

Correction TP - Câble coaxial

1 Propagation d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial

1.1 Première modélisation du câble

Le modèle des constantes réparties s'applique aux lignes de manière générale : au câble coaxial et aux lignes bifilaires. On note L l'impédance par unité de longueur de la ligne et C la capacité par unité de longueur de la ligne.

Les différentes lignes ont été coupées à la même longueur l avec :

$$l = 100 \text{ m}$$

$$u_l = 1 \text{ m}$$

1.2 Équation de propagation dans un câble fermé sur une résistance de charge R_u

1. Pour un **câble coaxial (RG58-RG59)** dont l'âme à un rayon a , la gaine un rayon b :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La vitesse de propagation vaut donc :

$$V = V_\phi = V_g = \frac{1}{LC} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

avec : $n = \sqrt{\epsilon_r}$

L'impédance caractéristique vaut donc :

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Les câbles coaxiaux de ce TP ont des impédances caractéristiques de l'ordre de 50Ω et 75Ω

2. Pour une **ligne bifilaire** constituée de deux fils de diamètre d , distants de D :

$$C = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)}$$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)$$

La vitesse de propagation vaut donc :

$$V = V_\phi = V_g = \frac{1}{LC} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

L'impédance caractéristique vaut donc :

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} \ln\left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)$$

Les lignes bifilaires de ce TP ont des impédances caractéristiques de l'ordre de 100Ω

1.3 Caractéristiques du câble

1.3.1 Première méthode

1. Mesure de L

Pour mesurer L , on court-circuite la ligne et on mesure l'inductance équivalente comme indiqué figure 1.

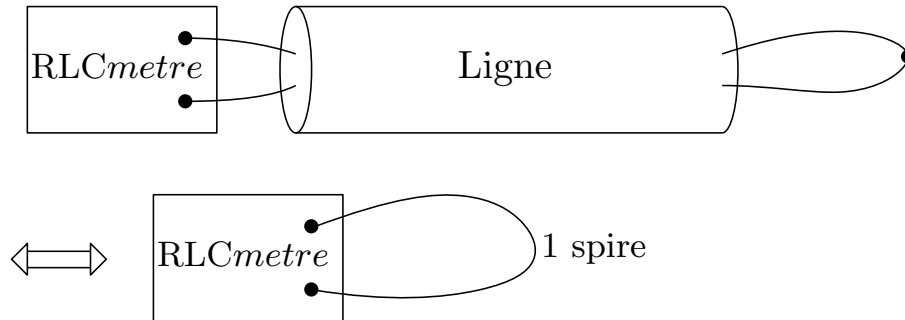


Figure 1 – Mesure de l'inductance équivalente de la ligne

La valeur affichée par le RLCmetre¹ est notée $L_{tot,lue}$ et son incertitude est $u_{L_{tot}} = A\%L_{tot,lue} + BDgt$. On en déduit :

$$L = \frac{L_{tot,lue}}{l}$$

$$\frac{u_L}{L} = \sqrt{\left(\frac{u_{L_{tot,lue}}}{L_{tot,lue}}\right)^2 + \left(\frac{u_l}{l}\right)^2}$$

Exemples :

✕ Pour un câble coaxial :

$$L_{tot,lue} = 33.72 \mu\text{H}$$

et

$$u_{L_{tot}} = 0.01 \mu\text{H}$$

On trouve :

$$L = 0.3372 \mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$$

et

$$u_L = 0.00015 \mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$$

On obtient :

$$L = 0.337 \pm 0.003 \mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$$

✕ Pour une ligne bifilaire :

$$L_{tot,lue} = 0.6702 \mu\text{H}$$

et

$$u_{L_{tot}} = 0.023 \mu\text{H}$$

On trouve :

$$L = 6.702 \text{ nH}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$u_L = 0.26 \text{ nH}\cdot\text{m}^{-1}$$

On obtient :

$$L = 6.70 \pm 0.46 \text{ nH}\cdot\text{m}^{-1}$$

1. On choisit la fréquence de mesure la plus proche de la fréquence de travail : 100 kHz

2. Mesure de C

Pour mesurer C , on laisse le bout de la ligne en circuit ouvert et on mesure la capacité équivalente comme indiqué figure 2.

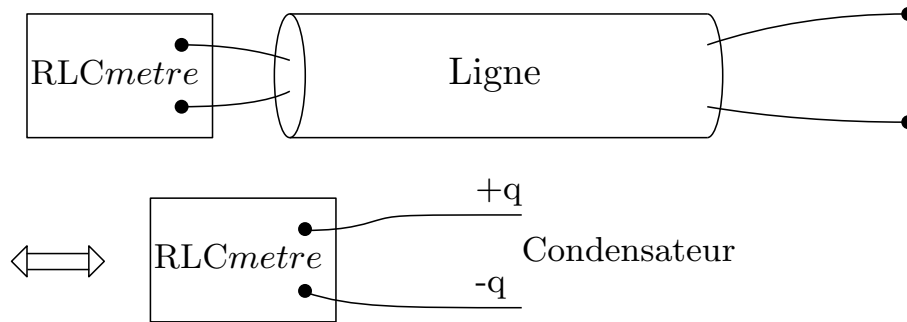


Figure 2 – Mesure de la capacité équivalente de la ligne

La valeur affichée par le RLCmetre² est notée C_{tot} et son incertitude est $u_{C_{tot}} = A\%C_{tot,lue} + BDgt.$. On en déduit :

$$C = \frac{C_{tot}}{l}$$

$$\frac{u_C}{C} = \sqrt{\left(\frac{u_{C_{tot,lue}}}{C_{tot,lue}}\right)^2 + \left(\frac{u_l}{l}\right)^2}$$

Exemples :

✕ Pour un câble coaxial :

$$C_{tot,lue} = 9.730 \text{ nF}$$

et

$$u_{C_{tot}} = 2.3 \times 10^{-2} \text{ nF}$$

On trouve :

$$C = 9.730 \times 10^{-2} \text{ nF} \cdot \text{m}^{-1}$$

et

$$u_C = 1.1 \times 10^{-3} \text{ nF} \cdot \text{m}^{-1}$$

. En ne gardant que trois chiffres significatifs, on obtient :

$$c = 9.73 \pm 0.02 \text{ nF} \cdot \text{m}^{-1}$$

✕ Pour une ligne bifilaire :

$$C_{tot,lue} = 6.311 \text{ nF}$$

et

$$u_{C_{tot}} = 0.42 \text{ nF}$$

On trouve :

$$C = 6.311 \times 10^{-2} \text{ nF} \cdot \text{m}^{-1}$$

et

$$u_C = 0.60 \times 10^{-2} \text{ nF} \cdot \text{m}^{-1}$$

En ne gardant que trois chiffres significatifs, on obtient :

$$C = 6.31 \pm 1.20 \text{ nF} \cdot \text{m}^{-1}$$

2. On choisit la fréquence de mesure la plus proche de la fréquence de travail : 100 kHz

3. Détermination de V

$$V = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{u_V}{V} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_C}{C}\right)^2}$$

On en déduit :

✕ Pour le câble coaxial :

$$V = 1.75 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

et

$$u_V = 0.07 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

d'où :

$$V = 1.75 \pm 0.14 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

✕ Pour la ligne bifilaire :

$$V = 1.52 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

et

$$u_V = 0.23 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

d'où :

$$V = 1.52 \pm 0.46 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

4. Détermination de R_c

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\frac{u_{R_c}}{R_c} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_C}{C}\right)^2}$$

On en déduit :

✕ Pour le câble coaxial :

$$R_c = 58.2 \Omega$$

et

$$u_{R_c} = 2.4 \Omega$$

d'où :

$$R_c = 58,2 \pm 4,8 \Omega$$

✕ Pour la ligne bifilaire :

$$R_c = 103 \Omega$$

et

$$u_{R_c} = 5 \Omega$$

d'où :

$$R_c = 103 \pm 10 \Omega$$

5. Récapitulatif :

$$L = 6.70 \pm 0.46 \text{ nH} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$C = 6.31 \pm 1.20 \text{ nF} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$V = 1.52 \pm 0.46 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$R_c = 103 \pm 10 \Omega$$



Attention : toujours afficher le résultat sous la forme $X = X_m \pm \Delta X$ et ADAPTER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS!!



