

1 Échantillonnage signal périodique

On considère le signal $g(t)$ s'écrivant comme une somme finie d'exponentielles complexes, à fréquences positives et négatives :

$$g(t) = \sum_{n=1}^m \frac{G_{on}}{2} [\exp(i(\omega_n t + \Phi_n)) + \exp(-i(\omega_n t - \Phi_n))] \text{ avec } \omega_n = 2 \times \pi f_n.$$

1. On effectue un échantillonnage idéal de ce signal à la période T_e . Montrer que le spectre en amplitude et en phase du signal échantillonné vérifie :

fréquences	amplitudes	phases
f_n	$\frac{G_{on}}{2T_e}$	Φ_n
$f_e + f_n$	$\frac{G_{on}}{2T_e}$	Φ_n
$f_e - f_n$	$\frac{G_{on}}{2T_e}$	$-\Phi_n$

2. Rappeler le critère de Shannon puis représenter le spectre en amplitude du signal dans le cas où celui-ci contient 4 fréquences $f_1 < f_2 < f_3 < f_4$. On se placera dans les deux cas suivants :
 - ✗ Le critère de Shannon est vérifié.
 - ✗ Le critère de Shannon n'est pas vérifié.
3. Dans le cas où le critère de Shannon n'est pas vérifié, une raie de fréquence f_n peut disparaître du spectre. Expliquer.

2 Échantillonnage signal quelconque

1. Montrer, en utilisant le complément ci-dessous, que le spectre d'un signal $g(t)$ échantillonné (idéalement) à la période T_e s'obtient par réplication de son spectre autour de chacune des fréquences $f_k = kf_e$. Retrouver le critère de Shannon.
2. Lorsque l'on fait l'acquisition d'un signal périodique, on fait l'acquisition du signal pendant une durée τ finie. De fait, le signal analysé est tronqué. Cette troncature s'appelle fenêtrage : elle revient à multiplier le signal à analyser par une fonction rectangle de durée τ . Montrer que le spectre du signal numérisé n'est plus un spectre de raies mais un spectre contenant une série de fonctions *sinc* de demi-largeur $1/\tau$.
3. Quel est l'effet d'un échantillonneur bloqueur de durée τ sur le spectre du signal numérisé ?

3 Bande passante (« bandwidth ») d'un réseau téléphonique

On étudie le transfert de communications par le réseau téléphonique, les signaux électriques analogiques étant échantillonnés à la fréquence $f_e = 8kHz$, chaque échantillon étant ensuite codé sur 8 bits. Une bande de fréquences $[300Hz; 3400Hz]$ a été retenue, qui permet

de mener une conversation en duplex, mais pas toujours de reconnaître son correspondant. En effet, de cette bande où la voix présente son maximum d'énergie, sont exclues des fréquences basses et des fréquences « harmoniques » allant jusqu'à $8kHz$ chez la femme.

1. Rappeler les principales étapes de la numérisation d'un signal analogique.
2. Le spectre de la voix humaine étant compris entre $100Hz$ et $8kHz$, commenter la valeur de la fréquence d'échantillonnage.
3. Combien de niveaux d'intensité sonore peut-on obtenir avec le codage proposé ?
4. Quelle est la bande passante minimale de la ligne téléphonique ? (en $Kbit/s$)

4 Échantillonnage par un capteur de pression

Un pressostat est un appareil doté d'une chambre de compression d'air et de deux contacts électriques dont l'état change en fonction du niveau de pression dans cette chambre. Afin qu'il provoque le démarrage d'une pompe à eau, lorsque la pression P dans un circuit hydraulique descend au-dessous d'une valeur limite, on met sa chambre de compression d'air en contact avec le circuit. Le pressostat fournit alors une tension continue U_{PT} , image de la pression P , et dont la représentation est donnée en figure (1). Si la commande de pompe est digitale, il y a numérisation de la tension U_{PT} grâce à un convertisseur analogique-numérique de résistance d'entrée infinie.

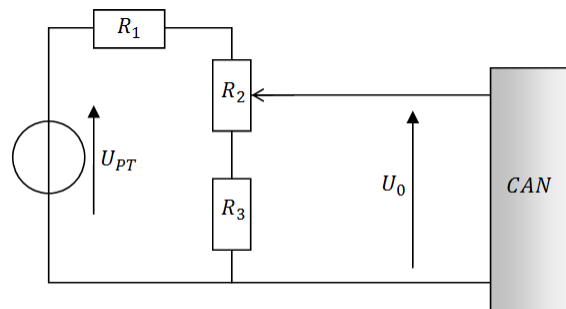


FIGURE 1 – Dispositif de mesure de pression

Données :

- ✗ Pour le pressostat, $U_{PT} = kP$ avec $k = 2,0V.bar^{-1}$.
 - ✗ La pression maximale à mesurer est de $10bars$.
 - ✗ $R_2 = 1k\Omega$ et le curseur du potentiomètre est en position médiane.
 - ✗ $R_3 = 1k\Omega$.
1. Calculer la valeur à donner à la résistance R_1 , sachant que la tension U_0 appliquée à la carte contrôle du variateur doit être égale à $10V$ lorsque la pression à mesurer est maximale.
 2. Le convertisseur analogique-numérique doit pouvoir convertir une tension U_0 comprise entre 0 et $U_{0max} = 10V$; la tension U_0 est codée sur $n = 8$ bits. Calculer le pas de résolution r , en déduire la plus petite valeur de la pression que l'on peut mesurer.
 3. La pression P sur le réseau de sortie d'eau est fixée à $6bars$. Quel sera le mot binaire qui codera la tension U_0 correspondante ?

