1 Superposition d'états dans un puits infini

On considère un puits infini compris entre $x = 0$ et $x = L$.

1. Déterminer les états stationnaires :

$$\psi_n(x,t) = \phi_n(x) \exp\left(-\frac{E_n t}{\hbar}\right)$$

   On prépare un quanton à $t = 0$ dans l'état :

$$\psi(x,0) = \cos\theta \phi_1(x) + \sin\theta \phi_2(x)$$

   Avec $0 \leq \theta < \pi$

2. Vérifier que la condition de normalisation est vérifiée pour $\psi(x,0)$.
3. Exprimer la fonction d'onde $\psi(x,t)$ pour $t > 0$, en déduire la densité de probabilité de présence à un instant $t > 0$. Analyser la dépendance de cette densité de probabilité en fonction de θ.
4. Déterminer $\langle x \rangle$ en fonction du temps. Commenter.
5. Déterminer $\langle x^2 \rangle$ en fonction du temps, en déduire l'indétermination sur Δx. Conclure.

Données :
Pour n entier strictement positif :

$$\int_0^1 u^2 \sin^2(n\pi u)\mathrm{d}u = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2 n^2}$$

$$\int_0^1 u \sin(\pi u)\sin(2\pi u)\mathrm{d}u = -\frac{8}{9\pi^2}$$

$$\int_0^1 u^2 \sin(\pi u)\sin(2\pi u)\mathrm{d}u = -\frac{8}{9\pi^2}$$

2 Étoile à neutrons

On considère une étoile à Neutron, de rayon R, contenant N neutrons (de masse m).

1. En considérant que deux neutrons peuvent être confinés dans un même puits potentiel (infini) et que l'on ne peut avoir que deux neutrons par niveau d'énergie, déterminer l'énergie de l'étoile à neutrons en fonction de N, l et m.
2. Afin d'affiner le modèle, on considère un modèle de puits à 3D.
   (a) En considérant que le puits dans lequel sont piégés deux neutrons est une cube d'arête l, déterminer l en fonction du rayon R de l'étoile. et de N.
   (b) La fonction d'onde spatiale s'écrit :

$$\phi(x) = \phi_x(x) \cdot \phi_y(y) \cdot \phi_z(z)$$

   et on note E_x, E_y et E_z les énergies associées.
   En faisant apparaitre les trois nombre quantiques n_x, n_y et n_z, déterminer E_x, E_y et E_z. En déduire une première expression de l'énergie de l'étoile.
3. Afin de déterminer complètement cette énergie, on se place dans l'approximation des milieux continus.

(a) justifier que pour sommer sur la totalité des niveaux possibles, il faut intégrer sur 1/8 de sphère de rayon :

$$R_e = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(b) En déduire l'expression de l'énergie de l'étoile en fonction de N, R et m.

Données :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)}{6}$$

3 Interaction Hélium - électron

On considère un électron de masse m et de charge q , en mouvement à la surface d'un bain d'hélium liquide, comme représenté figure 1. On suppose que le mouvement de l'électron dans le plan (Oxy) de la surface est limité par des électrodes non représentées sur la figure 1. On ne s'intéresse dans ce problème qu'au mouvement dans la direction z perpendiculaire à la surface.

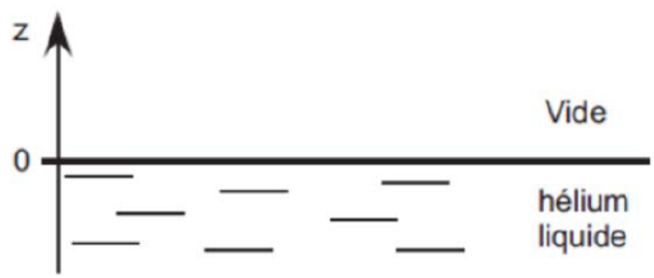
4. 

