

DS1 - Corrigé

1 ODG



L'idée n'est pas d'apprendre les ODG suivants, il faut savoir les retrouver (SVF)

- ✗ Pression atmosphérique exprimée en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$:

On écrit l'équivalent des forces de pression atmosphériques en terme de poids :

$$P_0 S = mg \Rightarrow m = \frac{P_0 S}{g} = \frac{10^5 \times 10^{-4}}{10} = 1 \text{ kg}$$

- ✗ Masse de l'atmosphère

La masse de l'atmosphère s'écrit en considérant l'équilibre de l'atmosphère sous l'effet des forces de pression et de son poids (on néglige la courbure de la terre) :

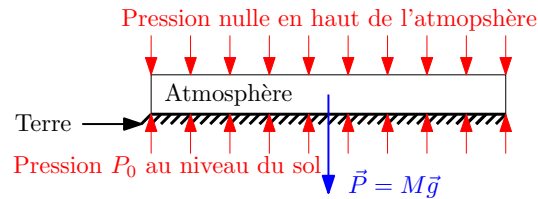


FIGURE 1 – Équilibre de l'atmosphère

$$P_0 S - Mg = 0 \Rightarrow M = \frac{P_0 (4\pi R_T^2)}{g} = \frac{4\pi (3.6)^2 \times 10^{12+5}}{10} \approx 1.5 \times 10^{18} \text{ kg}$$



Les 70 % correspondent à la surface et non pas au volume

- ✗ Gouttes d'eau

— Nombre de molécules d'eau dans une goutte d'eau :

— Volume d'une goutte d'eau : $v = 0.05 \text{ ml}$

— Masse d'une goutte d'eau : $m = 0.05 \text{ g} = 5 \times 10^{-5} \text{ kg}$

— Masse d'une molécule d'eau : $m_0 = \frac{M_{H_2O}}{N_A} = \frac{0.018}{6.022 \times 10^{23}} \approx 3 \times 10^{-26} \text{ kg}$

— Nombre de molécules d'eau dans une goutte d'eau :

$$N_1 = \frac{m}{m_0} \approx 2 \times 10^{21}$$

— Nombre de gouttes d'eau dans les océans du globe :

— Surface des océans : $S = 0.7 \times 4\pi R_T^2 = 0.7 \times 4 \times \pi \times 6.4^2 \times 10^{12} \approx 4 \times 10^{14} \text{ m}^2$

— Profondeur moyenne des océans : $h \approx 5 \times 10^3 \text{ m}$

— Volume des océans : $V = Sh \approx 2 \times 10^{18} \text{ m}^3$

— Masse des océans : $M = \rho_{H_2O} V \approx 2 \times 10^{21} \text{ kg}$

— Nombre de gouttes d'eau dans l'océan :

$$N_2 = \frac{M}{m} \approx 2 \times 10^{26}$$

✘ Puissance volumique d'un four à micro onde

On considère qu'un verre d'eau, de volume $v = 100 \text{ ml}$, à 20°C , met environ une minute pour rentrer en ébullition : $p_v \times v = \frac{\rho_{H_2O} v c \Delta T}{\Delta t} \Rightarrow p_v = \frac{\rho c \Delta T}{\Delta t} = \frac{10^3 \times 4.18 \times 10^3 \times 80}{60} \approx 5 \text{ MW}\cdot\text{m}^{-3}$

✘ Nombre de molécules dans la bouteille

Le nombre N de molécules entrant dans la bouteille pendant Δt est donné par le débit de particules :

$$\frac{N}{\Delta t} = D = n^* V^* S$$

Où n^* est la densité de molécules :

$$n^* = \frac{P}{k_B T} = \frac{P N_A}{R T}$$

Où V^* est la vitesse quadratique moyenne :

$$V^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Où S est la section du goulot :

$$S = \pi r^2$$

D'où :

$$N = \frac{P N_A}{R T} \sqrt{\frac{3RT}{M}} \pi r^2 \Delta t = \sqrt{\frac{3}{RTM}} \pi r^2 P \Delta t$$

En prenant $r = 1 \text{ cm}$; $P = 10^5 \text{ Pa}$; $T = 300 \text{ K}$; $M = 0.029 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$, on trouve :

$$N = 1.5 \times 10^{21}$$

✘ Gradient de température dans la troposphère

$$a = \frac{\Delta T}{\Delta z} = -6.5^\circ\text{C}\cdot\text{km}^{-1} \Rightarrow T(4807 \text{ m}) = T(237 \text{ m}) - a \times \Delta z \approx -20^\circ\text{C}$$

✘ Écran cathodique

— Libre parcours moyen d'un électron (rayon $r = e$) dans le tube (collision avec différentes molécules présentes dans l'air (rayon r_m) :