5 Étude d'un électrocardiogramme

On souhaite faire l'acquisition numérique de l'électrocardiogramme $v(t)$ d'une personne au repos, représenté sur la figure (2), où l'échelle horizontale est de $0,2s.div^{-1}$ et l'échelle verticale de $0,1V.div^{-1}$.



FIGURE 2 – Électrocardiogramme

Après amplification, $v(t)$ présente un spectre s'étendant a priori de : $0Hz$ à $F_{max} = 100Hz$, mais dont la 1^{ère} fréquence non nulle est a posteriori de : $f_1 = 1Hz$.

1. A l'aide de la figure (2), déterminer la fréquence du signal $v(t)$ et la comparer avec f_1 . Comment nomme-t-on cette fréquence ? Commenter son ordre de grandeur.
2. A partir de quelle fréquence est-il possible d'échantillonner $v(t)$ sans l'altérer ?
3. La fréquence d'échantillonnage choisie en pratique est : $f_e = 448Hz$, et il s'avère que le spectre de $v(t)$ comprend en réalité des fréquences parasites de fréquences $f_a = 150Hz$ et $f_b = 400Hz$. Ces fréquences vérifient-elles le théorème de Shannon ?
4. On observe le spectre du signal échantillonné sur la fenêtre utile $[0, f_e]$. Justifier la présence de raies supplémentaires à $48Hz$ et $298Hz$.
5. Afin d'éliminer la raie parasite due au repliement du spectre, on utilise un filtre anti-repliement d'ordre n de gain en décibels de la forme $-20.n.Log(\frac{f}{f_c})$. En supposant qu'un signal est éliminé lorsque son amplitude est divisée par 100, déterminer la valeur de n .

6 Souffle de quantification sur un CD Audio

L'enregistrement sonore numérique a vu le jour en 1974. A été choisie une quantification sur 16 bits, afin que le rapport signal/bruit atteigne celui d'une bonne salle de concert. Le choix de la fréquence d'échantillonnage provient du standard PAL de la télé. Chaque image télé compte 625 lignes (37 étant inutilisables), chaque ligne peut contenir 3 échantillons audio codés sur 16 bits, et la télé a une bande-passante de 25 images par seconde.

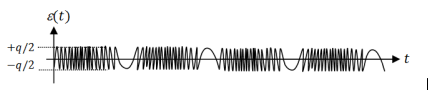


FIGURE 3 – Bruit de quantification

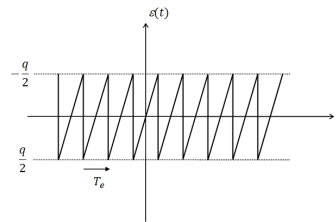


FIGURE 4 – Modélisation de l'erreur de quantification

1. On enregistre sur un CD, un signal stéréophonique quantifié sur $n = 16\text{bits}$ et échantillonné à la fréquence de $44,1\text{kHz}$. Commenter la valeur de la fréquence d'échantillonnage.
2. Le CD peut enregistrer une heure de musique. Combien cela fait-il de bits ?
3. On souhaite enregistrer sur le CD un signal sinusoïdal pur $u(t)$ d'amplitude U_m et de fréquence $f = \frac{f_e}{10}$. On note $u_{ech}(t)$ le signal échantillonné et $u_n(t)$ le signal après quantification. L'échantillonnage est supposé idéal.
 - (a) Représenter l'allure de $u(t)$ et $u_{ech}(t)$.
 - (b) La CAN est bipolaire, c'est-à-dire que $x_n(t)$ évolue de -2^{n-1} à $2^{n-1} - 1$. Montrer que le pas de quantification du convertisseur vaut : $q = \frac{U_m}{2^{n-1}}$.
 - (c) La quantification est du type centré :

$$\text{pour : } u_{ech}(t) \in \left[\frac{(2k-1)q}{2}, \frac{(2k+1)q}{2} \right] \text{ , on obtient : } u_n(t) = kq.$$

Donner l'allure de $u_n(t)$. Pour simplifier la figure, on supposera que l'on quantifie sur 4bits .

- (d) La figure (3) représente l'erreur de quantification obtenue pour une quantification centrée dans le cas d'un signal sinusoïdal. Quelle est la différence principale par rapport à une quantification uni-polaire classique ?
- (e) On modélise l'erreur de quantification par la fonction périodique donnée en figure (4).

Montrer que la puissance moyenne du bruit de quantification, pour une résistance normalisée de 1Ω , vaut : $B = \frac{q^2}{12}$.

- (f) En déduire le rapport signal sur bruit de quantification. Montrer qu'en échelle logarithmique, on a : $1,76 + 6,02n$. Faire une application numérique.

7 Étude d'un multimètre numérique

Un multimètre numérique possède des « accuracy specifications ». Un premier type de caractéristiques est lié à l'affichage, comme le nombre de digits d , qui va avec nombre de points N . Si $d = 3\text{digits}1/2$, alors la plage affichée est de : 0000 à 1999, soit $N = 2000$. Si $d = 6\text{digits}1/2$, alors cette plage est de : 0000000 à 1999999 soit $N = 2000000$ points. Si $N = 10000$, elle est de : 0000 à 9999. Un second type est lié à la plus petite valeur (ou la plus petite différence) v_{min} détectable pour la grandeur mesurée (tension par exemple). On appelle résolution R , sa valeur relative ramenée à celle du calibre utilisé, et sensibilité S sa valeur absolue. Un troisième type est lié à la CAN et au nombre de bits de la quantification. On considère un multimètre de moyenne gamme, dont on donne les « accuracy specifications » suivantes :

✗ CAN 16 bits.

