho_0\,c}\sin(k\,x + \phi)\sin(\omega\,t)$$

La condition $v_1(0, t) = 0$ pour tout t permet de choisir $\phi = 0$. La condition $p_1(\mathrm{L}, t) = 0$ pour tout t impose $\cos(k\,\mathrm{L}) = 1$ dont on déduit

$$k_n = \frac{\pi}{2\,\mathrm{L}} + n\,\frac{\pi}{\mathrm{L}} \qquad \text{puis} \qquad f_n = \frac{c}{4\,\mathrm{L}} + n\,\frac{c}{2\,\mathrm{L}}$$

On en déduit $\Delta f = f_{n+\mathrm{A}} - f_n = c/(2\,\mathrm{L})$: les fréquences propres sont en progression arithmétique.

11. On trace $p_1(x, t)$ et $v_1(x, t)$ en fonction de x à un instant t fixé tel que $\cos(\omega\,t)$ et $\sin(\omega\,t)$ sont positifs.



12. On a $$k^2 = {k_r}^2 + {k_h}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{(2\,\pi\,\mathrm{N})^2}{\omega^2}\right)\left(1 - \frac{(2\,\pi\,\mathrm{S}_\ell)^2}{\omega^2}\right) + \frac{4\,\pi^2\,\ell(\ell+1)}{r^2}$$

Si $\omega \gg 2\,\pi\,\mathrm{N}$ $$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{4\,\pi^2\,\ell(\ell+1)\,c^2}{\omega^2\,r^2}\right) + \frac{4\,\pi^2\,\ell(\ell+1)}{r^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

On retrouve bien la relation de dispersion de la question 10... mais c dépend ici de r !

L'équation différentielle vérifiée par $\xi_(r)$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi_r}{\mathrm{d}r^2} + {k_r}^2\,\xi_r = 0$$

Si k_r est constant (indépendant de r), alors cette équation admet des solutions harmoniques si et seulement si ${k_r}^2 > 0$; ici, k_r dépend de r, on admet que cela n'affecte pas le résultat[1]. La condition ${k_r}^2 > 0$ s'écrit $(2\pi\,\mathrm{S}_\ell/\omega)^2 < 1$ soit $f < \mathrm{S}_\ell$. Pour $\ell = 5$ et $f = 1$ mHz, on lit sur la figure 2 : $0{,}4 \leqslant r/\mathrm{R}_\odot \leqslant 1.0$, soit $r_1 = 0{,}4\,\mathrm{R}_\odot$ et $r_2 = \mathrm{R}_\odot$.

13. Si $\omega \gg 2\pi\,\mathrm{S}_\ell$ et $\omega \gg 2\pi\,\mathrm{N}$, alors $k_r \simeq \omega/c$ et la condition $\int_{r_1}^{r_2} k_r\,\mathrm{d}r = \pi(n + \alpha_\mathrm{p})$ devient

$$\omega \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{c(r)} = \pi(n + \alpha_\mathrm{p}) \qquad \text{soit} \qquad f_{n,\mathrm{p}} = \frac{n + \alpha_\mathrm{p}}{2\,\beta} \qquad \text{avec} \qquad \beta = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{c(r)}$$

Ecart entre deux fréquences conséqutives : $\Delta f = f_{n+1,\mathrm{p}} - f_{n,\mathrm{p}} = 1/(2\,\beta)$ est constant, les fréquences sont en progression arithmétique. Critique ?

14. Si $\omega \ll 2\pi\,\mathrm{N}$, la condition ${k_r}^2 > 0$ conduit à $(1 - (2\pi\,\mathrm{N})^2/\omega^2) > 0$ soit $f < \mathrm{N}$. Cette condition n'est possible que pour $f < 500$ mHz ; si on impose de plus $f < \mathrm{S}_1$, alors $0{,}01 < r/\mathrm{R}_\odot < 0{,}7$ soit $r_3 \simeq 0{,}01\,\mathrm{R}_\odot$ et $r_4 \simeq 0{,}7\,\mathrm{R}_\odot$. Ces ondes existent dans le Soleil, mais pas au voisinage de sa surface. Explication ?