Validation : comparer aux valeurs de la documentation constructeur en calculant un Z-score

Par exemple ici :

✗ L'impédance caractéristique du câble est notée sur celui-ci, on l'utilise pour calculer un Z-score :

$$Z = \frac{R_{c,mesure} - R_{c,attendue}}{uR_c}$$

✗ Dans l'énoncé, il est précisé que l'isolant utilisé dans le câble est du PE ($\varepsilon_r = 2.2 - 2.4$), on peut donc calculer une Z-score :

$$Z = \frac{V_{mesure} - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}}{u_V}$$

1.3.2 Deuxième méthode

1. Câble coaxial - Propagation des incertitudes

Les distances caractéristiques du câble ont été mesurées :

$$a = 0.90 \text{ mm et } u_a = 0.05 \text{ mm}$$

$$b = 2.95 \text{ mm et } u_b = 0.12 \text{ mm}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \\ \Rightarrow \frac{dC}{C} &= -\frac{d\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = -\frac{\frac{d\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{b}{a}}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = -\frac{\frac{db}{a} - \frac{bda}{a^2}}{\frac{b}{a} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = -\frac{\frac{db}{b} - \frac{da}{a}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \\ \Rightarrow \frac{u_C}{C} &= \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \sqrt{\left(\frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{u_a}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

De la même manière :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{u_L}{L} = \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \sqrt{\left(\frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{u_a}{a}\right)^2}$$

On en déduit, avec les valeurs précédentes :

$$C = 1.03 \times 10^{-1} \text{ nF}\cdot\text{m}^{-1} \text{ et } u_C = 0.06 \times 10^{-1} \text{ nF}$$

$$L = 2.37 \times 10^{-1} \mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1} \text{ et } u_L = 0.13 \times 10^{-1} \mu\text{H}$$

$$V = 2.02 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ et } u_V = 0.30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$R_c = 48.0 \Omega \text{ et } u_{R_c} = 3.9 \Omega$$

Soit :

$$C = 1.03 \pm 0.12 \times 10^{-1} \text{ nF}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$L = 2.37 \pm 0.26 \times 10^{-1} \mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$V = 2.02 \pm 0.60 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$R_c = 48.0 \pm 7.8 \Omega$$

2. Câble coaxial - Monté Carlo

Attention, le produit $L_1 C_1$ étant indépendant de a et b , on trouve une incertitude absurde pour V avec la méthode de Monté Carlo : il faut introduire une incertitude sur ε_r pour estimer l'incertitude de V avec cette méthode. Le diélectrique utilisé dans les câbles et les lignes et du PE de différentes densité, on prendra donc :

$$\varepsilon_r = 2.3$$

$$u_{\varepsilon_r} = 0.1$$

Le code utilisé est donné en annexe et les résultats sont les suivants :

```
L1m= 2.3746970517e-07
uL1m= 1.38900622812e-08
C1m= 1.08141355419e-10
uC1m= 7.90211275552e-12
Vm= 197813360.322
uVm= 4356663.40512
Rcm= 46.9740725521
uRcm= 2.92772227279
```

Figure 3 – Résultat pour le câble coaxial par la méthode Monté Carlo

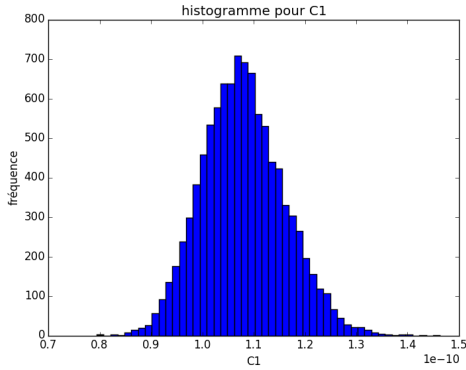
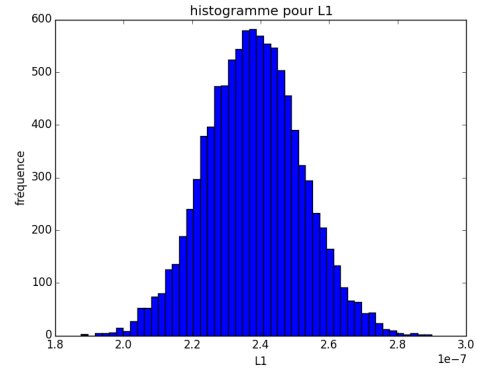
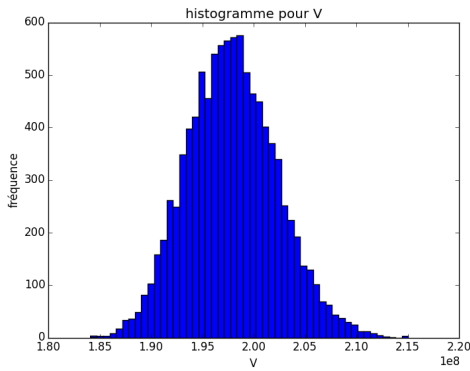
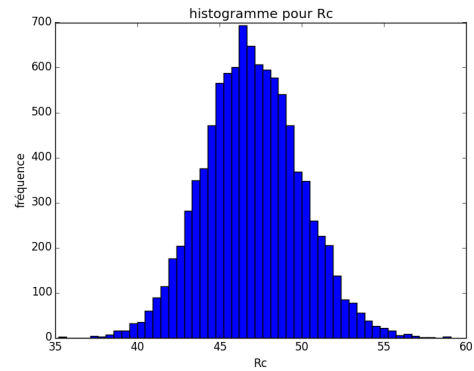
D'où :

$$L = 2.37 \pm 0.14 \times 10^{-1} \mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$C = 1.08 \pm 0.08 \times 10^{-1} \text{ nF}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$V = 1.98 \pm 0.04 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$R_c = 47.0 \pm 2.9 \Omega$$

Figure 4 – Histogramme pour C_1 Figure 5 – Histogramme pour L_1 Figure 6 – Histogramme pour V Figure 7 – Histogramme pour R_c

3. Ligne bifilaire

Les distances caractéristiques ont été mesurées :

$$d = 1.1 \text{ mm et } u_d = 0.1 \text{ mm}$$

$$D = 2.25 \text{ mm et } u_D = 0.1 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_r = 2.2$$

On en déduit :

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d} \right)^2 - 1} \right)}$$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{R}{d} \right)^2 - 1} \right)$$

Posons :

$$\alpha = \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d} \right)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow d\alpha = d\left(\frac{D}{d}\right) + \frac{1}{2} \frac{2d\left(\frac{D}{d}\right) \times \frac{D}{d}}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}$$

Avec :

$$d\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{dD}{d} - \frac{Ddd}{d^2}$$

D'où :

$$u_\alpha = \left(1 + \frac{\frac{D}{d}}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}\right) \sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_d}{d}\right)^2}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{C} &= -\frac{dL}{L} = -\frac{d(\ln \alpha)}{\ln \alpha} = -\frac{d\alpha}{\alpha \ln \alpha} \\ \Rightarrow \frac{u_C}{C} &= \frac{u_L}{L} = \frac{u_\alpha}{\alpha \ln \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right) \ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)} \left(1 + \frac{\frac{D}{d}}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}\right) \sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_d}{d}\right)^2} \\ \Rightarrow \frac{u_C}{C} &= \frac{\sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_d}{d}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \times \ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)} \end{aligned}$$

On en déduit, avec les valeurs précédentes :

$$C = 45.6 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } u_C = 1.2 \text{ pF}$$

$$L = 0.537 \text{ } \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } u_L = 0.18 \text{ } \mu\text{H}$$

$$V = 2.02 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } u_V = 0.30 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$R_c = 109 \Omega \text{ et } u_{R_c} = 20 \Omega$$

$$C = 45.6 \pm 2.4 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$L = 0.537 \pm 0.36 \text{ } \mu\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$V = 2.02 \pm 0.60 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$R_c = 109 \pm 40 \Omega$$



Attention : toujours afficher le résultat sous la forme $X = X_m \pm \Delta X$ et ADAPTER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS!!