✗ Calibres : 50mV ; 500mV ; 5V ; 50V .

1. Pour chaque calibre indiquer le pas de la CAN de ce multimètre. En déduire la résolution R correspondant à chaque calibre.
2. L'incertitude de mesure d'une tension continue est donnée dans le document constructeur sous la forme d'une somme de deux termes : $\pm(\% \text{ of reading} + \% \text{ of range})$.

- ✗ l'un en % de la lecture.
- ✗ l'autre en fonction du chiffre (digit) de poids le plus faible.

Ainsi, l'incertitude due à l'appareil, sur la mesure d'une grandeur X , s'écrit-elle :

$$\Delta X = n\%X_L + m.UR.$$

Où n et m sont des entiers, où UR désigne l'unité du dernier digit affiché, et où X_L désigne la valeur mesurée de X .

- (a) Quelle est la relation entre cette incertitude et les résultats de la question 1 ?
 - (b) Pour la mesure d'une tension continue et pour tous les calibres, le constructeur donne : $m = 5$. Commenter.
3. On mesure une tension continue en utilisant différents calibres. Les valeurs affichées sont indiquées ci-dessous :

Calibre	Valeur affichée
500mV	439,38 mV
5 V	439,4 mV
50 V	439 mV

- (a) Les valeurs affichées sont-elles compatibles avec la résolution déterminée précédemment ?
- (b) Sachant que, pour tout calibre, on a : $n = 2, 5$, déterminer en fonction du calibre, l'incertitude absolue sur la mesure de la tension.

8 Sur-échantillonner n'est pas jouer !

Le professeur Fargo étudie, autour d'une position d'équilibre, les oscillations harmoniques d'un système (S). Pour ce faire, il munit (S) d'un capteur (C) analogique fournissant en temps continu, la position $x(t)$ de (S). Il interface (C) avec une carte d'acquisition (A) connectée à un ordinateur doté d'un logiciel (L) de traitement de données. Depuis son entrée dans (A), jusqu'à son traitement dans (L), le signal $x(t)$ est échantillonné et quantifié plusieurs fois, mais ses quantifications successives se font sur des nombres de bits assez élevés pour ne pas l'affecter de discontinuités notables. La plus petite fréquence d'échantillonnage est celle imprimée par (L). Elle est choisie par Fargo dans un menu, sous forme d'un nombre N de «points par période». Indécis, Fargo fait deux enregistrements de $x(t)$, dans des conditions physiques identiques, mais pour deux valeurs différentes de la fréquence N : le premier pour $N_1 = 40$, le second pour $N_2 = 4000$.

Les figures (5) et (6), reproduisent les graphes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ obtenus sur l'écran de l'ordinateur.

