

# 1 Mécanique des fluides

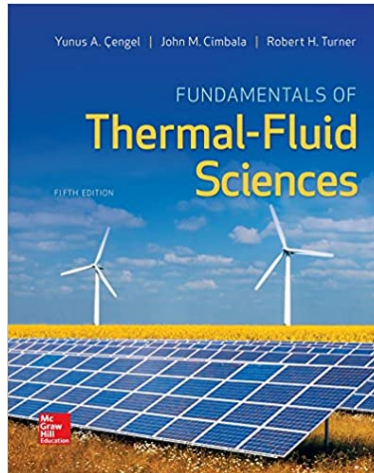


FIGURE 1 – La bible de la mécanique des fluides

On note  $\mathcal{C}$  les constantes (indépendantes du temps et de l'espace).

## 1.1 Statique des fluides

SVF

- ✗ Montrer que la résultante des forces de pression agissant sur une particule fluide, vérifie :

$$d\vec{F} = -\vec{\text{grad}}P d\tau$$

- ✗ Établir l'expression donnant l'évolution de la pression dans une atmosphère isotherme.
- ✗ Établir l'expression donnant l'évolution de la pression dans une atmosphère poly-tropique (évolution isentropique des particules fluides).
- ✗ Établir l'expression de l'invariant hydrostatique (fluides incompressibles). En déduire la pression au fond du verre :

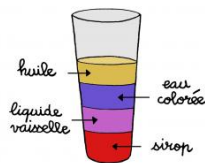


FIGURE 2

- ✗ Établir l'expression de la période des oscillations d'un cube flottant à la surface de l'eau.
- ✗ Établir la résultante des forces de pression exercées sur le barrage ci dessous :

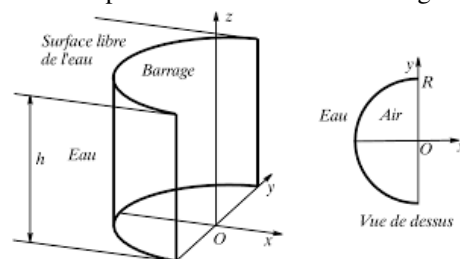


FIGURE 3

### ✗ Résultante des forces de pression sur une particule fluide.

- On considère une particule fluide parallélépipédique de volume  $d\tau = dx dy dz$ . Cette particule est soumise sur chacune de ses faces à des forces pressantes, comme représenté figure 4.

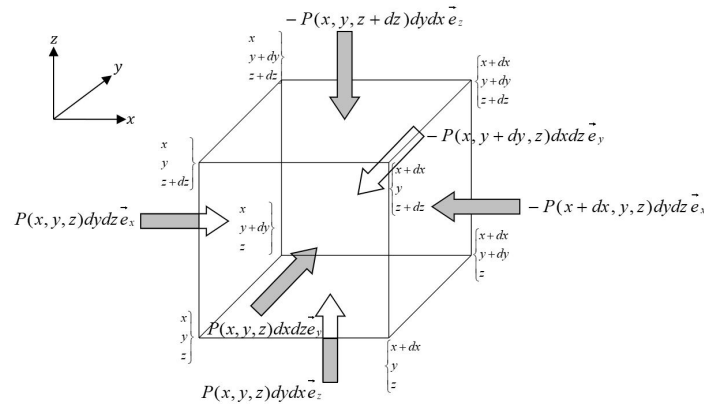


FIGURE 4 – Forces de pression agissant sur la particule fluide

- La résultante des forces de pression vaut alors :

$$d\vec{F} = \begin{cases} (P(x, y, z) - P(x + dx, y, z)) dy dz & = -\frac{\partial P}{\partial x} d\tau \\ (P(x, y, z) - P(x, y + dy, z)) dx dz & = -\frac{\partial P}{\partial y} d\tau \\ (P(x, y, z) - P(x, y, z + dz)) dx dy & = -\frac{\partial P}{\partial z} d\tau \end{cases}$$

$$d\vec{F} = -\vec{\text{grad}} P d\tau$$

### ✗ Évolution de la pression dans une atmosphère isotherme.

- On considère l'équilibre d'une particule fluide, de masse volumique  $\mu$ , dans le champ de pesanteur :

$$-\vec{\text{grad}} P d\tau - \mu g d\tau \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$$

- L'atmosphère étant assimilée à un gaz parfait, on a  $\mu = \frac{PM}{RT}$ , d'où :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT} g$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

- En intégrant entre l'altitude zéro ( $P(0) = P_0$ ) et une altitude  $z$  quelconque, sachant que  $T$  est une constante, on obtient :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