Figure 1 – Géométrie du dispositif

1. Le potentiel d'interaction entre l'électron et l'hélium liquide est supposé infini si l'électron est à l'intérieur du liquide ($z < 0$). En déduire la valeur de la fonction d'onde $\Psi(z,t)$ de l'électron pour $z < 0$ et rappeler la condition de continuité de $\Psi(z,t)$ en $z = 0$
2. Quand l'électron est placé dans le demi-espace $z \geq 0$, il possède une énergie potentielle d'origine électrostatique, due à son interaction avec son « image » électrique dans l'hélium. Cette énergie potentielle a pour expression :

$$V(z) = -\frac{\Lambda}{z} \text{ avec } \Lambda = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$$

où ε est la constante diélectrique de l'hélium.

- ✘ Représenter le potentiel $V(z)$ total auquel est soumis l'électron.
- ✘ Rappeler l'équation qui régit l'évolution temporelle de la fonction d'onde $\Psi(z,t)$ de l'électron.

3. On cherche des solutions stationnaires de cette équation sous la forme :

$$\Psi(z,t) = \phi(z)\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

Donner sans démonstration l'équation vérifiée par $\phi(z)$ (équation de Schrödinger indépendante du temps). Dans la suite, on notera E_n , où n est un entier strictement positif, les énergies négatives (états liés) pour lesquelles cette équation admet une solution.

4. On donne les fonctions d'onde du fondamental et du premier état excité :

$$\phi_1(z) = C_1 z \exp(-k_1 z) \text{ et } \phi_2(z) = C_2 z(1 - k_2 z) \exp(-k_2 z)$$

   (a) La fonction d'onde ϕ_1 correspond à l'état fondamental du système. Par analogie avec le puits de potentiel infini, justifier ce résultat. De même justifier que ϕ_2 est le premier état excité.
   (b) Déterminer k_1, E_1. Le même calcul donne :

$$k_2 = \frac{m\Lambda}{2\hbar^2} \text{ et } E_2 = -\frac{\hbar^2 k_2^2}{2m}$$

   (c) Déterminer C_1.
   (d) Déterminer la valeur moyenne de z pour un électron préparé dans l'état ϕ_1 (notée z_1).
   (e) On donne : $\varepsilon = 1.057$. Déterminer E_1, E_2 et z_1.
   (f) Déterminer La fréquence de transition entre ces deux niveaux d'énergie. Commenter.

Données :

$$\int_0^\infty u^n e^{-u} \mathrm{d}u = n!$$

4 Effet Compton inverse

En astrophysique, l'effet Compton inverse est en fait plus important que l'effet Compton habituel : il désigne le phénomène de diffusion électron - proton où l'électron, au lieu d'être immobile, a une énergie très grande. Cet effet est notamment observé pour un électron relativiste diffusé par un photon du rayonnement fossile ($T = 2.7$K).

1. Rappeler les relations de Planck- Einstein relative au photon. En utilisant la loi de Wien rappelée en fin d'énoncé, donner la longueur d'onde caractéristique des photons du rayonnement fossile. A quel domaine du rayonnement électromagnétique appartiennent les photons concernés ?
2. L'électron,de masse m et de vitesse $\vec{V}$, étant relativiste, son énergie E et son impulsion $\vec{p}$ s'écrivent :

$$E = \gamma mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$\vec{p} = \gamma m\vec{V}$$

   Où c est la vitesse de la lumière dans le vide et où :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{V}{c}$$

   - ✘ Sur quel critère doit-on considérer qu'une particule est relativiste ? que peut-on dire de γ pour une particule relativiste ?
   - ✘ Rappeler les ordres de grandeur de m et c.
3. On considère pour la suite le cas d'un choc frontal, où l'électron et le photon (de fréquence initiale ν) vont initialement à l'encontre l'un de l'autre.
   (a) On considère que pendant la collision, le système {électron - photon} est isolé. Quelles grandeurs relatives à ce système se conservent au cours du choc ?
   (b) On prend comme axe de référence des angles (angles algébriques) la direction initiale de l'électron : ϕ est l'angle de diffusion de l'électron et θ l'angle de la vitesse du photon après le choc. Montrer , en utilisant les lois de conservation énoncées précédemment, que la fréquence ν' du photon après le choc vérifie :

$$\varepsilon' = \frac{1+\beta}{\gamma + \varepsilon - (\gamma\beta - \varepsilon)\cos\theta}$$

   où :

$$\varepsilon = \frac{h\nu}{mc^2} \text{ et } \varepsilon' = \frac{h\nu'}{mc^2}$$

(c) Justifier que dans le cas du rayonnement fossile $\varepsilon << 1$. Simplifier l'expression précédente, en déduire l'expression de la variation relative de la fréquence du photon.