Validation : comparer aux valeurs de la documentation constructeur en calculant un Z-score

Par exemple ici :

✕ L'impédance caractéristique du câble est notée sur celui-ci, on l'utilise pour calculer un Z-score :

$$Z = \frac{R_{c,mesure} - R_{c,attendue}}{u_{R_c}}$$

1.4 Conditions limites et réflexion

Théorie : Coefficients de réflexion en tension (r_v) et en courant (r_i) en bout de ligne ($z = 0$)

✕ Onde incidente :

$$\underline{i}_i(z, t) = I_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\underline{u}_i(z, t) = R_c I_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

✕ Onde réfléchi :

$$\underline{i}_r(z, t) = r_i I_0 e^{j(\omega t + kz)}$$

$$\underline{u}_r(z, t) = r_v R_c I_0 e^{j(\omega t + kz)} = -R_c r_i I_0 e^{j(\omega t + kz)} \Rightarrow r_v = -r_i$$

✕ Condition limite :

$$\underline{u}_i(0, t) + \underline{u}_r(0, t) = R_u (\underline{i}_i(0, t) + \underline{i}_r(0, t))$$

$$\Rightarrow R_c I_0 - R_c r_i I_0 = R_u (I_0 + r_i I_0)$$

$$\Rightarrow r_i = \frac{R_c - R_u}{R_c + R_u}$$

$$\Rightarrow r_v = \frac{R_u - R_c}{R_c + R_u}$$

$\Rightarrow$ Le coefficient de réflexion donné dans l'énoncé est bien le coefficient de réflexion en tension.

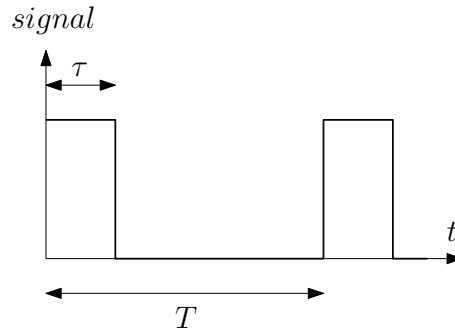
✕ Étude des différents cas :

- ☛ Cas où $R_u = 0$ (court-circuit en bout de ligne) : $r_v = -1$ et $r_i = 1$: on est dans le cas d'une réflexion totale.
- ☛ Cas où $R_u = \infty$ (circuit ouvert en bout de ligne) : $r_v = 1$ et $r_i = -1$: on est dans le cas d'une réflexion totale.
- ☛ Cas où $R_u = R_c$ (adaptation en bout de ligne) : $r_v = r_i = 0$: Il n'y a pas de réflexion.

2 Étude expérimentale

2.1 Générateur d'impulsion

Le rapport cyclique pour un signal rectangulaire, noté α , est défini comme étant le rapport entre la durée du temps haut (τ) du signal et sa période (T).

Figure 8 – Rapport cyclique $\alpha = \tau/T$

2.2 Adaptation d'impédance

2.2.1 Premier cas : pas d'adaptation

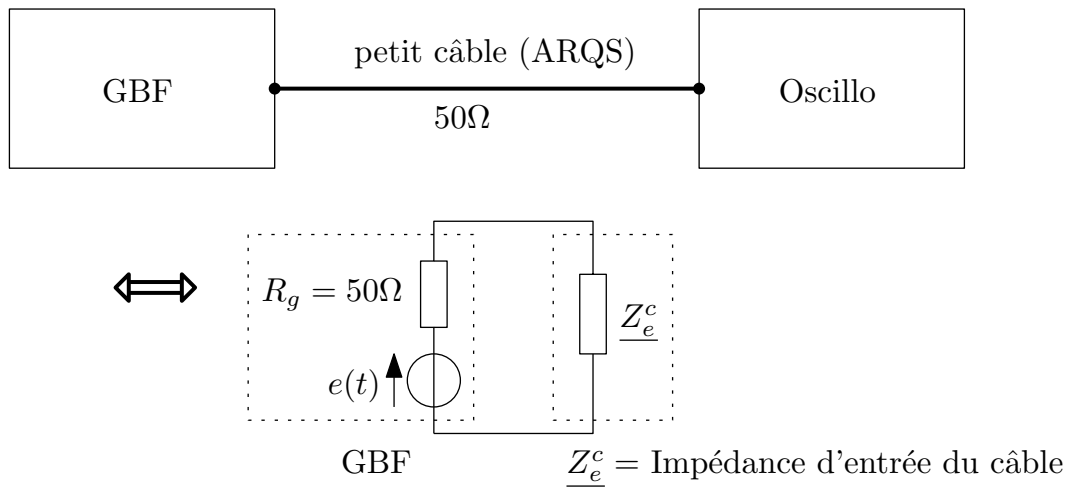


Figure 9 – Montage sans adaptation

L'impédance d'entrée du câble³ (longueur ≈ 1 m) vérifie :

$$\underline{Z}_e^c = R_c \left(\frac{\underline{Z}_u + jR_c \tan(kl)}{R_c + j\underline{Z}_u \tan(kl)} \right)$$

Où :

- ✗ $\underline{Z}_u$ est l'impédance en bout de câble, ici il s'agit de l'impédance d'entrée de l'oscilloscope, en mode (DC), on la note $\underline{Z}_e$:

$$\underline{Z}_e = R_e \parallel C_e = \frac{R_e}{1 + jR_e C_e \omega}$$

Avec $R_e \approx 1 \text{ M}\Omega$ et $C_e \approx 20 \text{ pF}$ (DC)

- ✗ $kl = \frac{\omega l}{V}$

En sachant que la fréquence des impulsions est $f = 500 \text{ kHz}$ (et en comptant les 100 premiers harmoniques⁴, on arrive à une pulsation de l'ordre de :

$$\omega \approx 3 \times 10^8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

D'où :

3. Voir TD

4. Pour un signal créneau de rapport cyclique α , les nombre d'harmoniques à prendre en compte est de l'ordre de $1/\alpha$ (annulation d'un sinus cardinal), ici sachant que α est de l'ordre du %, il faut considérer les 100 premiers harmoniques

✗ $C_e \omega \approx 10^{-4} \ll R_e$, on en déduit : $\underline{Z}_e = R_e$

✗ $kl = \frac{\omega l n}{c} \approx 1.5$

Ainsi :

$$\underline{Z}_e^c = R_c \left(\frac{R_e + jR_c \tan\left(\frac{\omega l n}{c}\right)}{R_c + jR_e \tan\left(\frac{\omega l n}{c}\right)} \right)$$

⇒ Cette impédance est complexe, d'où l'apparition d'oscillations quand on observe $u(t)$ à l'oscilloscope.

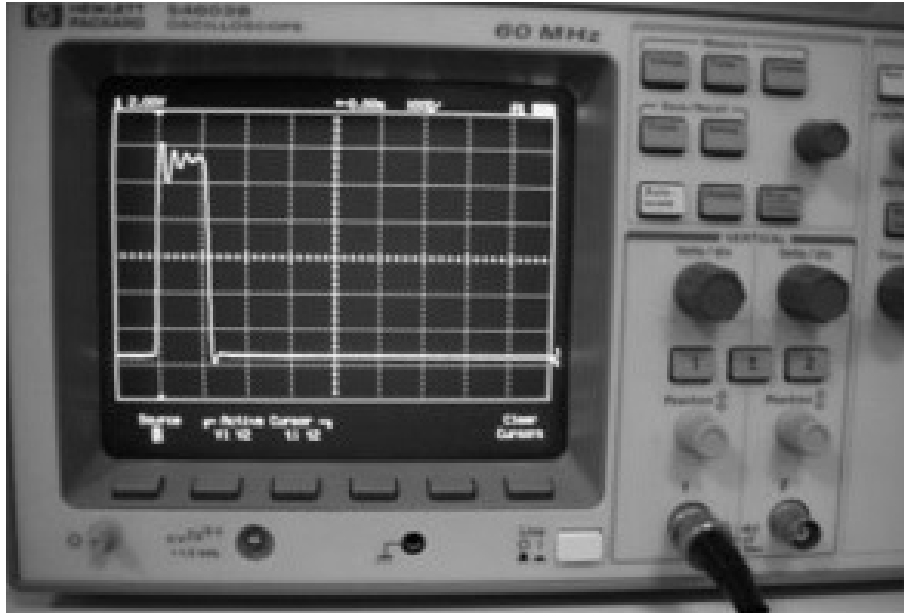


Figure 10 – Montage sans adaptation : apparition d'oscillations

2.2.2 Deuxième cas : adaptation

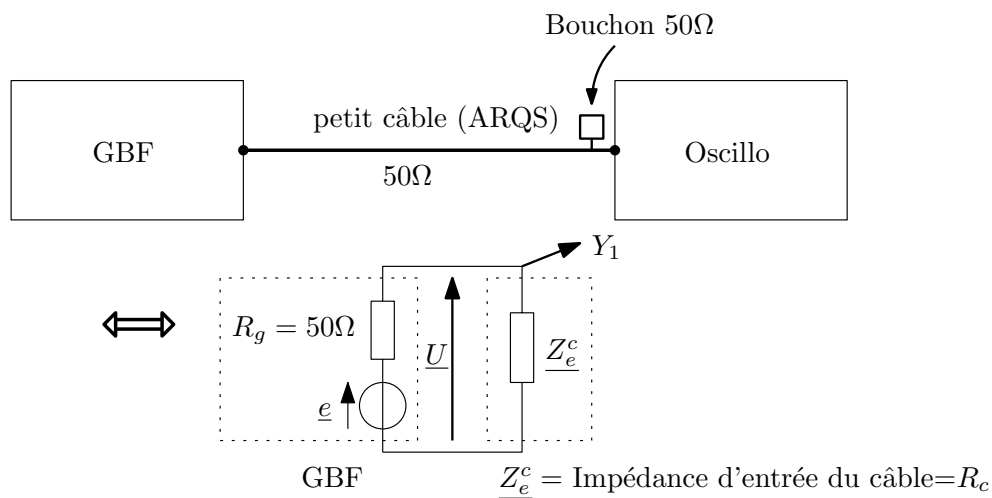


Figure 11 – Montage avec adaptation

On fixe un bouchon de $50\ \Omega$ à l'entrée de l'oscilloscope :