### ✗ Évolution de la pression dans une atmosphère poly-tropique

- On considère l'équilibre d'une particule fluide, de masse volumique  $\mu$ , dans le champ de pesanteur :

$$-\vec{\text{grad}} P d\tau - \mu g d\tau \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$$

- L'atmosphère étant assimilée à un gaz parfait, on a  $\mu = \frac{PM}{RT}$ , d'où :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT}g$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}dz$$

- Soit, en utilisant l'expression différentielle de la loi des gaz parfaits :

$$\frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} = -\frac{Mg}{RT}dz$$

- Ici, la température n'est pas constante. Pour déterminer l'expression de  $T(z)$ , on considère que l'évolution de la particule fluide est isentropique :

$$TV^{\gamma-1} = \text{Cste} \Rightarrow \frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0$$

D'où :

$$\frac{dT}{T} \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right) = -\frac{Mg}{RT}dz$$

$$dT = -\underbrace{\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Mg}{R}}_{a > 0} dz$$

- En intégrant entre l'altitude zéro ( $T(0) = T_0$ ) et une altitude  $z$  quelconque, on obtient :

$$T(z) = T_0 - az$$

- On en déduit :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}dz = -\frac{Mg}{R(T_0 - az)}dz$$

- En intégrant entre l'altitude zéro ( $P(0) = P_0$ ) et une altitude  $z$  quelconque, sachant que  $T$  est une constante, on obtient :

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \underbrace{\frac{Mg}{Ra}}_{\alpha} \ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)$$

D'où :

$$P(z) = P_0 \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^\alpha$$

### ✗ Invariant hydrostatique

- On considère l'équilibre d'une particule fluide, de masse volumique  $\mu$ , dans le champ de pesanteur :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}P d\tau - \mu g d\tau \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$$

- Le fluide étant incompressible, on a :  $\mu = \mathcal{C}$ , d'où :

$$P + \mu g z = \mathcal{C}$$

- Pour déterminer la pression au fond du verre, notée  $P_f$ , on introduit les masses volumiques des différents fluides ( $\mu_s, \mu_v, \mu_c, \mu_h$ ), les hauteurs des différents fluides ( $h_s, h_v, h_c, h_h$ ), les pressions aux différentes interfaces ( $P_{sv}, P_{vc}, P_{ch}$ ) et la pression atmosphérique  $P_0$ . Les différents invariants donnent :

$$P_f = P_{sv} + \mu_s g h_s$$

$$P_{sv} + \mu_v g h_s = P_{vc} + \mu_v g (h_s + h_v)$$

$$P_{vc} + \mu_c g (h_s + h_v) = P_{ch} + \mu_c g (h_s + h_v + h_c)$$

$$P_{ch} + \mu_h g (h_s + h_v + h_c) = P_0 + \mu_h g (h_s + h_v + h_c + h_h)$$

- En ajoutant Les différents invariants, on obtient :

$$P_f = P_0 + \mu_s g h_s + \mu_v g h_v + \mu_c g h_c + \mu_h g h_h$$

Cette expression est facile à mémoriser, puisque l'on voit apparaître distinctement le poids (surfaique) des différentes colonnes de fluide.

### ✗ Période des oscillations d'un cube

- On représente le cube au repos et en mouvement en introduisant les différents paramètre nécessaires à la résolution comme indiqué figure 5

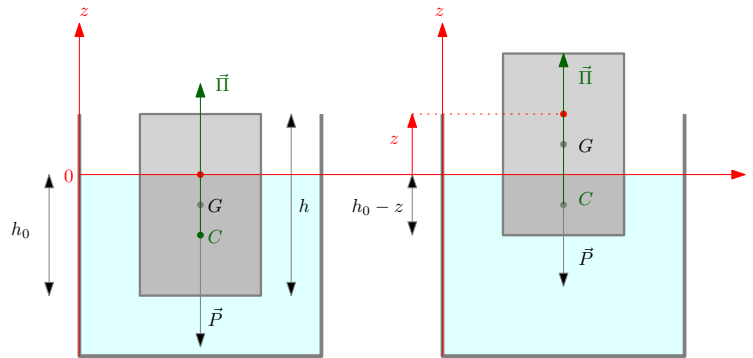


FIGURE 5 – Paramétrage du problème

- L'équilibre du cube se traduit par la relation :

$$mg = \mu S h_0 g$$

- Le PFD appliqué au cube donne :

$$m\ddot{z} = -mg + \mu S (h_0 - z)g$$

D'où :

$$\ddot{z} + \frac{\mu S g}{m} z = 0$$

La période des oscillations vaut alors :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\mu S g}}$$

### ✗ Résultante des forces de pression sur une barrage

- La résultante des forces de pression exercées sur la barrage est due aux forces pressantes exercées par l'eau et par l'air. Pour simplifier l'étude, on considère que le barrage n'a pas d'épaisseur et qu'il est de forme cylindrique. On considère un point  $M$  sur la surface du barrage et le vecteur surface élémentaire  $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$  en  $M$  comme indiqué figure 6.