(d) Pourquoi parle-t-on du réchauffement du rayonnement fossile lié à l'effet Compton inverse ?

Données :

✘ Loi de Wien :

$$T \times \lambda_{max} = 2898\,\mathrm{K{\cdot}\mu m}$$

5 Ion moléculaire H_2^+

Une modélisation simple de l'ion moléculaire H_2^+ consiste à considérer une particule (l'électron) de masse m évoluant dans un potentiel à une dimension (Ox) de la forme :

$$V(x) = \alpha\left(\delta\left(x - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{d}{2}\right)\right) \text{ avec } \alpha < 0 \text{ (potentiel attractif)} \tag{1}$$

où $\delta(x)$ est la fonction de Dirac :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1 \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a) \end{cases} \tag{2}$$

1. Quelle est la dimension de α ?
2. On cherche des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger correspondant à des états liés, c'est à dire à des états d'énergie E négative (on notera $\phi(x)$ la fonction d'onde spatiale de la particule).

   Donner la forme générale des fonctions d'onde pour ces états. En déduire les expressions des solutions symétriques et anti-symétriques. On posera :

$$K = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

3. Rappeler les relations de continuité vérifiées par la fonction d'onde. On admet ici que le « saut » de la dérivée première de ϕ de part et d'autre d'un pic vérifie :

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right)_{\pm\frac{d}{2}(+)} - \left.\frac{d\phi}{dx}\right)_{\pm\frac{d}{2}(-)} = -\frac{2}{\lambda_0}\phi\left(\pm\frac{d}{2}\right) \text{ où } \lambda_0 = \frac{-\hbar^2}{m\alpha}$$

   En déduire les conditions de quantification pour les modes symétriques et antisymétriques :

$$\begin{cases} \text{Modes symétriques : } K\lambda_0 - 1 = \exp\left(-Kd\right) \\ \text{Modes antisymétriques : } K\lambda_0 - 1 = -\exp\left(-Kd\right) \end{cases} \tag{3}$$

4. Par une méthode graphique montrer que pour $d > \lambda_0$, il existe deux états liés (un état symétrique et un état antisymétrique). Commenter.
5. Que se passe-t-il si $d < \lambda_0$?

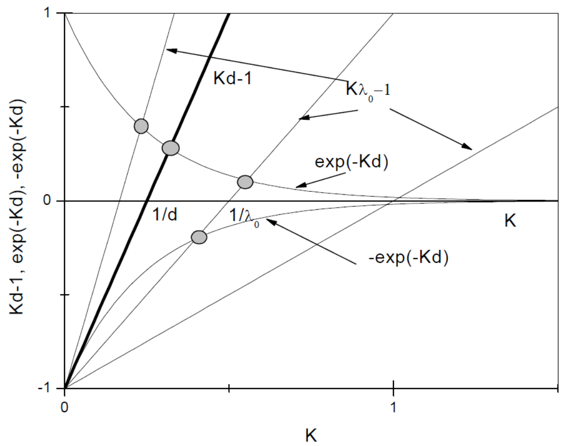


Figure 2

6 Équation de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon, parfois également appelée équation de Klein-Gordon-Fock, est une version relativiste de l'équation de Schrödinger décrivant des particules massives de spin nul, sans ou avec charge électrique.