$$\underline{Z}_e = R_c = R_g = 50\ \Omega$$

L'impédance $\underline{Z}_e^c$ vaut alors :

$$\underline{Z}_e^c = R_c \left(\frac{R_c + jR_c \tan(kl)}{R_c + jR_c \tan(kl)} \right) = R_c$$

$$\Rightarrow u(t) = e(t)/2$$

les oscillations disparaissent, par contre l'amplitude du signal est divisé par deux.

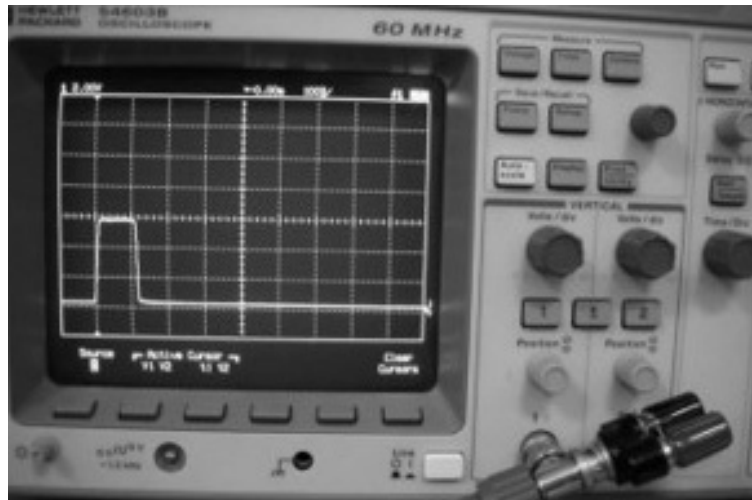


Figure 12 – Montage avec adaptation : disparition des oscillations, amplitude divisée par 2

2.3 Vitesse de propagation d'une impulsion dans le câble

On effectue le montage suivant afin de mesurer la vitesse de propagation de l'onde dans la ligne :

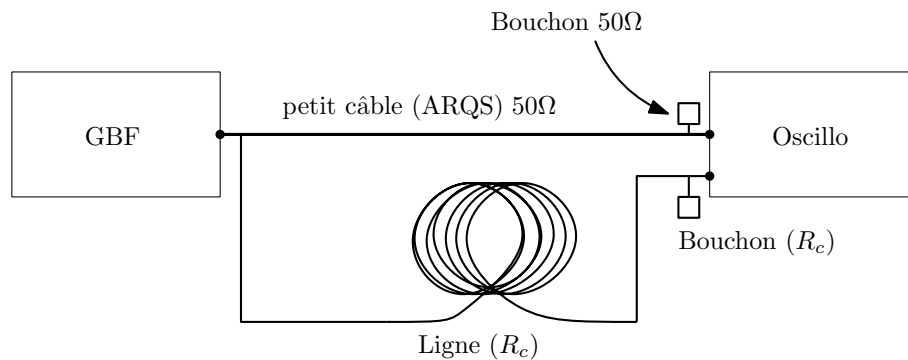


Figure 13 – Montage pour mesurer la vitesse

Les deux extrémités des deux câbles étant adaptées, il n'y a pas de signaux réfléchis : ni au niveau du câble reliant le GBF et l'oscilloscope ni à l'extrémité de la ligne de 100 m.

On observe les chronogrammes ci-dessous (cas du câble coaxial) :

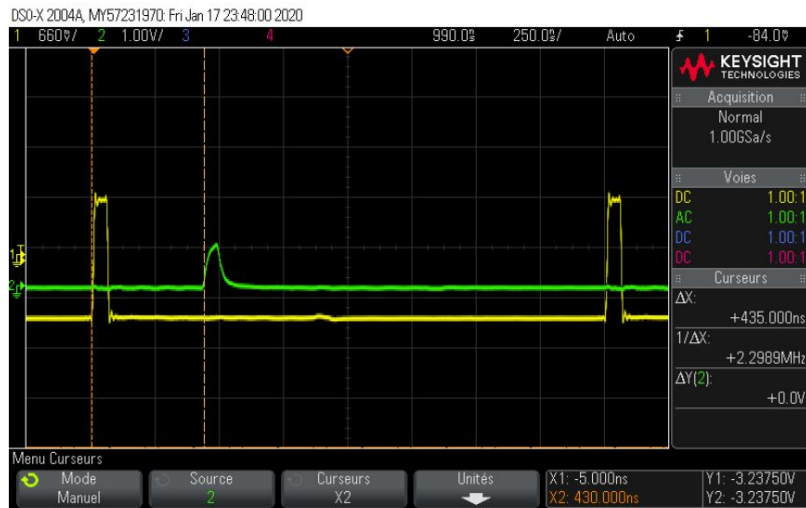


Figure 14 – En jaune : la voie 1 - En vert : la voie 2

A l'aide des curseurs, que l'on positionne au début de chaque impulsion, on mesure le temps séparant l'arrivée des deux signaux à l'oscilloscope et on estime son incertitude par encadrement :

$$\Delta t_{min} = 435.0 \text{ ns et } \Delta t_{max} = 437.0 \text{ ns}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{max} + \Delta t_{min}}{2} = 436.0 \text{ ns}$$

$$u_{\Delta t} = \frac{\Delta t_{max} - \Delta t_{min}}{2\sqrt{3}} = 0.6 \text{ ns}$$

On en déduit :

$$V = \frac{l}{\Delta t} = 2.32 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\frac{u_V}{V} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{u_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2} = 0.02 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Soit :

$$V = 2.32 \pm 0.04 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$



Attention : toujours afficher le résultat sous la forme $X = X_m \pm \Delta X$ et ADAPTER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS!!



Validation : comparer la valeur de V à celle prévue par notre modèle : c/n et calculer un Z-score

2.4 Réflexion en bout de câble

2.4.1 Premier cas : sortie ouverte

On effectue le montage suivant :

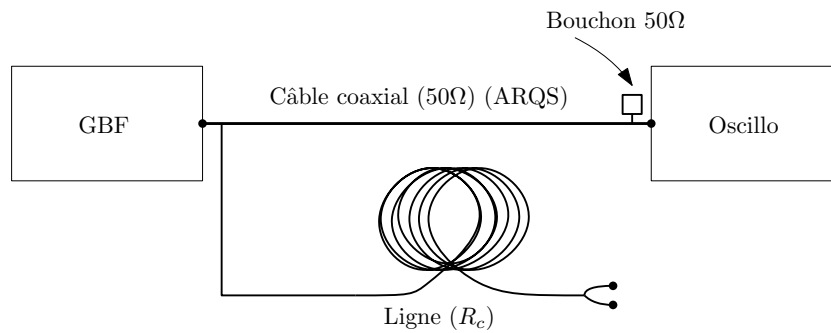


Figure 15 – Montage en sortie ouverte

Le chronogramme obtenu est donné figure 17

Interprétation (voir figure 16)

- ✗ Le GBF envoie une impulsion (1) dans les deux câbles.
- ✗ L'impulsion (1) arrivant à l'oscilloscope n'est pas réfléchiée car il y a adaptation.
- ✗ l'impulsion (1) arrivant en bout de ligne est réfléchiée avec un coefficient de réflexion égal à 1 ($r = 1$ car $R_u = \infty$) : l'onde réfléchiée est donc une impulsion (2) de même signe que l'impulsion (1) - En rouge sur la figure 16.
- ✗ L'impulsion (2) arrivant au niveau du GBF est à la fois transmise (impulsion $(2)_t$ en rouge, de même signe) et réfléchiée (impulsion $(2)_r$ en vert) . Le signal $(2)_r$ est de signe opposée au signal incident (2) car l'extrémité de la ligne est connectée, au niveau du GBF, à une impédance équivalente égale à R_g (impédance d'entrée du GBF) en parallèle avec R_g (impédance caractéristique du petit câble coax), et donc égale à $R_g/2$. Cette résistance étant inférieure à R_c , le coefficient de réflexion est négatif.
- ✗ L'impulsion $(2)_t$ arrivant sur l'oscilloscope n'est pas réfléchiée car il y a adaptation.
- ✗ L'impulsion $(2)_r$ arrivant en bout de ligne se réfléchiée, à nouveau sans changement de signe et donne l'impulsion (3) (en bleu sur le schéma) : Cette impulsion est transmise au niveau du GBF sans changement de signe pour donner l'impulsion $(3)_t$ qui arrive alors à l'oscilloscope sans être réfléchiée.
- ✗ On pourrait continuer en considérant l'impulsion $(3)_r$...