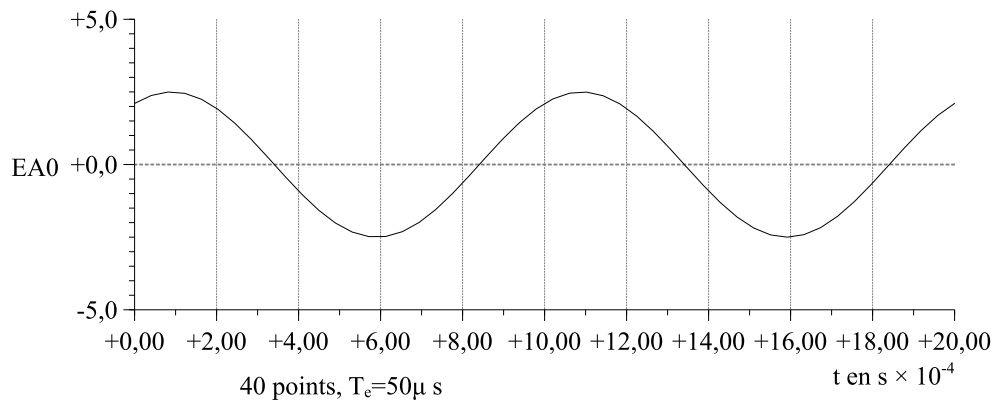


FIGURE 5 – Graphe temporel de $x(t)$ avec 40 points par période

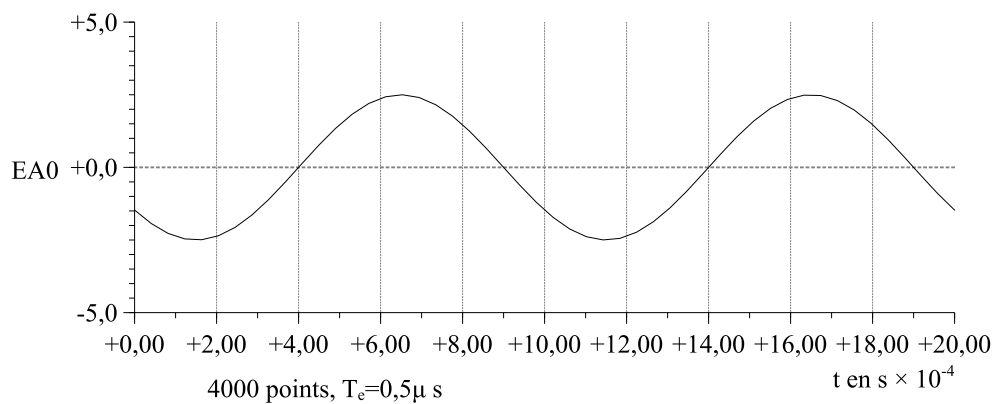
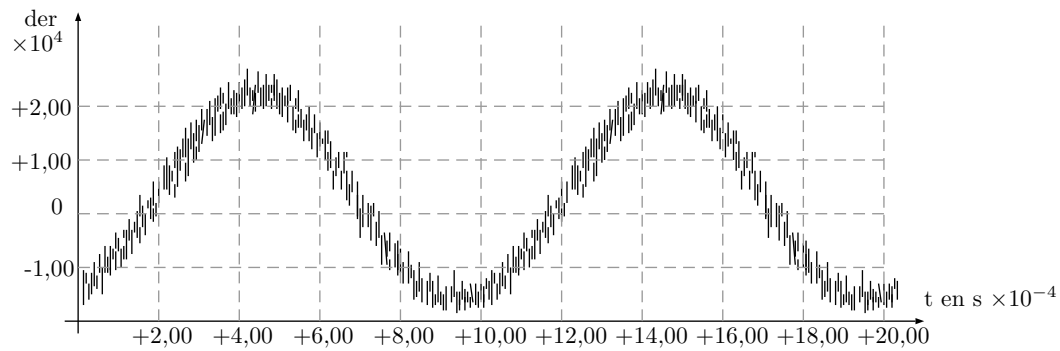
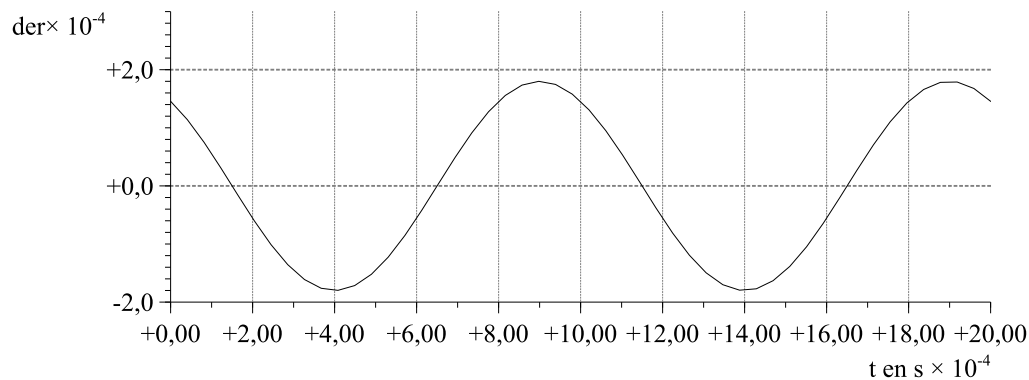


FIGURE 6 – Graphe temporel de $x(t)$ avec 4000 points par période

1. Chacun de ces échantillonnages respecte-t-il le théorème de Shannon ?
2. Peut-on différencier à l'oeil ces deux graphes ? Laquelle des deux fréquences est-elle la plus adaptée ?
3. Après chaque manipulation, Fargo a demandé au logiciel (L) de calculer la dérivée $der(t)$ du graphe $x(t)$ enregistré. Les courbes qu'il a obtenues sont reproduites en figures (7) et (8). Dire laquelle correspond à N_1 et laquelle à N_2 . Conclure quant à la fréquence d'échantillonnage la mieux adaptée.

FIGURE 7 – Dérivée numérique de $x(t)$ FIGURE 8 – Dérivée numérique de $x(t)$

4. Le sur-échantillonnage a-t-il des inconvénients ? Dans quel rapport faut-il choisir la fréquence du signal et la fréquence d'échantillonnage ?

9 Constater et expliquer l'intérêt d'un filtre anti-repliement

Un signal analogique réel $g(t)$ possède un spectre très étendu, notamment à cause du bruit de fond.

1. Soit un signal $g(t)$ d'étendue spectrale : $|f| \in [0; W]$, et soit le produit g_s de son échantillonnage idéal, à la fréquence f_e . A quel critère (C) faut-il soumettre f_e afin que $g(t)$ soit échantillonné sans perte d'information ?
2. Si l'on opte pour une fréquence f_e immédiatement inférieure à celle du critère (C), expliquer, en vous appuyant sur des allures de spectres pour $g(t)$ et $g_s(t)$, pourquoi l'usage d'un filtre anti-repliement (FAR) est judicieux. Où doit-on placer le FAR ? Est-ce un filtre analogique ou logique ?
3. On prend pour FAR un filtre passe-bas d'ordre quatre (FPB4). Pour cela, on place en cascade deux filtres passe-bas de Butterworth d'ordre deux (FPB2), séparés par un montage suiveur, comme indiqué en figure (9). Le schéma du FPB2 est indiqué en figure (10). Les ALI sont idéaux.