1. **Particule libre.**
   L'équation de Klein-Gordon :
   $$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0$$
   est l'équation d'onde relativiste pour une particule libre.
   (a) Soit un quantum libre de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$ modélisé par une OPPM(+). Quelle relation a-t-on entre ω et k ? Commenter.
   (b) Pour une particule relativiste, l'énergie est reliée à l'impulsion par :
   $$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$$
   Si $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ est interprétée comme l'impulsion de la particule de masse m, et si l'on considère que son énergie E et positive, quelle relation a-t-on entre E et ω ?
2. **Marche de potentiel.**
   Une particule libre, d'énergie $E > mc^2 > 0$, arrive sur une marche de potentiel ($V(x<0) = 0$ et $V(x>0) = V_0$). On admet que l'équation de Klein-Gordon stationnaire vérifiée par la particule est alors :
   $$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{(E - V(x))^2 - (mc^2)^2}{\hbar^2c^2}\right]\phi(x) = 0$$
   où :
   $$\psi(x,t) = \phi(x)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$$
   est la fonction d'onde décrivant l'évolution de la particule.
   (a) Donner les expressions de $\phi(x)$ pour $x > 0$ et $x < 0$. On introduira k et q tels que :
   $$k^2 = \frac{E^2 - (mc^2)^2}{\hbar^2c^2}$$

$$q^2 = \frac{(E - V_0)^2 - (mc^2)^2}{\hbar^2 c^2}$$

(q pouvant être complexe).

(b) En déduire les expressions générales des coefficients de transmission et de réflexion.

(c) Interpréter les deux cas :

$$0 \leq V_0 \leq E - mc^2$$

$$E - mc^2 \leq V_0 \leq E + mc^2$$

(d) Que se passe-t-il pour $V_0 \geq E + mc^2$ Comment conserver la relation $R + T = 1$?

Données :

- ✘ Vecteur densité de courant de probabilité : $\vec{J}(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial x}\right)\vec{e}_x$
- ✘ Coefficient de transmission et de réflexion : $R = \frac{|J_r|}{|J_i|}$ et $T = \frac{|J_t|}{|J_i|}$

7 Molécule d'ammoniac

On étudie l'évolution d'une particule quantique de masse m dans un double puits de potentiel, représenté ci-dessous. On considère un état stationnaire où l'énergie E de la particule est faible devant la hauteur V_0 de la barrière de potentiel : $E \ll V_0$.

On se limite à la situation où l'état stationnaire de la particule quantique est symétrique, c'est-à-dire à une partie spatiale de la fonction d'onde paire.

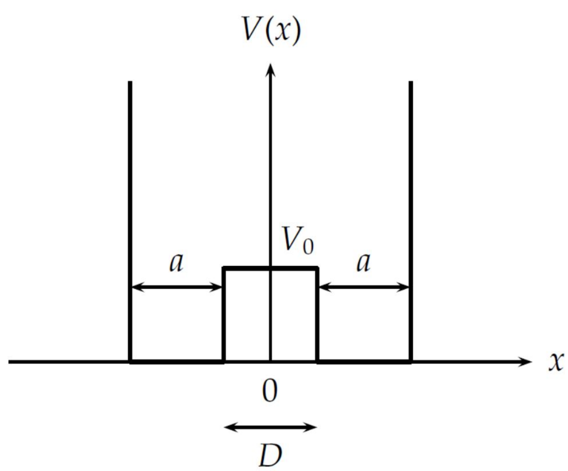


Figure 3

1. Qu'est-ce qu'un état stationnaire ? Pourquoi peut-on se limiter à l'étude d'un état symétrique ?
2. Déterminer l'expression de la partie spatiale de la fonction d'onde symétrique dans chacune des 3 régions du puits de potentiel. On pose $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ et $q = \sqrt{2mV_0}/\hbar$.
3. Écrire les conditions de raccordement en $x = D/2$ et en déduire la relation de quantification, dans la limite où $qD \gg 1$:
$$\tan(ka) = -\frac{k}{q}\left(1 + \exp^{-qD}\right)$$
4. Représenter graphiquement les solutions de cette équation, et en déduire une expression approchée de k pour l'état fondamental symétrique. Donner l'expression de l'énergie E_s correspondante.