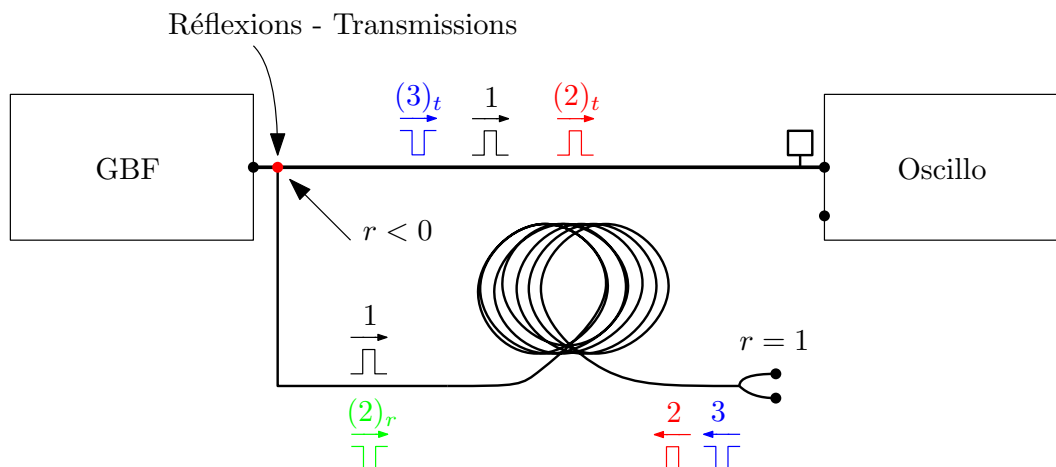


Figure 16 – Montage en sortie ouverte : interprétation

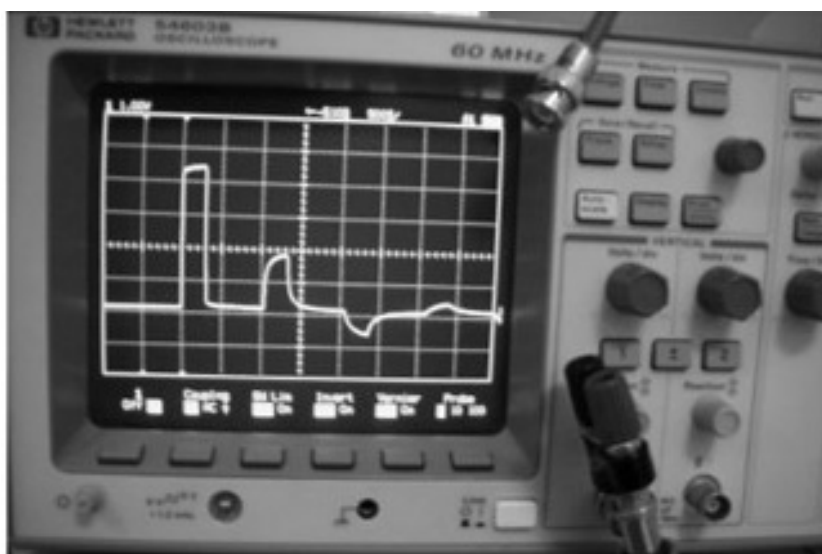


Figure 17 – Montage en sortie ouverte : chronogramme

Notons que l'on pourrait utiliser ce chronogramme pour déterminer la vitesse de propagation des impulsions dans le câble (et donc la vitesse de groupe, égale à la vitesse de phase) : chaque impulsion, en dehors de l'impulsion (1), a en effet parcourue une distance $2l$ en plus, par rapport à l'impulsion précédente.

2.4.2 Deuxième cas : Sortie fermée

On effectue le montage suivant :

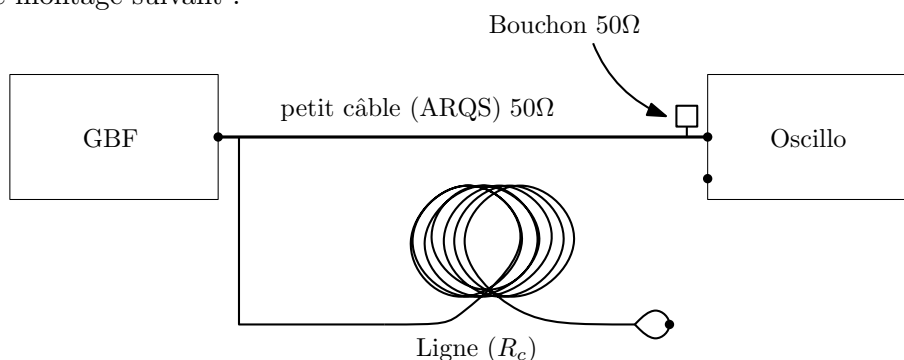


Figure 18 – Montage en sortie fermée

Le chronogramme obtenu est donné figure 20

Interprétation (voir figure 19)

- ✗ Le GBF envoie une impulsion (1) dans les deux câbles.
- ✗ L'impulsion (1) arrivant à l'oscilloscope n'est pas réfléchi car il y a adaptation.
- ✗ l'impulsion (1) arrivant en bout de ligne est réfléchi avec un coefficient de réflexion égal à -1 ($r = -1$ car $R_u = 0$) : l'onde réfléchi est donc une impulsion (2) de signe opposée à l'impulsion (1) - En rouge sur la figure 19.
- ✗ L'impulsion (2) arrivant au niveau du GBF est à la fois transmise (impulsion $(2)_t$ en rouge, de même signe) et réfléchi (impulsion $(2)_r$ en vert) . Le signal $(2)_r$ est de signe opposée au signal incident (2) car l'extrémité de la ligne est connectée, au niveau du GBF, à une impédance équivalente égale à R_g (impédance d'entrée du GBF) en parallèle avec R_g (impédance caractéristique du petit câble coax), et donc égale à $R_g/2$. Cette résistance étant inférieure à R_c , le coefficient de réflexion est négatif.

- ✗ L'impulsion $(2)_t$ arrivant sur l'oscilloscope n'est pas réfléchiée car il y a adaptation.
- ✗ L'impulsion $(2)_r$ arrivant en bout de ligne se réfléchiée, à nouveau avec changement de signe et donne l'impulsion (3) (en bleu sur le schéma) : Cette impulsion est transmise au niveau du GBF sans changement de signe pour donner l'impulsion $(3)_t$ qui arrive alors à l'oscilloscope sans être réfléchiée.
- ✗ On pourrait continuer en considérant l'impulsion $(3)_r$...