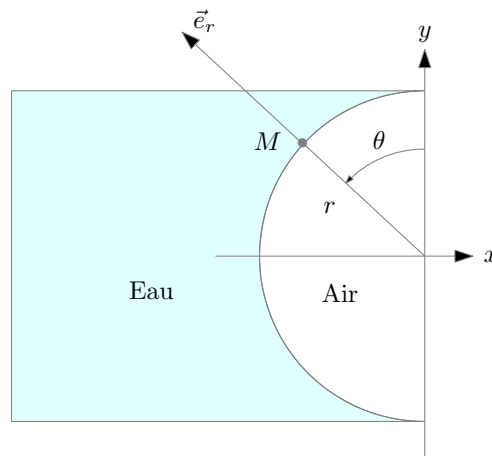


FIGURE 6



- La résultante des forces de pression agissant sur la surface  $dS$  s'écrit :

$$\vec{dF} = (P_0 - P(z)) dS \vec{e}_r$$

Où  $P(z)$  est la pression de l'eau à l'altitude  $z$  :

$$P(z) = P_0 + \mu(h - z)g$$

Où  $\mu$  est la masse volumique de l'eau.

- Vu la symétrie du barrage, on peut dire que la résultante des forces de pression est dirigée suivant  $\vec{e}_x$  :  $\vec{F} = F\vec{e}_x$ . On projette donc sur  $(Ox)$  afin de n'intégrer que la composante utile :

$$dF = \vec{dF} \cdot \vec{e}_x = (P_0 - P(z)) dS \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \mu g(h - z) \sin \theta r d\theta dz$$

D'où :

$$F = \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{\pi} \mu g(h - z) \sin \theta r d\theta dz = \mu g r \int_{z=0}^h (h - z) dz \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$F = \mu g r \left[ -\frac{(h - z)^2}{2} \right]_0^h [-\cos \theta]_0^{\pi}$$

$$F = \mu g r h^2$$

## 1.2 Vecteur densité de courant de masse

SVF

Montrer que le vecteur densité de courant de masse, en un point  $M$  de l'espace, vérifie :

$$\vec{j}_m(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t)$$

Où  $\mu(\vec{r}, t)$  est la masse volumique en un point  $M$  du fluide et  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  est la vitesse de la particule fluide en  $M$

- On raisonne sur la surface  $dS$  représentée figure 7 : le flux du vecteur densité de courant de masse est égal à la masse traversant la surface  $dS$  par unité de temps

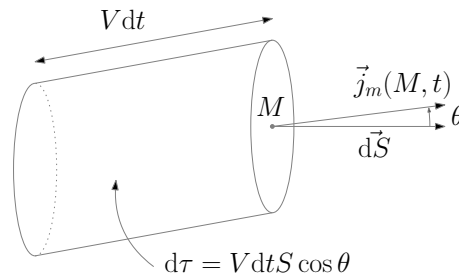


FIGURE 7



$\vec{j}_m$  est parallèle aux génératrices du cylindre

- La masse traversant la surface  $dS$  pendant  $dt$  vérifie donc :

$$d^3m = \vec{j}_m \cdot \vec{dS} dt = \mu d\tau = \mu V dt S \cos \theta = (\mu \vec{V}) \cdot \vec{dS} dt$$

On a donc :

$$\vec{j}_m = \mu \vec{V}$$

### 1.3 Équation de continuité

SVF

Démontrer la relation de continuité

- ✗ On considère un volume  $V$  macroscopique, comportant une masse  $m(t)$  à l'instant  $t$ , comme représenté figure 13.