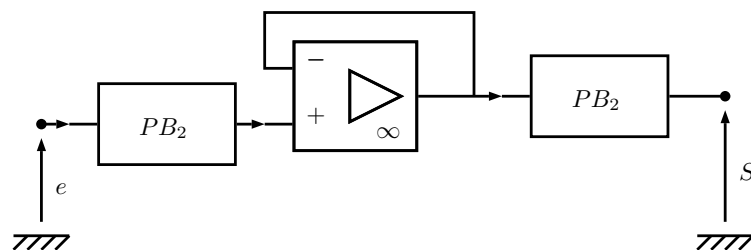


FIGURE 9 – Schéma du filtre passe-bas d'ordre 4

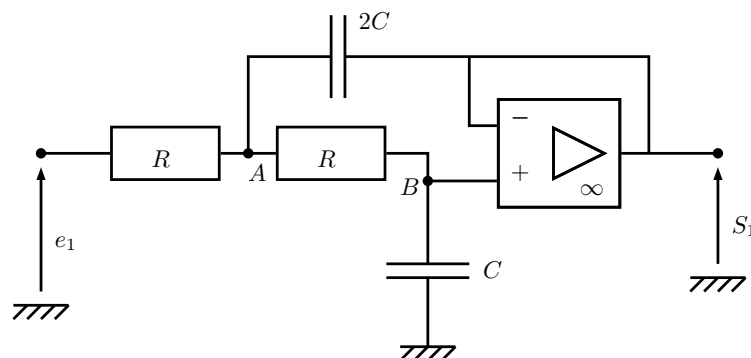


FIGURE 10 – Schéma du FPB2

- (a) Mettre la fonction de transfert du FPB2 sous la forme suivante où $p = j \times \omega$:

$$\left[\frac{S_1}{E_1} \right] (p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \times p}{\omega_o} + 2 \times \left[\frac{p}{\omega_o} \right]^2}$$

et exprimer ω_o à l'aide de R et C .

- (b) On prend : $R = 10\text{k}\Omega$ et $C = 1.8\text{nF}$. Exprimer puis calculer la fréquence f_0 de coupure du FPB2.
- (c) Tracer le diagramme de Bode en amplitude du FPB4 de la figure (9).

4. La figure (11) représente les graphes des signaux g_s et g'_s , tous deux issus de l'échantillonnage d'un signal $g(t)$ en créneaux de fréquence $f = 2\text{kHz}$. L'un des deux a été produit par un échantillonneur intégrant un FAR. Lequel et pourquoi ?

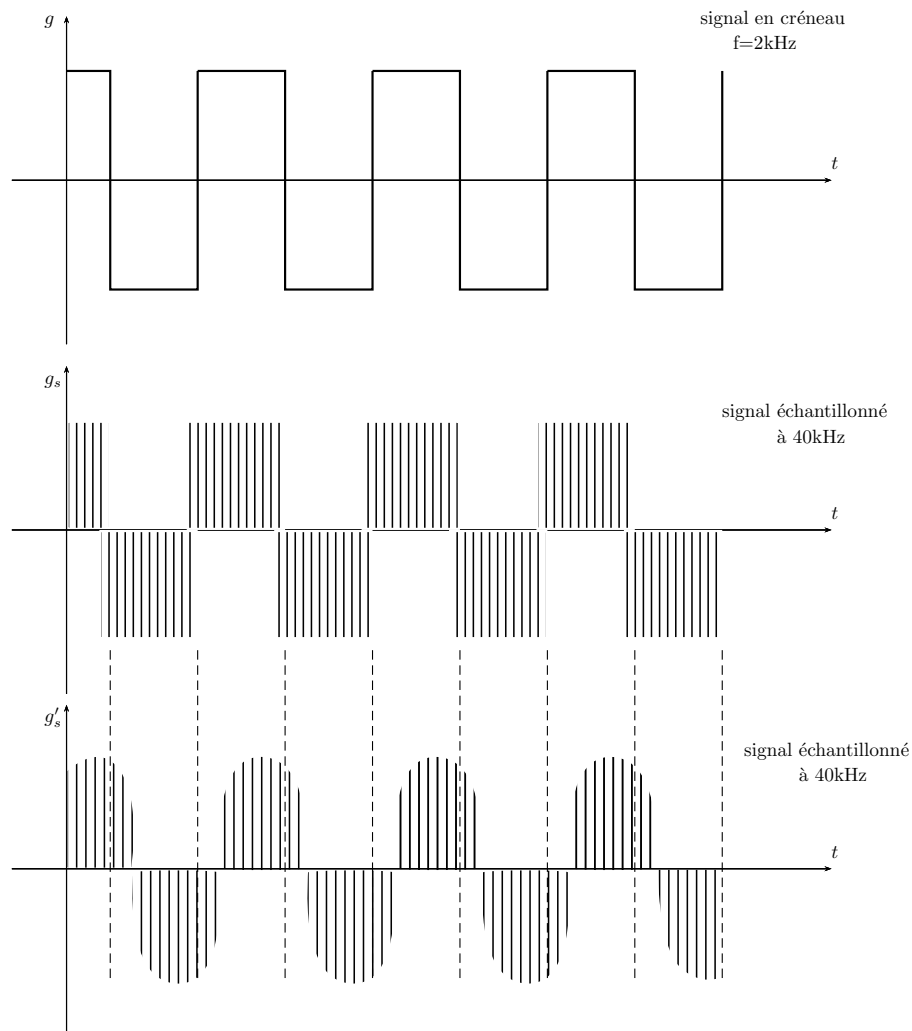


FIGURE 11 – $g(t)$ le signal de base, g_s et g'_s ses deux signaux échantillonnés

- (a) La figure (12) représente deux spectres ($Sp1$) et ($Sp2$). A quel signal g_s ou g'_s de la question précédente, chacun correspond-il ? Justifier.