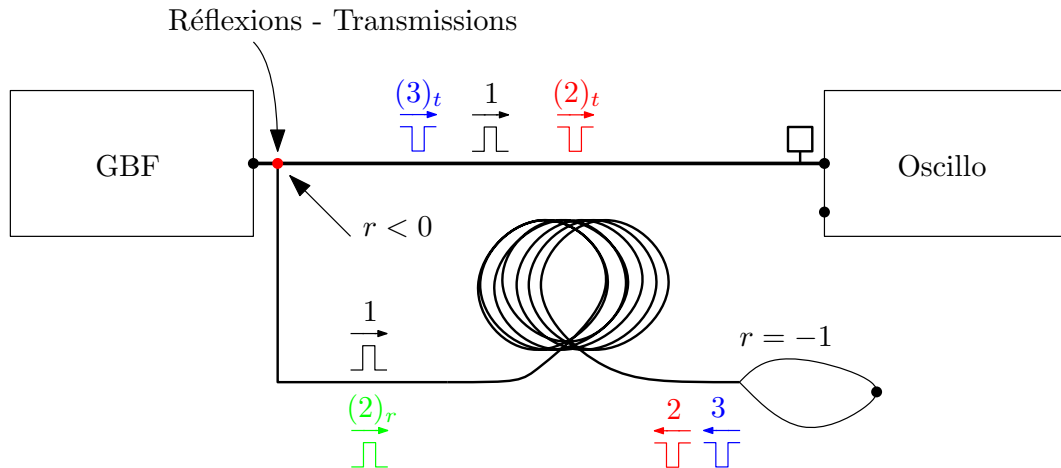


Figure 19 – Montage en sortie fermée : Interprétation

Notons que l'on pourrait à nouveau utiliser le chronogramme pour déterminer la vitesse de propagation des impulsions dans le câble : chaque impulsion, en dehors de l'impulsion (1), a en effet parcourue une distance $2l$ en plus, par rapport à l'impulsion précédente.

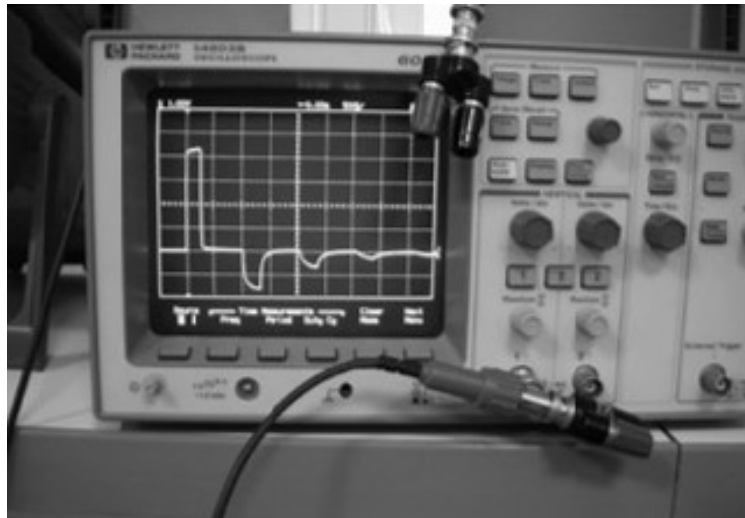


Figure 20 – Montage en sortie fermée : chronogramme

2.4.3 Troisième cas : adaptation en sortie

On effectue le montage suivant :

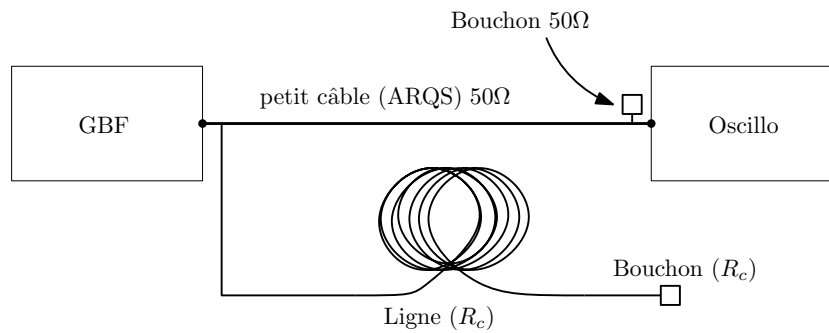


Figure 21 – Montage avec adaptation

Les deux câbles étant adaptés, il n'y a pas de réflexion (notamment pas de réflexion en bout de ligne) : on observe donc juste l'impulsion (1) passée par le petit câble coaxial.

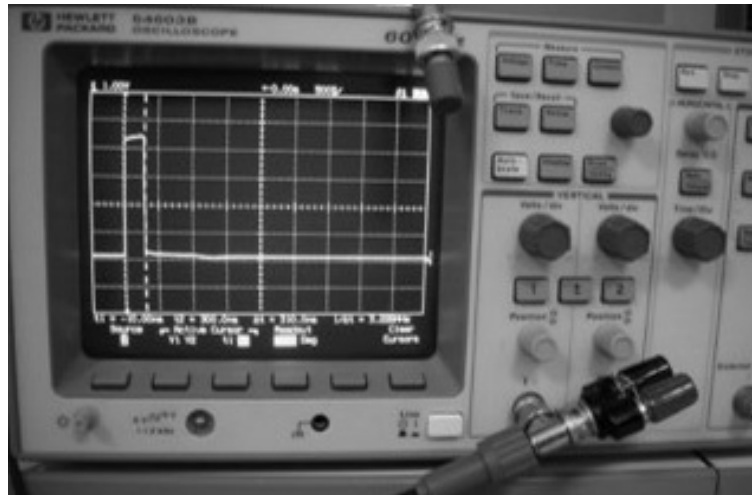


Figure 22 – Montage avec adaptation

3 Ondes stationnaires dans un câble coaxial

3.1 Un peu de théorie



$z = 0$ est compté à partir de la sortie du GBF

3.1.1 Ondes stationnaires dans le cas d'une sortie fermée

✗ Dans le câble, il s'établit des ondes stationnaires :

$$\underline{u}(z, t) = \underline{A} \cos(kz + \phi) \exp^{j(\omega t)}$$

✗ Du côté du GBF, on a un pont diviseur de tension comme représenté figure 23 :

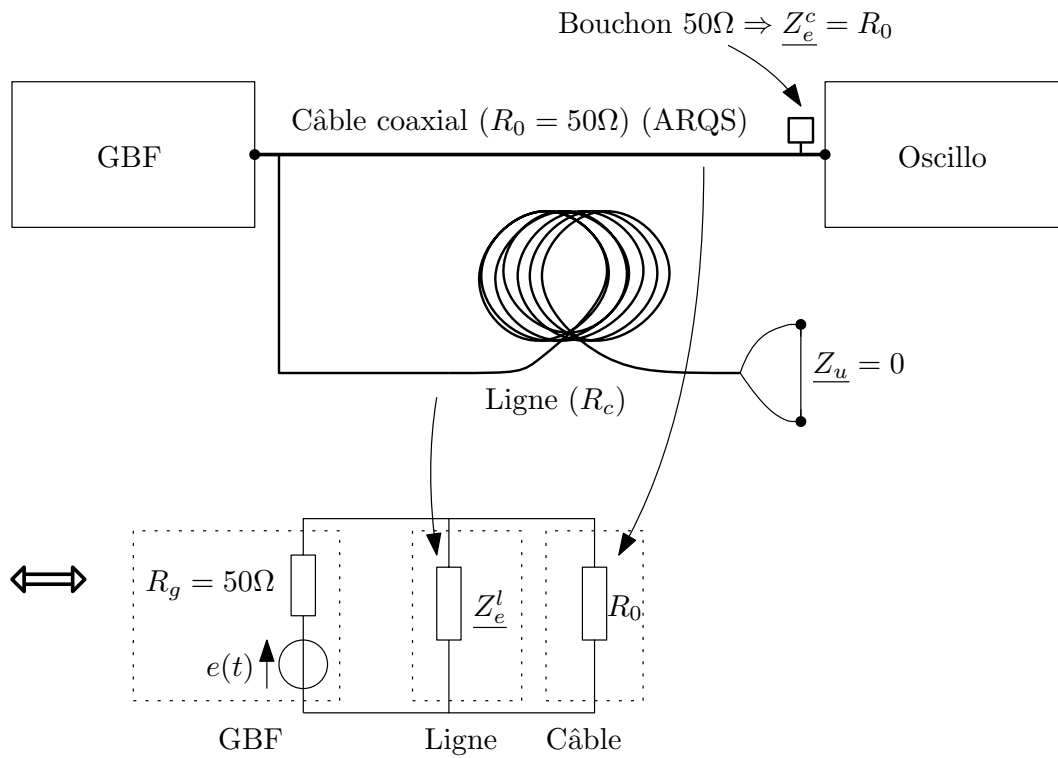


Figure 23 – Ondes stationnaires : schéma équivalent

Avec :

$$\underline{Z}_e^l = R_c \left(\frac{\underline{Z}_u + jR_c \tan(kl)}{R_c + j\underline{Z}_u \tan(kl)} \right) = jR_c \tan(kl)$$

D'où :

$$\underline{u}(0, t) = \underline{A} \cos(\phi) \exp^{j(\omega t)} = \frac{\left(\frac{R_0 \underline{Z}_e^l}{R_0 + \underline{Z}_e^l} \right)}{R_g + \frac{R_0 \underline{Z}_e^l}{R_0 + \underline{Z}_e^l}} \underline{e}(t)$$