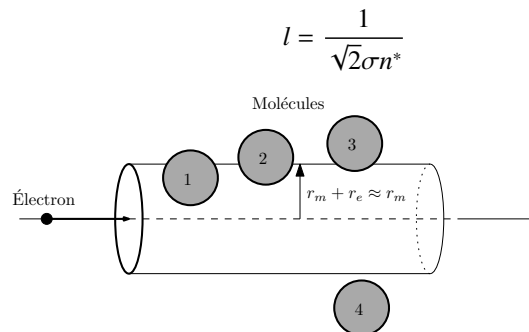


FIGURE 2 – Libre parcours moyen d'un électron

— section efficace de collision : $\sigma = \pi(r_{at} + r_e)^2 \approx \pi r_{at}^2 \approx 10^{-10} \text{ m}^2$

— Densité moléculaire : $n^* = \frac{P}{k_B T}$

— Pression dans le tube :

$$P = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi r_{at}^2 l}$$

Où $l = 30 \text{ cm}$; $T \approx 300 \text{ K}$

On trouve : $P = 0.3 \text{ Pa}$

✘ Force de répulsion entre deux personnes

— Les deux personnes portent une charge q égale à l'opposée de 1% de la charge des N_p protons que contient leur corps :

$$q = -\frac{N_p e}{100}$$

— Hypothèses :

— HYP1 : On suppose les corps ponctuels distants de $r = 60$ cm,

— HYP2 : On suppose que la masse d'une personne ($m \approx 70$ kg) est essentiellement due à la masse (m_N) des nucléons (N_N) qui la composent :

$$m = m_N N_N$$

— HYP3 : Les principaux éléments qui constituent le corps humain (O, N, C) ont des noyaux qui comportent autant de protons que de neutrons (mis à part l'hydrogène, comptant peu dans la masse). On supposera donc que :

$$N_N \approx 2N_p$$

— D'après HYP1 ; le force d'interaction entre les 2 personnes est de la forme (norme) :

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{N_p^2 e^2}{4 \times 10^4 \times \pi\epsilon_0 r^2}$$

Avec :

$$N_p = \frac{N_N}{2} = \frac{m}{2m_p}$$

D'où :

$$F = \frac{m^2 e^2}{16 \times 10^4 \times \pi\epsilon_0 m_p^2 r^2}$$

— Application numérique :

$$F = \frac{49 \times 10^2 \times 1.6^2 \times 10^{-38}}{16 \times 10^4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times (1.67)^2 \times 10^{-54} \times 6 \times 10^{-1}}$$

$$F = \frac{5 \times 1.6^2}{1.6 \times 3.14 \times 8.85 \times (1.67)^2 \times 6} 10^{(1+2-38-1-4+12+54+1)}$$

$$F \approx \frac{5 \times 2}{3 \times 3 \times 9 \times 6} 10^{27} \approx \frac{1}{81 \times 6} 10^{28} \approx \frac{1}{8 \times 6} 10^{27} \approx \frac{1}{5} 10^{26}$$

Soit :

$$F = 2 \times 10^{25} \text{ N}$$

— Le « Poids » de la terre est :

$$P = M_T g \approx 6 \times 10^{25} \text{ N}$$

⇒ On retrouve bien le même ordre de grandeur.

2 Question ouverte

✘ On modélise Dark Sidious en train d'électrocuter son adversaire par le schéma électrique suivant :

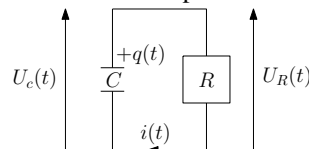


FIGURE 3



Préciser obligatoirement les conventions sur le schéma !

$$U_c = +\frac{q}{C}$$

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

- ✘ L'équation différentielle vérifiée par $U_c(t)$ s'obtient facilement :

$$U_c(t) = Ri(t) = -RC \frac{du}{dt}$$

D'où :

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c(t)}{\tau} = 0$$

où : $\tau = RC$

- ✘ La résolution de cette équation différentielle donne :

$$U_c(t) = U_0 \exp^{-t/\tau}$$

- ✘ L'intensité $i(t)$ se déduit facilement :

$$i(t) = -C \frac{dU_c}{dt} = \frac{U_0}{R} \exp^{-t/\tau}$$

- ✘ La valeur maximale de i est donc atteinte pour $t = 0$:

$$I_{max} = \frac{U_0}{R} = 108 \text{ mA} > 75 \text{ mA}$$

- ✘ Pour provoquer la mort de l'adversaire, il faut qu'un courant d'au moins 75 mA soit maintenu pendant au moins 1 s : on cherche donc C telle que pour $t_f = 1 \text{ s}$, $i(t_f) = 75 \text{ mA}$.

$$\Rightarrow i_f = \frac{U_0}{R} \exp^{-t_f/\tau}$$

$$\tau = \frac{t_f}{\ln\left(\frac{U_0}{Ri_f}\right)}$$

- ✘ AN : On trouve

$$\tau = 2.7 \text{ s}$$

$$C = \frac{\tau}{R} = 27 \text{ nF}$$

- ✘ Commentaire : il faudrait méditer sur la faisabilité de la chose d'un point de vue énergétique. En effet, la puissance que Dark Sidious doit fournir pour produire son éclair est considérable :

$$P \approx \frac{\left(\frac{1}{2}CU_0^2\right)}{5\tau} \approx 65 \text{ kW}$$


(Pendant 13 s)

Cette valeur est tout simplement absurde.