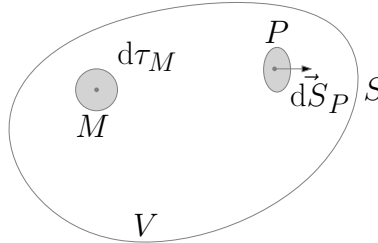


FIGURE 8

Avec :

$$m(t) = \iiint_V \mu(M, t) d\tau_M$$

- ✗ Pendant  $dt$ , la masse varie de  $dm$  avec :

$$dm = \iiint_V \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_{(t, M)} dt d\tau_M$$

- ✗ Or, comme la masse se conserve, cette variation de masse est due au flux de masse à travers la surface  $S$  :

$$\frac{dm}{dt} = - \oiint_S \vec{j}_m(P, t) \cdot d\vec{S}_P$$

- ✗ On obtient donc :

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_{(t, M)} d\tau_M + \oiint_S \vec{j}_m(P, t) \cdot d\vec{S}_P = 0$$

- ✗ Soit en utilisant le théorème d'Ostrogradsky :

$$\iiint_V \left( \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_{(t, M)} + \operatorname{div} \vec{j}_m(M, t) \right) d\tau_M = 0$$

- ✗ Cette relation étant vraie quelques soit  $d\tau_M$ , on obtient l'équation locale de conservation de la masse :

$$\left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_{(t, M)} + \operatorname{div} \vec{j}_m(M, t) = 0$$

### 1.4 Conservation du débit massique en régime stationnaire

SVF

Montrer que, dans le cas d'un écoulement stationnaire, le débit massique se conserve dans un tdc.

- ✗ On part de l'équation locale de conservation de la masse :

$$\left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_{(t, M)} + \operatorname{div} \vec{j}_m(M, t) = 0$$

- ✗ : En régime stationnaire, les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles, on a donc :

$$\operatorname{div} \vec{j}_m(M, t) = 0$$

$\Rightarrow \vec{j}_m(M)$  est à flux conservatif

D'après le théorème d'Ostrogradsky, on a donc :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j}_m \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Avec  $d\vec{\Sigma}$  vecteur sortant de la surface fermée

- ✘ On considère le tube de champ de  $\vec{j}_m$  représenté figure 9 et on définit la surface fermée  $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_L$

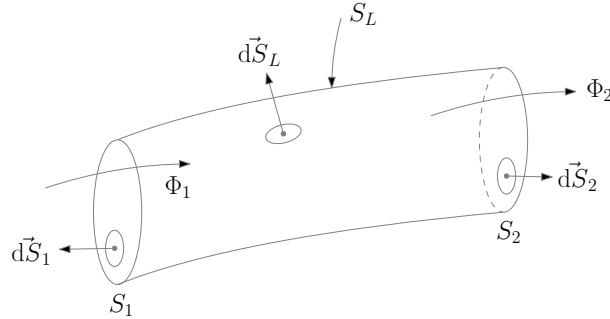


FIGURE 9

- ✘ On définit alors les flux  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  de  $\vec{j}_m$  à travers  $S_1$  et  $S_2$  orientés de la gauche vers la droite :

$$\Phi_1 = - \iint_{S_1} \vec{j}_m \cdot \vec{dS}_1$$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{j}_m \cdot \vec{dS}_2$$

- ✘ En décomposant la surface  $\Sigma$ , on obtient alors :

$$0 = \oiint_{\Sigma} \vec{j}_m \cdot \vec{d\Sigma} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{j}_m \cdot \vec{dS}_1}_{-\Phi_1} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{j}_m \cdot \vec{dS}_2}_{\Phi_2} + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{j}_m \cdot \vec{dS}_L}_0$$

D'où :

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

## 1.5 Conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible

SVF

Montrer que, dans le cas d'un écoulement incompressible, le débit volumique se conserve dans un tdc.

- ✘ On part de l'équation locale de conservation de la masse :

$$\left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_{(t,M)} + \operatorname{div} \vec{j}_m(M, t) = 0$$

Que l'on peut écrire aussi :

$$\left( \frac{D\mu}{Dt} \right)_{M,t} + \mu \operatorname{div} \vec{V}(M, t) = 0$$

- ✘ Un écoulement est incompressible si la masse volumique est constante dans le temps et dans l'espace, on a donc :

$$\left( \frac{D\mu}{Dt} \right)_{M,t} = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{V}(M, t) = 0$  : le champ des vitesses est à flux conservatif.