Sachant que $R_g = R_0$, on obtient :

$$\underline{u}(0, t) = \underline{A} \cos(\phi) \exp^{j(\omega t)} = \frac{R_0 \underline{Z}_e^l}{R_0^2 + 2R_0 \underline{Z}_e^l} \underline{e}(t)$$

Sachant que $\underline{e}(t) = E \exp^{j\omega t}$, on obtient par identification :

$$\underline{A} \cos \phi = \frac{\underline{Z}_e^l}{R_0 + 2\underline{Z}_e^l} E$$

Ainsi :

$$\underline{u}(z, t) = \underbrace{\frac{1}{\cos \phi} \left(\frac{\underline{Z}_e^l}{R_0 + 2\underline{Z}_e^l} \right) E}_{\underline{A}} \cos(kz + \phi) \exp^{j(\omega t)}$$

✘ Grâce aux équations de couplage, on en déduit $\underline{i}(z, t)$:

$$\underline{i}(z, t) = \frac{1}{jR_c \cos \phi} \left(\frac{R_0 Z_e^l}{R_0^2 + 2R_0 Z_e^l} \right) E \sin(kz + \phi) \exp^{j(\omega t)}$$

✕ La condition limite, en bout de ligne ($z = l$), permet de déterminer ϕ :

$$\frac{\underline{u}(l, t)}{\underline{i}(l, t)} = \underline{Z}_u = jR_c \tan(kl + \phi)$$

✕ Sachant que la ligne est fermée, on a :

$$\underline{Z}_u = 0 \Rightarrow kl + \phi = p\pi \Rightarrow \underline{u}(z, t) = \underline{A} \cos(k(z - l)) \exp^{j(\omega t)}$$

et,

$$\cos \phi = \cos kl$$

et donc :

$$\underline{u}(z, t) = \frac{1}{\cos kl} \left(\frac{jR_c \tan kl}{R_0 + 2jR_c \tan kl} \right) E \cos(k(z - l)) \exp^{j(\omega t)}$$

L'amplitude en entrée vaut donc :

$$|\underline{u}(0, t)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\tan kl)^2} \left(\frac{R_0}{2R_c} \right)^2}} \frac{E}{2}$$

⇒ Cette amplitude est :

☛ Maximale (Résonance) pour $kl = \frac{\pi}{2} + p\pi$ soit :

$$f_V = \frac{V}{2l} \left(p + \frac{1}{2} \right)$$

$$l = \left(\frac{1}{4} + \frac{p}{2} \right) \lambda_V$$



Modes propres équivalents à ceux d'un tuyau sonore ouvert à une extrémité et fermée à l'autre extrémité

☛ Minimale (Anti-Résonance) pour $kl = p\pi$ soit :

$$f_N = \frac{V}{2l} (p)$$

$$l = \frac{p\lambda_N}{2}$$



Modes propres équivalents à ceux d'une cavité classique (corde de Melde)

3.1.2 Ondes stationnaires dans le cas d'une sortie ouverte

On effectue le même montage que précédemment (figure 23), mais on laisse la sortie ouverte.
Dans le cas d'une sortie ouverte, on a :

$$\underline{Z}_u = \infty \Rightarrow kL + \phi = \frac{\pi}{2} + p\pi \Rightarrow \underline{u}(z, t) = \underline{A} \sin(k(x - L)) \exp^{j(\omega t)}$$

$$\cos \phi = \sin kL$$

$$\underline{Z}_e^l = \frac{R_c}{j \tan kl}$$

et donc :

$$\underline{u}(z, t) = \frac{1}{\sin kl} \left(\frac{R_c}{jR_0 \tan kl + 2R_c} \right) E \sin(k(z - l)) \exp^{j(\omega t)}$$

L'amplitude en entrée vaut donc :

$$|\underline{u}(0, t)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan kl)^2 \left(\frac{R_0}{2R_c} \right)^2}} \frac{E}{2}$$

⇒ Cette amplitude est :

- ☛ Maximale (Résonance) pour $kL = +p\pi$ soit :

$$f_V = \frac{V}{2l} (p)$$

$$l = \frac{p\lambda_V}{2}$$



Modes propres équivalents à ceux d'une cavité classique (corde de Melde)

- ☛ Minimale (Anti-Résonance) pour $kL = \frac{\pi}{2} + p\pi$ soit :

$$f_N = \frac{V}{2l} \left(p + \frac{1}{2} \right)$$

$$l = \left(\frac{1}{4} + \frac{p}{2} \right) \lambda_N$$



Modes propres équivalents à ceux d'un tuyau sonore ouvert à une extrémité et fermée à l'autre extrémité

3.2 Résultats expérimentaux dans le cas d'une sortie ouverte

On effectue le montage de la figure 23 en sortie ouverte ($\underline{Z}_u = \infty$)

On recherche les fréquences pour lesquelles on observe des nœuds du côté du GBF :

$$f_{pN} = \frac{V}{2l} \left(p + \frac{1}{2} \right)$$

On obtient les résultats suivants :

p	0	1	2	3
f_{pN} (kHz)	540	1.64×10^3	2.77×10^3	3.90×10^3
$\lambda = \frac{f}{V}$ (m)	426	140	83	59
$\left(\frac{l}{\lambda}\right)_{exp}$	0.24	0.72	1.22	1.71
$\left(\frac{l}{\lambda}\right)_{th}$	0.25	0.75	1.25	1.75
Nombre de fuseaux	0.5	1.5	2.0	2.5

3.3 Résultats expérimentaux dans le cas d'une sortie ouverte

On effectue le montage de la figure 23 en sortie fermée ($Z_u = 0$)

On recherche les fréquences pour lesquelles on observe des nœuds du côté du GBF :

$$f_{pN} = \frac{V}{2l}(p)$$

On obtient les résultats suivants :

p	1	2	3	4
f_{pN} (MHz)	1.05	2.15	3.36	4.38
$\lambda = \frac{f}{V}$ (m)	219	107	68	53
$\left(\frac{l}{\lambda}\right)_{exp}$	0.46	0.94	1.48	1.92
$\left(\frac{l}{\lambda}\right)_{th}$	0.5	1	1.5	2
Nombre de fuseaux	1	2	3	4

3.4 Tableau récapitulatif

On pose :

$$f_1 = \frac{V}{4l} = 540 \text{ kHz}$$

Et on étudie :

$$f_{pr} = \frac{f_{pN}}{f_1} = 2p$$

Où p est un entier ou un demi-entier.

On obtient alors le tableau :

p	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
f_{pN} (MHz)	0.540	1.05	1.64	2.15	2.77	3.36	3.9.	4.38
$f_{pr} = \frac{f_{pN}}{f_1}$	1	1.944	3.037	3.981	5.130	6.222	7.222.	8.111

3.4.1 Tracé sous Régressi, sans incertitudes

La régression linéaire effectuée à partir de ce tableau donne le résultat suivant :