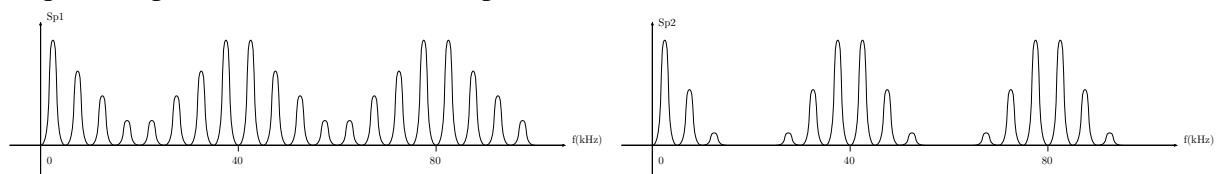
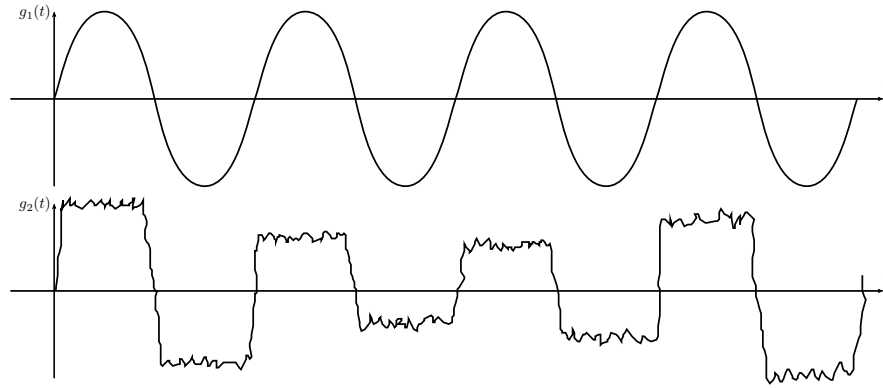


FIGURE 12 – Spectres S_{p1} et S_{p2}

- (b) Dans quel cas le spectre du signal échantillonné présente-t-il un recouvrement des répliques du spectre de $g(t)$?
- (c) A quelles déconvenues s'expose-t-on lors d'une restitution analogique de $g(t)$, si on l'a sous-échantillonné sans FAR ?
- (d) Quels sont les inconvénients d'un FAR ?
5. Chacun des deux signaux $g_1(t)$ et $g_2(t)$ de la figure (13) est le résultat d'une restitution analogique de $g(t)$, postérieure à son échantillonnage. Dire, de $g_1(t)$ ou de $g_2(t)$, lequel a restitué $g(t)$ à partir de g_s , lequel l'a fait à partir de g'_s .

FIGURE 13 – Signaux $g_1(t)$ et $g_2(t)$

6. Lors du sous-échantillonnage sans FAR d'un signal $g(t)$ à spectre étendu, suivi d'une restitution analogique, on peut pâtir d'un crénelage ou d'un effet d'enveloppe. Expliquer.

10 Échantillonner un signal avec un échantillonneur-bloqueur à ALI

Les réseaux téléphoniques transportent des informations codées en binaire, issues d'ordinateurs ou correspondant à des signaux vocaux analogiques captés par des microphones puis numérisés. La première étape de la numérisation d'un signal analogique $V_2(t)$ est son « échantillonnage-blocage ». Elle le transforme en un signal $V'_2(t)$ en « marches d'escalier », constant sur des intervalles temporels de durée T_e . Le signal $V'_2(t)$ est ensuite envoyé dans un module de quantification-codage, qui convertit chacune de ses « marches » en un mot binaire. Pour générer le signal $V'_2(t)$, l'échantillonneur-bloqueur (EB) doit, à toute date $t_k = t_o + k \times T_e$ où $k \in \mathbb{Z}$, capter la valeur $V_2(t_k)$ et la bloquer durant la durée T_e de l'intervalle $[t_k; t_{k+1}]$. Le montage (EB) est représenté sur la figure (14).

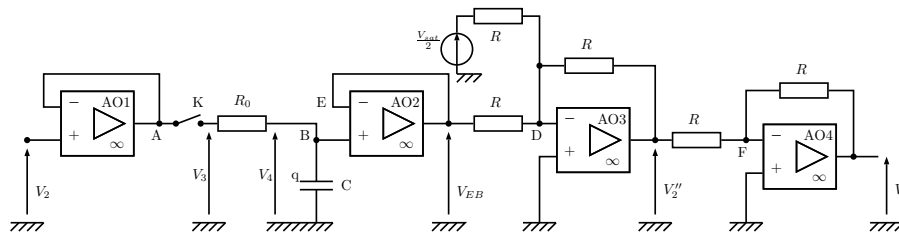


FIGURE 14 – Schéma du montage échantillonneur-bloqueur

Il contient un interrupteur K commandé par un dispositif qui le contraint, à chaque date $t_k = t_o + k \times T_e$, à se fermer pendant la durée δt avec $\delta t \ll T_e$, et à demeurer ouvert tout le reste du temps. Les quatre ALI sont idéaux et de tension de saturation V_{sat} . On note $I_k = [t_k; t_{k+1}]$ l'intervalle-type d'un échantillonnage, avec $k \in \mathbb{Z}$. La résistance R_o caractérise le caractère faiblement résistif des fils et des contacts électriques présents dans la branche de l'interrupteur K , et on suppose que la constante de temps $\tau_o = R_o C$ vérifie : $\tau_o \ll T_e$.