15. Avec $\omega \ll 2\pi\,\mathrm{N}$ et $\omega \ll 2\pi\,\mathrm{N}$ il vient

$${k_r}^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left(-\frac{(2\pi\,\mathrm{N})^2}{\omega^2}\right)\left(-\frac{(2\pi\,\mathrm{S}_\ell)^2}{\omega^2}\right) \qquad \text{soit} \qquad k_r \simeq \frac{4\pi^2\,\mathrm{N}\,\mathrm{S}_\ell}{\omega\, c}$$

La condition $\int_{r_3}^{r_4} k_r\,\mathrm{d}r = \pi(n + \alpha_\mathrm{g})$ devient

$$\frac{4\pi^2}{\omega} \int_{r_3}^{r_4} \frac{\mathrm{N}(r)\,\mathrm{S}_\ell(r)}{c(r)}\,\mathrm{d}r = \pi(n + \alpha_\mathrm{g}) \qquad \text{soit} \qquad f_{n,\mathrm{g}} = \frac{2\,\beta'}{n + \alpha_\mathrm{g}} \qquad \text{avec} \qquad \beta' = \int_{r_3}^{r_4} \frac{\mathrm{N}(r)\,\mathrm{S}_\ell(r)}{c(r)}\,\mathrm{d}r$$

Les fréquences ne sont pas en progressions arithmétiques mais les périodes le sont : $\Delta\mathrm{T} = \mathrm{T}_{n+1,\mathrm{g}} - \mathrm{T}_{n,\mathrm{g}} = 1/(2\,\beta')$ est constant.

16. Les ondes acoustiques sont de façon générale longitudinales.

17. Le déplacement ξ_r envisagé ici est radial ; le vecteur d'onde possède une composante radiale k_r et une composante qui lui est orthogonale k_h (« horizontal ») ; le vecteur d'onde et le déplacement ne sont ni colinéaires ni orthogonaux. L'onde n'est ni longitudinale ni transversale ? Quel rapport avec la vitesse de groupe ?

18. La question 12 invitait à considérer des ondes p de fréquence de l'ordre de 1 mHz ; les modes propres ont des fréquences en progression arithmétique, ce qui est compatible avec les observations entre 2 mHz et 4 mHz. À la question 14, on a montré que la fréquence des ondes g est de l'ordre de 0,1 mHz ; il est difficile d'observer un signal dans cette région du spectre. Les ondes p se propagent jusqu'à la surface du Soleil ($r_2 = \mathrm{R}_\odot$, question 12) c'est pourquoi elles sont détectables dans les observations faites à la surface du Soleil ; ce n'est pas le cas des ondes g ($r_2 = 0{,}7\,\mathrm{R}_\odot$, question 14).

19. Symétries et invariances + théorème de Gauss : $g(r) = -\mathcal{G}\mathrm{M}(r)/r^2$. Équilibre d'un domaine élémentaire de fluide soumis aux forces de pression et au champ de gravité :

$$(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p)\,\mathrm{d}\tau + (\mu\,\mathrm{d}\tau)\,\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p = \rho\,\overrightarrow{g} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial p}{\partial r}(r) = \rho(r)\,g(r)$$

20. On a $p = \mathrm{K}\rho^{1+1/n}$ et $\rho = \rho_\mathrm{c}\,\Psi^n$ d'où $p = \mathrm{K}(\rho_\mathrm{c}\,\Psi^n)^{1+1/n} = \mathrm{K}\,\rho_\mathrm{c}^{1+1/n}\,\Psi^{n+1}$ soit $p = p_\mathrm{c}\,\Psi^{n+1}$ avec $p_\mathrm{c} = \mathrm{K}\,\rho_\mathrm{c}^{1+1/n}$.

21. On raisonne sur une coquille sphérique comprise entre r et $r + \mathrm{d}r$: $\mathrm{M}(r + \mathrm{d}r) - \mathrm{M}(r) = \rho(r)\,\mathrm{d}\tau$ avec $\mathrm{d}\tau = 4\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$ d'où le résultat. On peut aussi dériver la relation $\mathrm{M}(r) = \int_0^r \rho(r')\,4\pi\,r'^2\,\mathrm{d}r'$.