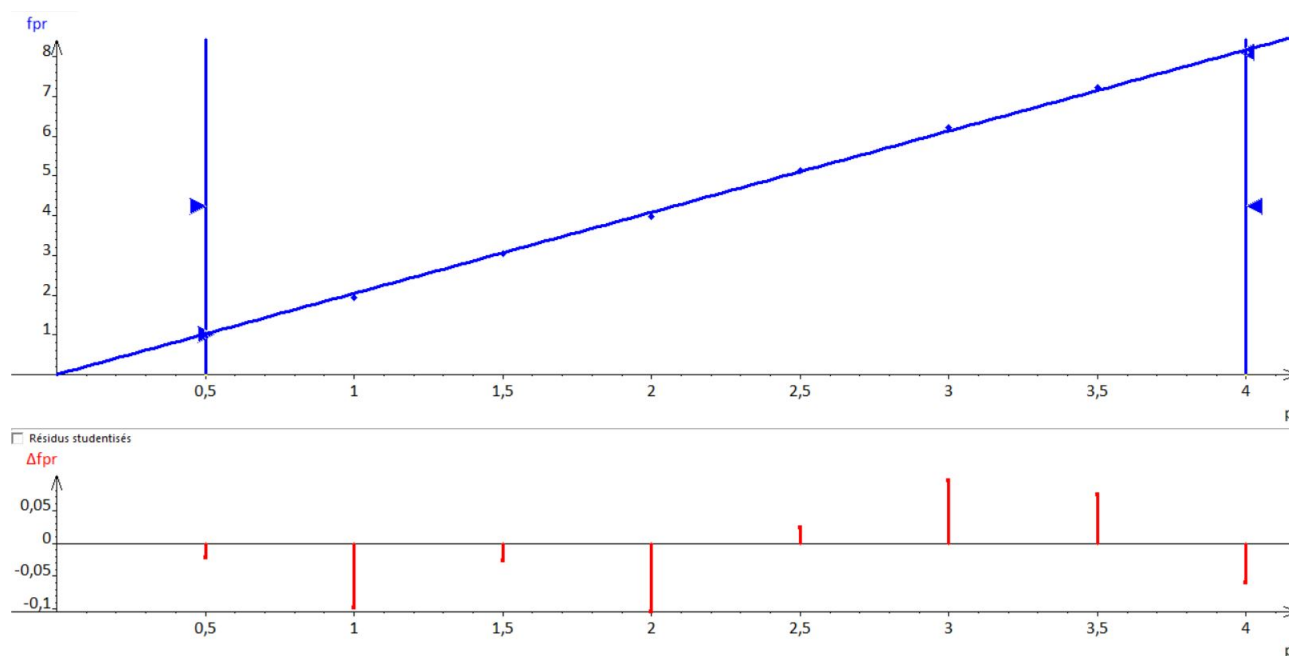


Figure 24 – Régression linéaire : $a = 2.043 \pm 0.025$

Conclusion : la régression linéaire donne des résultats satisfaisant : la pente est proche de 2, les résidus sont bien répartis. Le modèle utilisé pour décrire les ondes stationnaires semble satisfaisant.

3.4.2 Tracé sous Régressi, avec incertitudes

La régression linéaire effectuée à partir de ce tableau donne le résultat suivant :

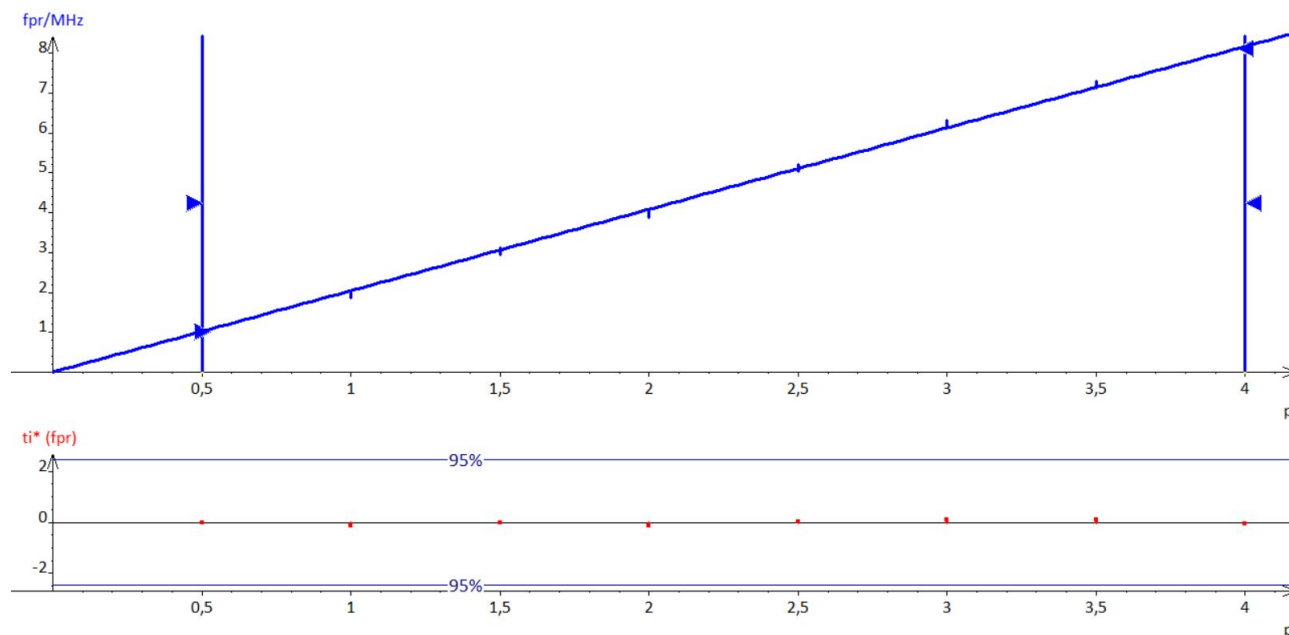


Figure 25 – Régression linéaire : $\chi^2 = 0.815$ et $a = 2.04 \pm 0.03$

Conclusion : la régression linéaire donne des résultats satisfaisant : la pente est proche de 2 et χ^2 est proche de 1. Le modèle utilisé pour décrire les ondes stationnaires semble satisfaisant.

3.4.3 Tracé sous python - Monté Carlo

Le code est en annexe, le tracé donne :

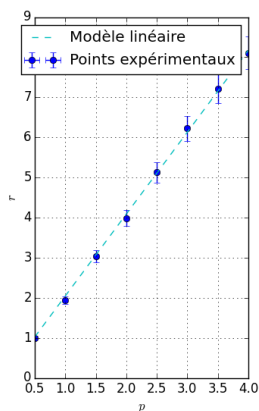


Figure 26 – Résultat d’une régression linéaire Monté Carlo avec Python

La pente est :

$$a = 2.04 \pm 0.03$$

4 Annexes

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a=0.9*10**(-3)
ua=0.05*10**(-3)
b=2.95*10**(-3)
ub=0.12*10**(-3)
epsilon0=8.85*10**(-12)
mu0=4*np.pi*10**(-7)
epsilonr=2.3
uepsilonr=0.1

N=10000

A=np.random.normal(a,ua,N)
B=np.random.normal(b,ub,N)
E=np.random.normal(epsilon0,uepsilonr,N)

L1=mu0*np.log(B/A)/(2*np.pi)
C1=2*np.pi*epsilon0*E/(np.log(B/A))

C1m=np.mean(C1)
L1m=np.mean(L1)
uC1m=np.std(C1)
uL1m=np.std(L1)

V=(1/(L1*C1))**(1/2)
Rc=(L1/C1)**(1/2)

Vm=np.mean(V)
Rcm=np.mean(Rc)
uVm=np.std(V)
uRcm=np.std(Rc)

print(" L1m=",L1m)
print(" uL1m=",uL1m)
print(" C1m=",C1m)
print(" uC1m=",uC1m)
print(" Vm=",Vm)
print(" uVm=",uVm)
print(" Rcm=",Rcm)
print(" uRcm=",uRcm)

plt.figure(1)
plt.hist(L1,bins=50)
plt.title("histogramme pour L1")
plt.xlabel("L1")
plt.ylabel("fréquence")
plt.show()

plt.figure(2)
plt.hist(C1,bins=50)
plt.title("histogramme pour C1")
plt.xlabel("C1")
plt.ylabel("fréquence")
plt.show()

plt.figure(3)
plt.hist(V,bins=50)
plt.title("histogramme pour V")
plt.xlabel("V")
plt.ylabel("fréquence")
plt.show()

plt.figure(4)

```

```
plt.hist(Rc, bins=50)
plt.title("histogramme pour Rc")
plt.xlabel("Rc")
plt.ylabel("fréquence")
plt.show()
```

```

# -*- coding: utf-8 -*-

"""Régression linéaire."""

# Importation des bibliothèques
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.optimize as so

# Données
# Dans cet exemple, on connaît :
# * l'incertitude-type pour r le rapport f/f1.
p= np.array([0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4])
r = np.array([1,1.944,3.037,3.981,5.130,6.222,7.222,8.111])
ur = 0.05*r

#forcer la regression linéaire (on utilise ensuite curfit)
def fct(x,k):
    return k*x

# Nombre de simulations
N = 10000
# Détermination des pentes et ordonnées à l'origine
asim = []
for i in range(N):
    rsim = r + ur*rd.uniform(-1, 1, len(r))
    pente = so.curve_fit(fct,p, rsim)
    asim.append(pente[0])

ma, ua = np.mean(asim), np.std(asim, ddof=1)

print("a =", ma)
print("u(a) =", ua)

# Tracé des points et du modèle
rmod = ma*p
plt.figure(1)
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.errorbar(p, r, xerr=0, yerr=ur, fmt='bo', label="Points expérimentaux")
plt.plot(p, rmod, 'c--', label="Modèle linéaire")
plt.xlabel(r"$p$")
plt.ylabel(r"$r$")
plt.grid(), plt.legend(loc='best')

```