1. Échantillonnage sur l'intervalle-type :

(a) En analysant le fonctionnement du montage, montrer que :

$$\forall t \in I_k : V'_2(t) = V_2(t_k) + \frac{V_{sat}}{2}.$$

et que, sur tout intervalle-type, V'_2 réalise une capture et un blocage de la valeur prise par V_2 à la date initiale.

(b) Quel est l'intérêt du condensateur C ?

2. On précise que $V_2(t)$ prend ses valeurs dans $[-\frac{V_{sat}}{2}; +\frac{V_{sat}}{2}]$ et est de moyenne nulle.

Quel est le rôle de la tension $\frac{V_{sat}}{2}$ appliquée ?

3. Tracer les graphes temporels de deux signaux $V_2(t)$ et $V'_2(t)$ d'entrée et de sortie de l'(EB).

4. Si le spectre de $V_2(t)$ est borné par f_{max} , quel critère T_e et f_{max} doivent-ils vérifier ? Que risque-t-on si l'on ne satisfait pas à ce critère ?

11 Quantifier une valeur analogique à l'aide d'un module « CAN » à ALI et diodes

Le schéma du montage réalisant le module « CAN » est donné en figure (15).

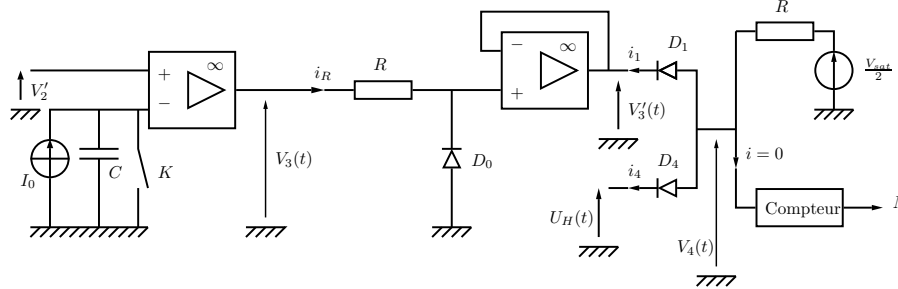


FIGURE 15 – Module « CAN »

Le module « CAN » est attaqué par un signal $V'_2(t)$ échantillonné-bloqué en « marches d'escalier » qui reste constant sur tout intervalle d'échantillonnage du type I_k , où k est un entier et où $I_k = [t_k = t_0 + k \times T_e; t_{k+1} = t_k + T_e]$. On précise que : $\forall t \in \mathbb{R}, V'_2(t) \in [0; V_{sat}]$. Une allure du signal $V'_2(t)$ est transcrite en figure (16).

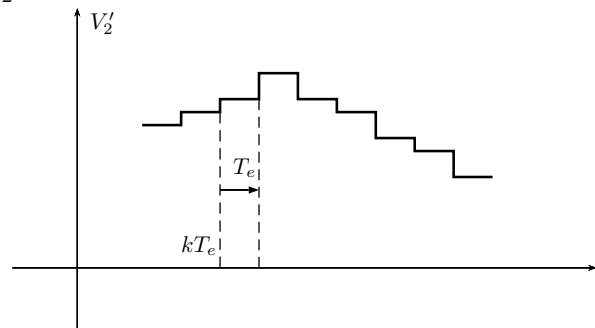


FIGURE 16 – Allure du signal $V'_2(t)$

Chacun des ALI est idéal, de tension de saturation V_{sat} , de transfert en boucle ouverte infini. Chacune des diodes est idéale, de caractéristique rappelée en figure (17).

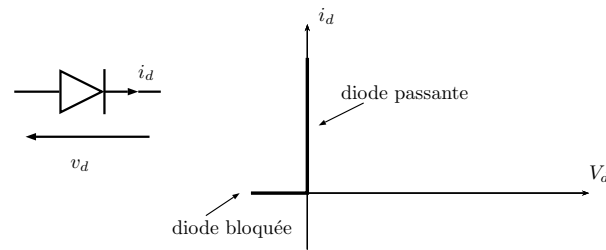


FIGURE 17 – Caractéristique d'une diode idéale

La tension U_H est en créneau, entièrement positive, de période T_H , et définie par : $U_H(t) = V_{sat} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{T_H}{2}$ et $U_H(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{T_H}{2} < t < T_H$.

Étude de la fonction $V'_2 \mapsto V_3$:

A la date t_k^- , prémices à la conversion effectuée sur I_k , l'interrupteur K est commandé à la fermeture pendant un temps négligeable. Ensuite, il est commandé à l'ouverture sur tout l'intervalle I_k . Une représentation des états « ouvert » ou « fermé » de l'interrupteur K est fournie en figure (18).