Écrire : j'ai trouvé 27 nF n'est pas un commentaire.

3 Capteur micrométrique

1.  Pour ne pas se tromper, il faut faire un schéma et bien réfléchir : approfondir la question

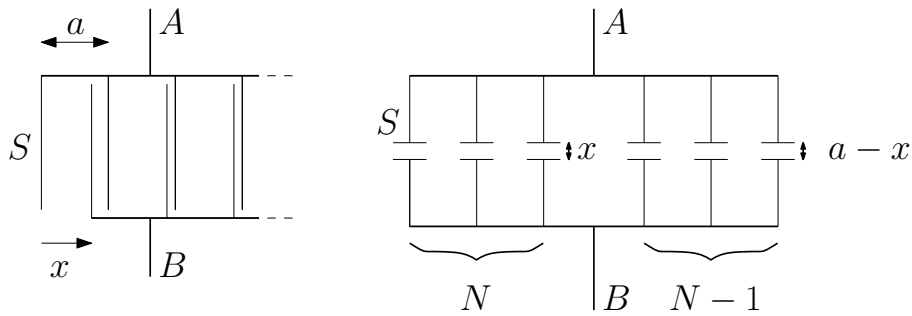


FIGURE 4

$$C = \sum_i C_i = N \left(\frac{\epsilon_0 S}{x} \right) + (N-1) \left(\frac{\epsilon_0 S}{a-x} \right)$$

$$N \gg 1 \Rightarrow C = \sum_i C_i = N \left(\frac{\epsilon_0 S}{x} \right) + N \left(\frac{\epsilon_0 S}{a-x} \right) = \frac{N \epsilon_0 S a}{x(a-x)} > 0$$

2. Si on trace C en fonction de x , on s'aperçoit que C est minimale pour $x = \frac{a}{2}$.

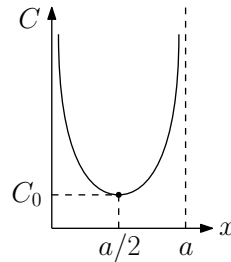


FIGURE 5

$$C_0 = \frac{4NS\epsilon_0}{a} = 17.6 \text{ nF}$$

3. ✘ Le coupe-bande doit proposer un gain égal à 1 à HF et BF et il doit présenter un gain nul pour une pulsation (que l'on notera ω_0)
 ✘ L'étude du comportement asymptotique de L et de C montre que L et C doivent obligatoirement être en parallèle.
 ✘ A la pulsation propre du circuit LC , le circuit LC parallèle a une impédance infinie (circuit bouchon) : il n'y a pas de courant dans le circuit.
 ✘ la seule solution possible est alors :

$$D_1 = C; D_2 = L; D_3 = R$$

Avec :

$$U_2 = \text{tension de sortie}$$

4. En prenant $L = 50 \text{ mH}$, on trouve :

$$f_0 = 5.4 \text{ kHz}$$

5. ✘ Après le choc :

$$C = C_1 = N \epsilon_0 S \left(\frac{1}{a/4} + \frac{1}{2a/4} \right) = \frac{4}{3} C_0 = 23.5 \text{ nF}$$

- ✘ La nouvelle fréquence coupée est :

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC_1}} = 4.7 \text{ kHz}$$

- ✘ Ainsi, après le choc, la tension U_2 est non nulle. Sachant que l'on a : $e_0 = 5 \text{ V}$ et que l'on veut $U_2 = 0.5 \text{ V}$, on doit donc avoir :

$$|\underline{H}(jf_0)| = \frac{1}{10}$$

✘ La fonction de transfert du coupe bande est de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_1}\right)^2}{1 + \frac{1}{Q}\left(\frac{j\omega}{\omega_1}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

Avec :

$$Q = RC_1\omega_1 = \frac{R}{L\omega_1}$$

✘ On doit donc avoir :

$$|\underline{H}(j\omega_0)| = \frac{1}{10} = \frac{|1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2|}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q\omega_1}\right)^2}}$$

D'où :

$$Q = 0.35$$

$$R = 5.0 \times 10^2 \Omega$$

6. Le dispositif permet de détecter un déplacement de l'ordre du micromètre : c'est du même ordre de grandeur que les déplacements mesurés avec un interféromètre de Michelson.

4 Tripleur de fréquence

1. Filtre passe-bande :

La forme canonique du transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On appelle H_0 le transfert maximum, ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité.