5. L'énergie E_a de l'état stationnaire antisymétrique de plus faible énergie peut être évaluée en suivant la même démarche. On peut ensuite calculer la différence d'énergie $E_a - E_s$:

$$\Delta E = E_a - E_s = \frac{h^2}{mqa^3} \exp^{-qD} \ .$$

   On considère un état de la particule quantique défini par la superposition des deux états symétrique et antisymétrique d'énergies respectives E_s et E_a.

   Montrer que la densité de probabilité de présence oscille à une fréquence f dont on donnera l'expression.

6. Ce modèle permet de décrire l'inversion de Walden de la molécule d'ammoniac. Quelle est l'influence de la hauteur et de la largeur de la barrière sur la fréquence d'oscillation ?

8 Oscillation des neutrinos

On étudie l'évolution d'une particule quantique, de masse m, dans le profil d'énergie potentielle $E_p(x)$ représenté sur la figure ci-dessous, qui correspond à deux puits de potentiel, centrés en $x = a$ et $x = -a$, séparés par une barrière de potentiel de hauteur E_0.

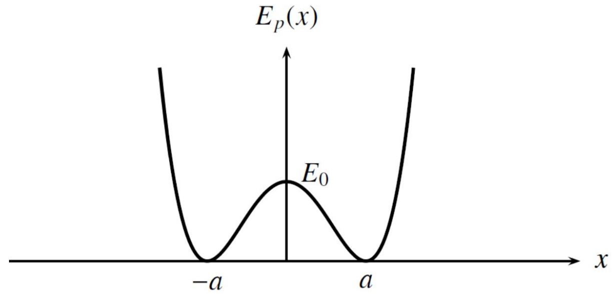


Figure 4

Les deux premiers états stationnaires de la particule, de fonctions d' onde propres $\varphi_s(x)$ et $\varphi_a(x)$, correspondent aux énergies E_s et E_a telles que $E_0 > E_a > E_s$. On note $\Delta E = E_a - E_s$ la différence d'énergie et $\overline{E} = \dfrac{E_a + E_s}{2}$ l'énergie moyenne.

On définit les deux fonctions d'onde suivantes, par combinaison linéaire de φ_s et φ_a :

$$\varphi_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_s(x) - \varphi_a(x)\right) \quad \varphi_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_s(x) + \varphi_a(x)\right)$$

La fonction d'onde φ_G permet de décrire une particule plutôt localisée dans le puits de potentiel de gauche, centré en $x = -a$, alors que la fonction d'onde φ_D décrit une particule plutôt localisée dans le puits de potentiel de droite, centré en $x = a$.

On donne l'équation de Schrödinger, vérifiée par la fonction d'onde ψ, et l'équation de Schrödinger indépendante du temps, vérifiée par la fonction d'onde propre φ associée à l'énergie E :

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t) + E_p(x)\psi(x,t) \text{ et } -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x) + E_p(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

1. On exprime la fonction d'onde ψ qui décrit la particule quantique sous la forme d'une combinaison linéaire de φ_s et φ_a :

$$\psi(x,t) = C_s(t)\varphi_s(x) + C_a(t)\varphi_a(x).$$

   Donner les expressions des coefficients $C_s(t)$ et $C_a(t)$ en fonction de $E_s, E_a, \hbar$ et t sachant que la particule quantique est localisée dans le puits de potentiel de droite à l'instant $t = 0$. On obtient alors (calcul non demandé) :

$$\psi(x,t) = \left[i \sin\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)\varphi_G(x) + \cos\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right)\varphi_D(x)\right]\exp\left(-i\frac{\bar{E}t}{\hbar}\right)$$

2. En déduire simplement, et avec un minimum de calculs, une expression de la probabilité $P(t)$ qu'une mesure de la position de la particule la localise dans le puits de potentiel de droite à l'instant t. Commenter.

3. Le neutrino est une particule élémentaire produite dans les réactions gouvernées par l'interaction faible. On distingue les neutrinos, entre autres propriétés, par leur saveur : il existe des neutrinos électroniques et des neutrinos muoniques. Pour un neutrino, on peut définir deux états propres de masse m_1 et m_2 (analogues aux états propres φ_s et φ_a de l'étude précédente) qui ne coïncident pas avec les états de saveur (analogues aux états φ_D et φ_G) de sorte qu'un neutrino va osciller entre les deux états de saveur électronique et muonique. On note ΔE la différence d'énergie entre les deux états propres de masse m_1 et m_2.