22. Au centre du Soleil, $\rho = \rho_\mathrm{c}$ dont $\Psi = 1$; à la surface du Soleil, $p = 0$ (car on néglige l'atmosphère) donc $\Psi = 0$. Pour arriver à une équation différentielle portant sur Ψ, on commence par éliminer g des équations précédentes : le théorème de Gauss et l'équation de la statique des fluides (question 19) conduisent à

$$\frac{1}{\rho(r)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}(r) = g(r) = -\frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M}(r)}{r^2} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{M}(r) = -\frac{r^2}{\mathcal{G}\,\rho(r)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}(r)$$

En dérivant la relation précédente et en utilisant le résultat de la question 21, il vient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[-\frac{r^2}{\mathcal{G}\,\rho(r)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}(r)\right](r) = 4\pi\,r^2\,\rho(r) \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{4\pi\,\mathcal{G}}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{r^2}{\rho(r)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}(r)\right](r) + \rho(r) = 0$$

Il ne reste plus qu'à remplacer p et ρ par leur expression en fonction de ξ ; on a d'abord

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = p_\mathrm{c}\,\frac{1}{r_0}\,(n+1)\,\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\,\Psi^n \qquad \text{puis} \qquad \frac{r^2}{\rho(r)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{p_\mathrm{c}\,r_0}{\rho_\mathrm{c}}\,(n+1)\,\xi^2\,\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi} \qquad \text{car} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r_0}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$$

Ensuite

[1] Voir remarque en fin de corrigé.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right] = \frac{p_\mathrm{c}}{\rho_\mathrm{c}}(n+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{4\,\pi\,\mathcal{G}}\,\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right] = \frac{(n+1)\,p_\mathrm{c}}{4\,\pi\,\mathcal{G}\,\rho_\mathrm{c}\,{r_0}^2}\,\frac{1}{\xi^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\right)$$

L'équation vérifiée par ξ s'écrit $\quad \dfrac{(n+1)\,p_\mathrm{c}}{4\,\pi\,\mathcal{G}\,{\rho_\mathrm{c}}^2\,{r_0}^2}\,\dfrac{1}{\xi^2}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\right) + \Psi^n = 0$

On obtient l'équation de Lane-Emden si l'on pose

$$r_0 = \sqrt{\frac{(n+1)\,p_\mathrm{c}}{4\,\pi\,\mathcal{G}\,{\rho_\mathrm{c}}^2}} = \sqrt{\frac{(n+1)\,\mathrm{K}\,{\rho_\mathrm{c}}^{-1+1/n}}{4\,\pi\,\mathcal{G}}}$$

23. En utilisant les résultats obtenus à la question précédente, il vient

$$\mathrm{M}(r) = -\frac{r^2}{\mathcal{G}\,\rho(r)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}(r) \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{M}(\xi) = -\frac{p_\mathrm{c}\,r_0\,(n+1)}{\rho_\mathrm{c}\,\mathcal{G}}\,\xi^2\,\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}(\xi) \qquad \text{et donc} \qquad \mathrm{M}_\odot = -\frac{p_\mathrm{c}\,r_0\,(n+1)}{\rho_\mathrm{c}\,\mathcal{G}}\,{\xi_s}^2\,\Psi'_s$$

Comme $\mathrm{M}_\odot = \overline{\rho} \times 4/3\,\pi\,{\mathrm{R}_\odot}^3 = \overline{\rho} \times 4/3\,\pi\,(r_0\,\xi_s)^3$, on en déduit

$$\overline{\rho} = \frac{\mathrm{M}_\odot}{4/3\,\pi\,(r_0\,\xi_s)^3} = -3\,\frac{(n+1)\,p_\mathrm{c}}{4\,\pi\,\mathcal{G}\,{\rho_\mathrm{c}}^2\,{r_0}^2}\,\rho_\mathrm{c}\,\frac{\Psi'_s}{\xi_s} = -3\,\rho_\mathrm{c}\,\frac{\Psi'_s}{\xi_s} \qquad \text{d'où} \qquad \rho_\mathrm{c} = -\frac{\xi_s}{3\,\Psi'_s}\,\overline{\rho}$$

24. $\rho_\mathrm{c} = 112\,\overline{\rho} = 112\,\mathrm{M}_\odot/(4/3\,\pi\,{\mathrm{R}_\odot}^3) = 2.10^5$ kg.m^{-3} ; avec $n = 10/3$, $p_\mathrm{c} = \mathrm{K}\,{\rho_\mathrm{c}}^{1+1/n} = \mathrm{K}\,{\rho_\mathrm{c}}^{1,3} = 2.10^{11}$ bar.