$\omega \ll \omega_0$:	$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{jH_0\omega}{Q\omega_0}$	$G_{dB}(\omega) \approx G_{dB1}(\omega)$ $= 20 \left[\log\left(\frac{ H_0 }{Q}\right) + \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right]$	$\arg \underline{H}(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$	+20dB/décade
$\omega \gg \omega_0$:	$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{-jH_0\omega_0}{Q\omega}$	$G_{dB}(\omega) \approx G_{dB2}(\omega)$ $= 20 \left[\log\left(\frac{ H_0 }{Q}\right) - \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right]$	$\arg \underline{H}(\omega) \approx \frac{-\pi}{2}$	-20dB/décade
$\omega = \omega_0$:	$\underline{H}(j\omega) = H_0$	$G_{dB} = 20 \log H_0 $	$\arg \underline{H}(\omega) = 0$ (si $H_0 > 0$) $= \pi$ (si $H_0 < 0$)	

D'où le diagramme asymptotique de Bode et le diagramme de Bode pour $Q \gg 1$:

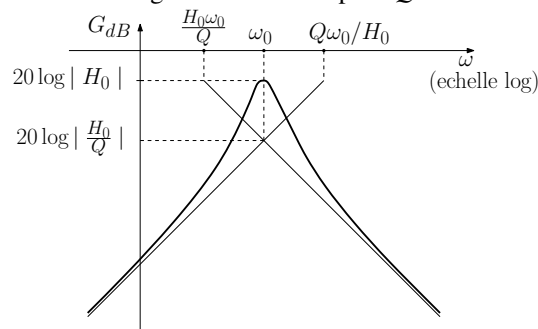


FIGURE 6 – Diagramme de Bode

On peut montrer que $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ où $\Delta\omega$ est la largeur de la bande passante à -3dB . Plus Q est élevé, plus sélectif est le filtre.

2. Filtre (F) : Appliquons la loi des nœuds (en terme de potentiel) en A :

$$\underline{V}_A = \frac{1}{\frac{1}{R''} + 2jC\omega} \left\{ \frac{u_e}{R''} + jC\omega [\underline{u}_s + \underline{V}_B] \right\} \quad [1]$$

et en B :

$$\underline{V}_B = \underline{\varepsilon} = \frac{u_s}{G} = \frac{jC\omega \underline{V}_A}{\frac{1}{R''} + jC\omega} \quad [2]$$

Injectons [1] dans [2] :

$$\left\{ \left[\frac{1}{R''} + jC\omega \right] \frac{1}{G} - [jC\omega]^2 \left\{ 1 + \frac{1}{G} \right\} \left[\frac{1}{\frac{1}{R''} + 2jC\omega} \right] \right\} \underline{u}_s = \frac{jC\omega u_e}{1 + 2jR''C\omega}$$

Que l'on met sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{R''C\sqrt{1-G}},$$

$$H_0 = \frac{G}{3}.$$

$$Q = \frac{\sqrt{1-G}}{3}.$$

3. Étude du montage (M) :



Question très mal traitée : manque de rigueur dans les conventions !

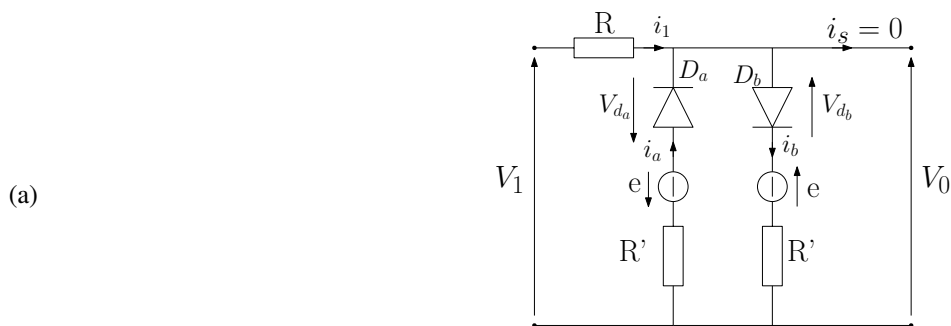


FIGURE 7

✘ Notons I_a et I_b les courants dans les diodes et les ddp V_{d_a} et V_{d_b} aux bornes des diodes comme en figure 1-centre.

✘ Les équations de base sont alors :

$$\begin{cases} V_0 = V_{d_b} + e + R' i_b \\ V_0 = -V_{d_a} - e - R' i_a \\ V_1 = R i_1 + V_0 \\ i_1 = -i_a + i_b. \end{cases}$$

✘ Compte tenu de sa valeur absolue très grande, la tension de claquage ne sera jamais dépassée par valeurs inférieures, on peut donc écrire :

— D_a bloquée

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_{d_a} < V_{d_0} \\ i_a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 > -(V_{d_0} + e) \\ i_a = 0 \end{cases}$$

— D_b bloquée :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_{d_b} < V_{d_0} \\ i_b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 < (V_{d_0} + e) \\ i_b = 0 \end{cases}$$