   (a) On s'intéresse aux neutrinos électroniques produits par les réacteurs des centrales nucléaires. Leur vitesse est considérée comme égale à celle de la lumière dans le vide, notée c.
   Par analogie avec l'étude précédente, exprimer la probabilité $P_e(\ell)$ que le neutrino soit dans l'état de saveur électronique après une distance parcourue égale à ℓ. Exprimer la période spatiale L.

   (b) Les deux états propres de masse m_1 et m_2 sont séparés par un écart d'énergie ΔE très faible devant l'énergie moyenne E. On montre que :

   $$L = \frac{2Eh}{\Delta m^2 c^3},$$

   avec $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$. Exploiter la figure au verso pour en déduire une estimation numérique de $\Delta m^2 c^4$.

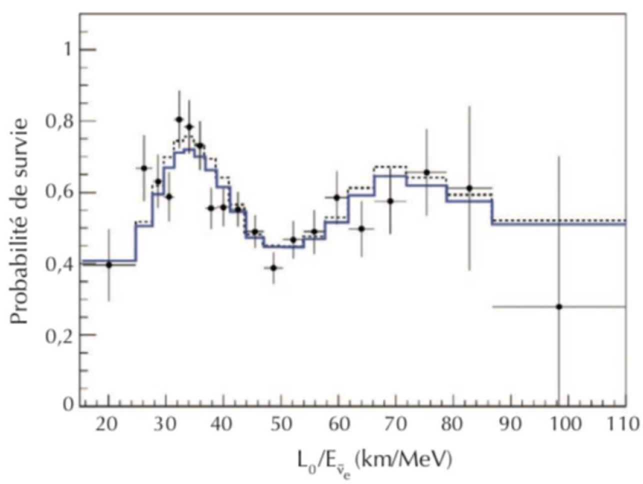


Figure 5 – Probabilité de survie des neutrinos électroniques en fonction de $L_0/E_{\bar{\nu}_e}$ où L_0 est la distance parcourue et $E_{\bar{\nu}_e}$ l'énergie moyenne. Données issues de l'expérience KamLAND.

9 Effet Ramsauer-Townsend

En 1921, Ramsauer étudie la diffusion d'électrons par des atomes de gaz rares. Il observe une transparence totale à des faisceaux monocinétiques d'électrons dans certaines conditions.

On considère un faisceau monocinétique d'électrons selon l'axe (Ox) et vers les x croissants. Un électron a une masse m et une énergie $E > 0$. L'interaction entre un électron du faisceau et un atome de gaz rare est modélisée par un puits d'énergie potentielle :

- si $x < 0 \quad V(x) = 0$
- si $x \in [0, a] \quad V(x) = -V_0 \qquad$ avec $V_0 > 0$
- si $x > a \quad V(x) = 0$

On étudie un état stationnaire et la fonction d'onde a pour expression :

$$\Psi(x,t) = \varphi(x) \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$$

où $\varphi(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

1. Déterminer l'expression de $\varphi(x)$ dans chacun des domaines $x < 0, x \in [0, a]$ et $x > a$. On introduira des coefficients $A_I, A'_I, A_{II}, A'_{II}, A_{III}$.
2. Préciser les quatre relations entre les constantes précédentes. L'énergie de la particule est-elle quantifiée ?
3. On cherche à établir une condition pour que la probabilité de réflexion soit nulle.
   (a) Exprimer le courant de probabilité associé au faisceau incident, ainsi que celui associé aux électrons transmis. En déduire une relation entre deux des coefficients introduits précédemment.
   (b) Montrer que la transmission du faisceau est totale si et seulement si l'énergie d'un électron prend certaines valeurs que l'on déterminera.
4. Dans le cas du xénon, on modélise l'interaction avec les électrons incidents par un puits de largeur $0,2$ nm et de profondeur $8,7$eV. Quelle est la plus faible énergie des électrons incidents permettant d'observer une transmission totale ?