25. Notons respectivement $\mathrm{N_e}$, $\mathrm{N_p}$ et $\mathrm{N_{He}}$ le nombre total d'électrons, de protons et de noyaux d'hélium. La neutralité du plasma s'écrit $\mathrm{N_e}\,(-e) + \mathrm{N_p}\,e + \mathrm{N_{He}}\,(2e) = 0$. En divisant par $\mathrm{N_{tot}} = \mathrm{N_e} + \mathrm{N_p} + \mathrm{N_{He}}$, il vient $x_\mathrm{e} = x_\mathrm{p} + 2\,x_\mathrm{He}$.

La masse molaire du mélange a pour expression $\mathcal{M} = x_\mathrm{e}\,\mathcal{M}_\mathrm{e} + x_\mathrm{p}\,\mathcal{M}_\mathrm{p} + x_\mathrm{He}\,\mathcal{M}_\mathrm{He} \simeq x_\mathrm{p}\,\mathcal{M}_\mathrm{p} + x_\mathrm{He}\,\mathcal{M}_\mathrm{He}$ car $\mathcal{M}_\mathrm{e}$ est très faible devant $\mathcal{M}_\mathrm{p}$ et $\mathcal{M}_\mathrm{He}$; il reste à exprimer x_p et x_He en fonction de Y. Pour cela, on écrit $\mathrm{Y} = m_\mathrm{He}/(m_\mathrm{e}+m_\mathrm{p}+m_\mathrm{He}) \simeq 4\,\mathrm{N_{He}}/(\mathrm{N_p}+4\,\mathrm{N_{He}}) = 4\,x_\mathrm{He}/(x_\mathrm{p}+4\,x_\mathrm{He})$; on a négligé la masse les électrons devant celle des protons et des noyaux d'hélium, et on considère de plus qu'un noyau d'hélium est quatre fois plus passif qu'un proton. On en déduis que x_e et x_p vérifient $4\,(1-\mathrm{Y})\,x_\mathrm{e} - \mathrm{Y}\,x_\mathrm{p} = 0$. De plus, on a $x_\mathrm{e}+x_\mathrm{p}+x_\mathrm{He} = 1$; combinée avec la relation issue de la neutralité du plasma, il vient $2\,x_\mathrm{e}+3\,x_\mathrm{He} = 1$. La résolution du système linéaire de deux équations vérifiées par x_p et x_He donne $x_\mathrm{p} = 4\,(1-\mathrm{Y})/(8-5\,\mathrm{Y})$ et $x_\mathrm{He} = \mathrm{Y}/(8-5\,\mathrm{Y})$ dont on déduit $\mathcal{M} = 4\,\mathcal{M}_\mathrm{p}/(8-5\,\mathrm{Y}) \simeq 6.10^{-4}$ kg.mol^{-1}.

La loi des gaz parfaits permet de déterminer la température au centre du Soleil : $\mathrm{T_c} = \mathcal{M}\,p_\mathrm{c}/\mathrm{R}\,\rho_\mathrm{c} = 7.10^6$ K.

26. Ces réactions sont des réactions nucléaires (qui modifient la structure des noyaux atomiques) ; plus précisément, ce sont des réacions de fusion. En raison de la température, c'est le cycle PP qui domine.

Remarque
Pour en savoir plus sur les oscillations des étoiles (en lien avec la partie II.B du problème), voir *Lectures Notes on Stellar Oscillations* de Jorgen Christensen-Dalsgaard (téléchargeable à l'adresse http ://astro.phys.au.dk/ jcd/oscilnotes/) qui montre notament l'existence des solutions harmoniques de la question 12.