— D_a passante :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_{d_a} > V_{d_0} \\ i_a = \frac{V_{d_a} - V_{d_0}}{r_d} > 0. \end{cases}$$

— D_b passante :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_{d_b} > V_{d_0} \\ i_b = \frac{V_{d_b} - V_{d_0}}{r_d} > 0. \end{cases}$$

✘ Distinguons trois cas 2 à 2 exclusifs l'un de l'autre :

— D_a et D_b bloquées :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 \\ i_1 &= 0 \\ i_a &= i_b = 0 \\ -(e + V_{d_0}) &< V_1 < e + V_{d_0} \end{aligned}$$

— D_b bloquée et D_a passante :

$$\begin{aligned} V_1 &< -(e + V_{d_0}) \\ V_0 &< -(e + V_{d_0}) \\ -i_1 = i_a &= -\frac{[V_0 + V_{d_0} + e]}{R' + r_d} > 0 \\ V_0 - e &= V_{d_b} \\ V_{d_a} &= V_{d_0} + r_d i_a \\ V_{d_a} &= -(V_0 + e) - R' i_a \\ V_1 &= \left[\frac{R' + R + r_d}{R' + r_d} \right] V_0 + \left[\frac{R}{R' + r_d} \right] [e + V_{d_0}] \\ V_0 &= a V_1 - V_{m_0} \end{aligned}$$

— D_a bloquée et D_b passante

$$\begin{aligned} V_1 &> e + V_{d_0} \\ V_0 &> (e + V_{d_0}) \\ i_1 = i_b &= \frac{[V_0 - V_{d_0} - e]}{R' + r_d} > 0 \\ V_{d_b} &= V_0 - e - R' i_b \\ V_{d_b} &= V_{d_0} + r_d i_b \\ V_0 &= -(V_{d_a} + e) \end{aligned}$$

$$V_1 = V_0 \left[\frac{R' + R + r_d}{R' + r_d} \right] - \left[\frac{R}{R' + r_d} \right] [e + V_{d_0}]$$

$$V_0 = a V_1 + V_{m_0}$$

On a posé :

$$a = \frac{R' + r_d}{R' + r_d + R}$$

$$V_{m_0} = \frac{R[e + V_{d_0}]}{R' + R + r_d}$$

FIGURE 8 – Orientations du montage (gauche). Transfert de l'écrêteur (droite).

- ✘ Le graphe de transfert du montage (M) est donné ci-dessous. Le montage est un **écrêteur de tension** : Le montage écrête toute tension au niveau d'amplitude crête à crête $\pm V_{m_0}$, autrement dit, il limite donc l'amplitude de toute tension à ce niveau.

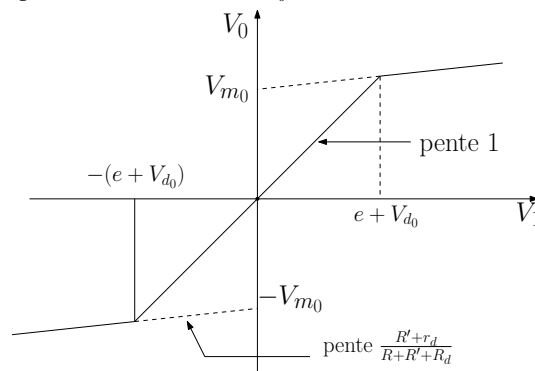


FIGURE 9

- ✘ Notons que si $R \gg R' + r_d$, alors la pente de $V_0 = f(V_1)$ pour $V_1 < -(e + V_{d_0})$ et $V_1 > e + V_{d_0}$ est quasi nulle et $V_{m_0} \simeq e + V_{d_0}$.

(b) La tension de sortie est finalement celle de l'énoncé.

4. Cette association peut permettre de réaliser un multiplicateur de fréquence.

À partir d'un signal sinusoïdal $V_1(t) = V_{m_1} \cos(\omega t)$, le montage (M) écrêteur donne un signal de sortie $V_0(t)$ de même pulsation ω , écrêté au niveau $\pm V_{m_0}$ et qui comporte, en plus du fondamental, des modes harmoniques de rangs impairs.

Si $V_{m_0} = \frac{V_{m_1}}{2}$ alors $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$. La décomposition en série de Fourier est $V_0(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + a_5 \cos(5\omega t)$ (tronquée au rang 5) avec :

$$a_1 = V_{m_0} \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) = 1.64 V_{m_0}$$

$$a_3 = -\frac{V_{m_0} \sqrt{3}}{2\pi} = -0.27 V_{m_0}$$

$$a_5 = \frac{V_{m_0} \sqrt{3}}{10\pi} = 0.05 V_{m_0}$$

Le filtre (F) passe-bande, (sélectif et de pulsation de résonance et de gain maximum accordables), permet de sélectionner le mode harmonique de pulsation 3ω (le mode de pulsation 5ω possède une amplitude trop faible et est trop entaché de bruit) et de l'amplifier.