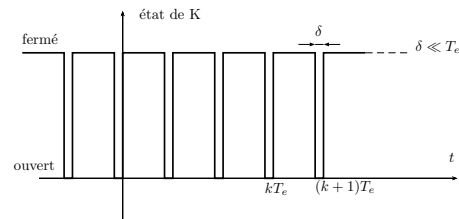
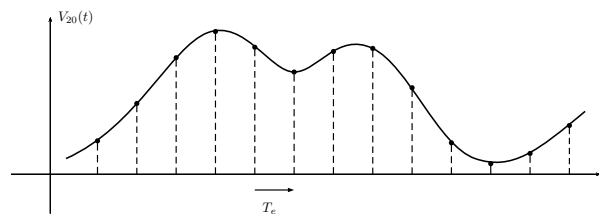


FIGURE 18 – Les états de l'interrupteur

1. (a) Exprimer, sur l'intervalle I_k , les signaux $U_0(t)$ et $V_3(t)$.
 (b) La conversion sur l'intervalle I_k de la valeur analogique $V'_2(t_k)$ en une valeur « numérique », est liée à la mesure du temps que met V_3 pour basculer. Donner une inégalité liant T_e , V_{sat} , I_o et C assurant la faisabilité de la CAN sur l'intervalle I_k , et la mettre sous forme $T_e > T_{emin}$.
 (c) Pour cette CAN sur l'intervalle I_k , exprimer la durée δ_k séparant la date-début t_k du basculement de $V_3(t)$.
2. On souhaite échantillonner puis numériser le signal V_{2o} analogique schématisé en figure (19).

FIGURE 19 – Allure du signal $V_{2o}(t)$

Tracer le signal V_{3o} que lui associe le module CAN étudié.

3. Étude de la fonction $V_3 \mapsto V'_3$:

Montrer que la table de vérité liant V_3 à V'_3 est :

V_3	$-V_{sat}$	V_{sat}
V'_3	0	V_{sat}

4. Étude de la fonction $[V'_3; U_H] \mapsto V_4$:

En admettant la table de vérité du fonctionnement des diodes D_1 et D_4 , remplir le tableau des valeurs A , B , C et D de la tension V_4 :

U_H	V_{sat}	0	V_{sat}	0
V'_3	V_{sat}	V_{sat}	0	0
D_4	bloquée	passante	bloquée	passante
D_1	bloquée	bloquée	passante	passante

5. Dans le cas du signal V_{2o} représenté en figure (19) et en prenant $T_H = \frac{T_e}{10}$, tracer le graphe de $V_4(t)$.

6. Étude de la quantification de la valeur échantillonnée :

Le compteur binaire, remis à zéro en t_k , enregistre puis stocke en mémoire le nombre N_k des basculements de V_4 (de la valeur 0 vers la valeur $V_{sat}/2$) qui ont lieu sur l'intervalle I_k .

- Montrer que la valeur $V'_2(t_k)$ est convertie en N_k avec une proportionnalité dont on donnera le coefficient.
- Dans quel intervalle N_k varie-t-il si $T_e = T_{emin}$?

12 Complément : Le spectre fourni par la transformée de Fourier - Produit de convolution

- ✕ La transformée de Fourier (TF) généralise la série de Fourier aux signaux non périodiques. La transformée de Fourier de $x(t)$ est une fonction $X(f)$ qui le représente spectralement et lui est liée par les relations réciproques suivantes :

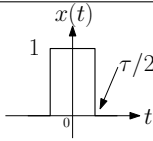
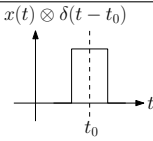
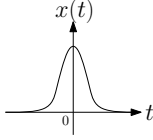
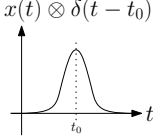
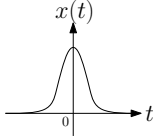
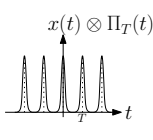
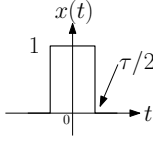
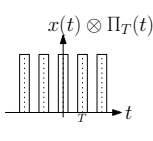
$$X(f) = TF(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi ft)x(t)dt \text{ et } x(t) = TF^{-1}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi ft)X(f)df$$

- ✕ Le produit de convolution (noté $\otimes$) de la fonction $x(t)$ par la distribution δ centrée en t_0 est :

$$x(t) \otimes \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Seuls les produits de convolution avec le pic de Dirac ($\delta(t)$) ou avec le peigne de Dirac ($\Pi_T(t)$) seront envisagés.

Signal $x(t)$	Transformée de Fourier $X(f)$
$\exp(-\alpha t^2)(\alpha > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha})$
$\delta(t)$	1
$\Pi_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$
1	$\delta(f)$
$\exp(i2\pi f_o t)$	$\delta(f - f_o)$
$\cos(2\pi f_o t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_o) + \frac{1}{2}\delta(f + f_o)$
$\sin(2\pi f_o t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_o) - \frac{1}{2}\delta(f + f_o)$
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \text{sinc}(\pi \tau f)$
$x(t) \times y(t)$	$X(f) \otimes Y(f)$
$x(t) \otimes y(t)$	$X(f) \times Y(f)$

Signal $x(t)$	Produit de convolution
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$x(t) \otimes \delta(t - t_0)$
 FIGURE 20	 FIGURE 21
$\exp(-\alpha t^2) (\alpha > 0)$	$x(t) \otimes \delta(t - t_0)$
 FIGURE 22	 FIGURE 23
$\exp(-\alpha t^2) (\alpha > 0)$	$x(t) \otimes \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$
 FIGURE 24	 FIGURE 25
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$x(t) \otimes \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$
 FIGURE 26	 FIGURE 27