On peut donc réaliser un **tripleur de fréquence** en accordant la pulsation de résonance de (F) sur 3ω (on peut ajuster C pour cela) et en adoptant un transfert maximum de $H_0 = \frac{G}{3} = -7.4$ (on peut ajuster $G = -22$ pour cela) pour restaurer en sortie une amplitude V_{m_1} .

AN : $3\omega = 180 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = \omega_0 = \frac{1}{R'C\sqrt{23}}$. Donc : $R'C = 1.16 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ et :

$$C = 11.6 \text{ nF}$$

5 Machine thermique à ballons d'hélium

1. ✘ Évolution de la pression dans une atmosphère isotherme.
— On considère l'équilibre d'une particule fluide, de masse volumique μ , dans le champ de pesanteur :

$$-\vec{\text{grad}}P d\tau - \mu g d\tau \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$$

- L'atmosphère étant assimilée à un gaz parfait, on a $\mu = \frac{PM}{RT}$, d'où :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT} g$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

- En intégrant entre l'altitude zéro ($P(0) = P_0$) et une altitude z quelconque, sachant que T est une constante, on obtient :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

- ✘ On note P_f la pression au niveau de la source froide : $P_f = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz_f}{RT_e}\right)$
- ✘ On note P_c la pression au niveau de la source chaude : $P_c = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz_c}{RT_e}\right)$



L'atmosphère n'est pas un fluide incompressible ! Ne pas utiliser l'invariant hydrostatique

2. ✘ On étudie le système : Hélium contenu dans un ballon et on repère sur la figure 10 les points caractéristiques d'évolution du système.

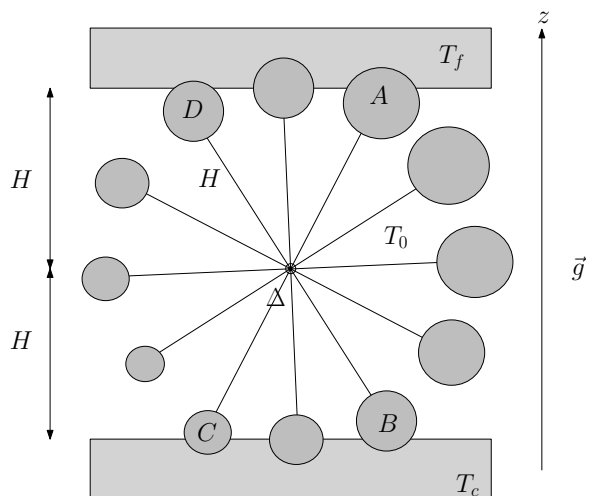


FIGURE 10

- ✘ Au point A, le système sort de la source froide en étant thermalisé : il est donc à la température T_f et à la pression P_f .
- ✘ L'évolution entre A et B est adiabatique quasistatique : on peut donc utiliser les lois de Laplace. Sachant que $P_B = P_c$, on obtient :

$$T_B = T_A \left(\frac{P_f}{P_c}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_A \exp\left(\frac{2(\gamma-1)MgH}{\gamma RT_e}\right)$$

- ✗ Entre B et C l'évolution est isobare, on a donc : $P_C = P_B = P_c$ et sachant qu'à la sortie de la source chaude, le système est thermalisé avec la source, on a : $T_C = T_c$. Le transfert thermique reçu lors du contact avec la source chaude est :

$$Q_c = \Delta H = C_p \Delta T = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} (T_c - T_B)$$

- ✗ L'évolution entre C et D est adiabatique quasistatique : on peut donc utiliser les lois de Laplace. Sachant que $P_D = P_f$, on obtient :

$$T_D = T_c \left(\frac{P_c}{P_f} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_c \exp \left(-\frac{2(\gamma-1)MgH}{\gamma RT_e} \right)$$

- ✗ Entre D et A l'évolution est isobare, on a donc :

$$Q_f = \Delta H = C_p \Delta T = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} (T_f - T_D)$$

- ✗ Le système effectuant des cycles de transformations, on a $\Delta U_{cycle} = 0 = W + Q$ avec $Q = Q_c + Q_f$.

- ✗ Le rendement de la machine est donc :

$$r = \frac{|W|}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f - T_D}{T_c - T_B}$$

Soit, en remplaçant T_B et T_D par leurs expressions :

$$r = 1 - \exp \left(-\frac{2(\gamma-1)MgH}{\gamma RT_e} \right) < 1$$



Il n'y a pas d'évolution isotherme lors du contact avec les sources : on ne peut pas utiliser les résultats sur le cycle de Carnot !

6 Un appartement sur la lune

1. COURS



L'énoncé ne demandait pas de démontrer les efficacités !

- ✗ Pour assurer une température constante dans l'habitat au cours d'un jour lunaire, il faut une machine réversible qui puisse fonctionner en climatiseur pendant le jour solaire et en PAC pendant la nuit. Sachant que les durées du jour et de la nuit sont égales, on va calculer la puissance du climatiseur et la puissance de la PAC et, en calculant la demi somme (moyenne), on aura directement la puissance moyenne à fournir pour maintenir l'habitat à température constante au cours d'un jour lunaire.

- ✗ Fonctionnement en climatiseur (le jour) :

— Le climatiseur fonctionne entre la source froide (habitable $T_{f1} = 20^\circ\text{C}$) et la source chaude (extérieur $T_{c1} = 120^\circ\text{C}$)

— La puissance reçue par la machine (fluide) est notée $\dot{W}_1 > 0$

— La puissance prélevée à la source froide (habitable) est : $\dot{Q}_{f1} > 0$. Cette puissance sert à compenser la puissance thermique entrant dans l'habitable :

$$\dot{Q}_{f1} = P_{th} = k(T_{ext} - T_{int}) = k(T_{c1} - T_{f1}) > 0 \quad (1)$$

— L'efficacité du climatiseur s'écrit :

$$e_1 = \frac{\dot{Q}_{f1}}{\dot{W}_1} = \frac{T_{f1}}{T_{c1} - T_{f1}} \quad (2)$$

— On en déduit :

$$\dot{W}_1 = \frac{k}{T_{f1}} (T_{c1} - T_{f1})^2 \quad (3)$$

— L'application numérique donne : $\dot{W}_1 = 17 \text{ kW}$

✘ Fonctionnement en PAC (La nuit) :

- La PAC fonctionne entre la source chaude (habitable $T_{c2} = 20^\circ\text{C}$) et la source froide (extérieur $T_{f2} = -170^\circ\text{C}$)
- La puissance reçue par la machine (fluide) est notée $\dot{W}_2 > 0$
- La puissance fournie à la source chaude (habitable) est : $\dot{Q}_{c2} < 0$. Cette puissance sert à compenser la puissance thermique sortant de l'habitable :

$$\dot{Q}_{c2} = P_{th} = k(T_{ext} - T_{int}) = k(T_{f2} - T_{c2}) < 0 \tag{4}$$

- L'efficacité du climatiseur s'écrit :

$$e_2 = \frac{-\dot{Q}_{c2}}{\dot{W}_2} = \frac{T_{c2}}{T_{c2} - T_{f2}} \tag{5}$$

- On en déduit :

$$\dot{W}_2 = \frac{k}{T_{c2}} (T_{c2} - T_{f2})^2 \tag{6}$$

- L'application numérique donne : $\dot{W}_2 = 62 \text{ kW}$

✘ On en déduit la puissance moyenne à fournir pour le fonctionnement de la machine :

$$\dot{W} = \frac{\dot{W}_1 + \dot{W}_2}{2} \tag{7}$$

- ✘ L'application numérique donne : $\dot{W} = 40 \text{ kW}$

- ✘ Cette valeur minimale peut être comparée à celle d'un radiateur, environ 2 kW (la nuit il faut au minimum 31 radiateurs!).

7 Geyser



Bien prendre le temps d'analyser la situation !

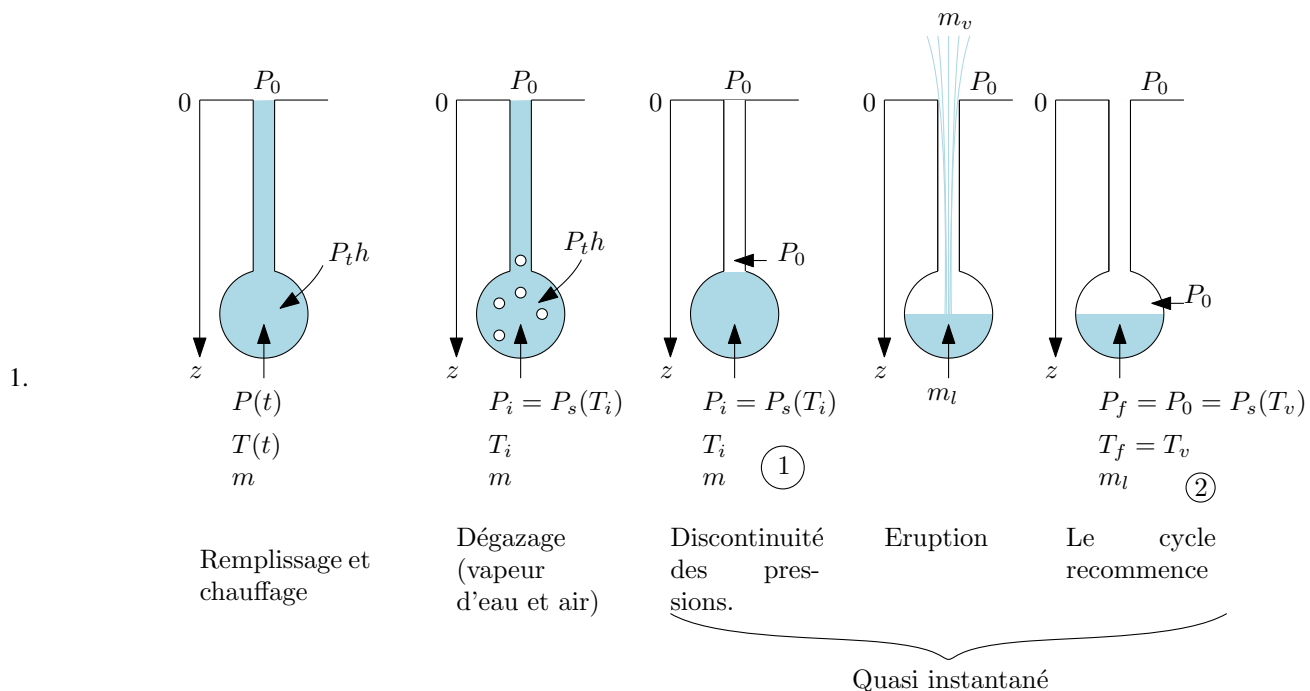


FIGURE 11 – Schéma de la situation et évolution

2. En raison de l'activité volcanique dans la région où se situe le geyser, la température augmente avec la profondeur. On suppose que l'eau contenue dans la cavité ainsi que dans le conduit est en équilibre thermique avec les roches environnantes. Autrement dit, on suppose que la température de l'eau augmente avec la profondeur.

La pression dans l'eau augmente aussi avec la profondeur, si on considère que l'eau est à l'équilibre hydrostatique, avant que l'eau ne soit expulsée. On en déduit que la pression dans l'eau est une fonction croissante de la température. C'est cette loi qu'on va rechercher dans un premier temps.

On note T_0 , la température au sol en $z = 0$. Le champ de température est le suivant : $T(z) = T_0 + az$, avec $a = 1 \text{ K}\cdot\text{m}^{-1}$.



Attention à l'homogénéité ! ne pas écrire $T_0 + z$

3. On élimine la profondeur z :

$$p(T) = p_0 + \frac{\mu g}{a} (T - T_0) .$$

4. On trace cette relation affine sur le même graphe que celui qui donne la pression d'équilibre liquide/vapeur P_{sat} en fonction de la température T . On prend $T_0 = 293 \text{ K}$.

Lorsque $P(T) > P_{\text{sat}}(T)$, la phase liquide est la plus stable. Pour $P(T) < P_{\text{sat}}(T)$, la phase vapeur est la plus stable. La lecture du graphe ci-dessus montre que l'eau se vaporise à une température voisine de $T_1 = 483 \text{ K}$. Cette température correspond à une profondeur égale à $h = (T_1 - T_0)/a$, soit $h = 190 \text{ m}$.

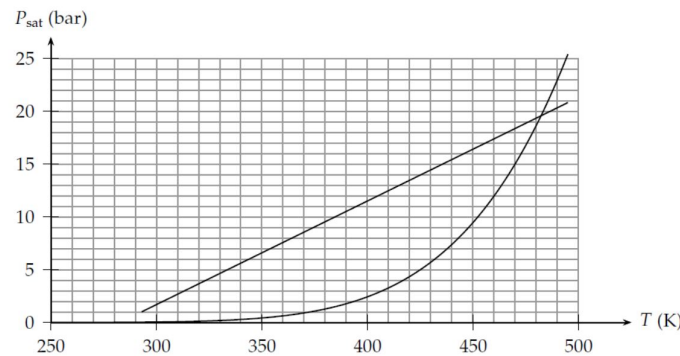


FIGURE 12 – Détermination graphique de la profondeur

5. À la fin d'un cycle, la cavité se remplit d'eau froide. Celle-ci est chauffée par les roches environnantes jusqu'à ce que l'ébullition se produise. Dans la cavité, l'eau est dans un état diphasé (mélange liquide/vapeur). Il règne alors une pression plus importante dans la cavité qu'à l'extérieur. Cette différence de pression permet l'éruption du geyser. L'éjection de la vapeur d'eau s'interrompt lorsque la pression dans la cavité est égale à la pression extérieure, soit 1 atm. À ce moment là, la température de l'eau dans la cavité est de 100°C . Pendant l'éruption, l'eau contenue dans la cavité s'est refroidie. On note m_l la masse d'eau liquide contenue dans la cavité et m_v la masse d'eau éjectée sous forme de vapeur. Appliquons le premier principe à l'ensemble {eau liquide + vapeur d'eau}, qui subit une transformation que l'on suppose adiabatique et sans travail utile :

$$mc\Delta T + m_v l_v = 0 .$$

On en déduit, sachant que $\Delta T = T_v - T_i = -119 \text{ K}$:

$$m = m_v \frac{l_v}{-c\Delta T} = 215 \times 10^3 \text{ kg}$$

Et donc :

$$m_l = 171 \times 10^3 \text{ kg}$$

6. Cela correspond à un volume de 171 m^3 .