D'après le théorème d'Ostrogradsky, on a donc :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{d\Sigma} = 0$$

Avec  $\vec{d\Sigma}$  vecteur sortant de la surface fermée

- ✘ On considère le tube de champ de  $\vec{V}$  représenté figure 10 et on définit la surface fermée  $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_L$

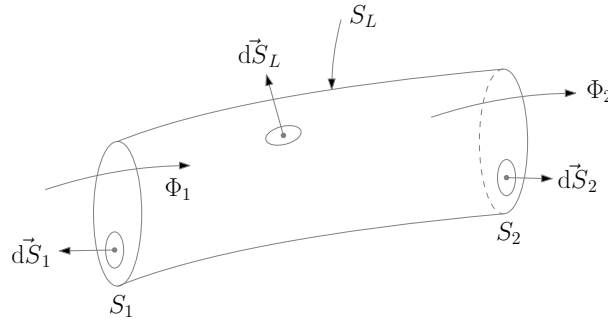


FIGURE 10

- ✘ On définit alors les flux  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  de  $\vec{j}_m$  à travers  $S_1$  et  $S_2$  orientés de la gauche vers la droite :

$$\Phi_1 = - \iint_{S_1} \vec{V} \cdot d\vec{S}_1$$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{V} \cdot d\vec{S}_2$$

- ✘ En décomposant la surface  $\Sigma$ , on obtient alors :

$$0 = \oiint_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{\Sigma} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{V} \cdot d\vec{S}_1}_{-\Phi_1} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{V} \cdot d\vec{S}_2}_{\Phi_2} + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{V} \cdot d\vec{S}_L}_0$$

D'où :

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

## 1.6 Champ des vitesses d'un vortex caractérisé par une circulation $C$

SVF

Montrer que le champ des vitesses crée par un Vortex, caractérisé par une circulation  $C$  vérifie :

$$\vec{V} = \frac{C}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

- ✘ On considère un vortex, caractérisé par une circulation  $C$  tel que le vecteur tourbillon  $\vec{\Omega}$  soit nul en tous les points de l'espace exceptés les points d'un axe (axe  $(Oz)$ ) où il est infini.
- ✘ On se place en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$  : Le vecteur tourbillon est alors dirigé suivant  $(Oz)$ . On cherche alors à déterminer le champ des vitesses en un point  $M$  de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(r, \theta, z)$$

- ✘ Symétries :  $\vec{\Omega}$  étant une source pour le champ des vitesses, et le plan  $(Oz, M)$  étant un plan de symétrie pour la distribution de  $\vec{\Omega}$ , on en déduit que  $\vec{V}$  est perpendiculaire à ce plan et donc que  $\vec{V}$  est suivant  $\vec{e}_\theta$  :

$$\vec{V}(M) = V(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

- ✘ Invariances : La distribution de  $\vec{\Omega}$  ne dépendant que de  $r$ , on en déduit que  $V(r, \theta, z) = V(r)$ .  
On a donc :

$$\vec{V}(M) = V(r) \vec{e}_\theta$$

- ✘ La circulation du champ des vitesses sur le cercle de rayon  $r$  et d'axe  $(Oz)$  étant égale à  $C$ , on a donc :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = C = 2\pi r V(r)$$

On a donc :

$$\vec{V}(M) = \frac{C}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

## 1.7 Écoulement potentiel incompressible

SVF

Montrer que le potentiel des vitesses d'un écoulement potentiel, incompressible vérifie :

$$\Delta\phi = 0$$

Résoudre cette équation dans le cas de l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre non portant (en négligeant les effets de bords, on cherchera le potentiel des vitesses sous la forme :  $\phi(r, \theta)$  en coordonnées cylindriques)

On donne :

$$\Delta X(r, \theta, z) = \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

✗ Pour un écoulement irrotationnel on a :

$$\text{rot} \vec{V} = \vec{0}$$

Il existe donc un champ scalaire  $\phi$ , appelé potentiel des vitesses, tel que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$$

✗ pour un écoulement incompressible, on a :

$$\text{div} \vec{V} = 0$$

Le potentiel  $\phi$  vérifie donc :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi) = \Delta\phi = 0$$

✗ Le potentiel ne dépend pas de  $z$ . On cherche les solutions sous forme de fonctions à variables séparées :

$$\phi(M) = \phi(r, \theta) = f(r)g(\theta)$$

✗ La Laplacien de  $\phi$  donne donc :

$$\frac{d^2 f}{dr^2} g(\theta) + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} g(\theta) + \frac{1}{r^2} f(r) \frac{d^2 g}{d\theta^2} = 0$$

Soit :

$$\frac{\left( r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} \right)}{f(r)} = - \frac{\left( \frac{d^2 g}{d\theta^2} \right)}{g(\theta)}$$

✗ On obtient une égalité entre deux fonctions de variables différentes : cette égalité est donc égale à une constante  $K$ .  
On obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left( r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} \right)}{f(r)} = K \\ \frac{\left( \frac{d^2 g}{d\theta^2} \right)}{g(\theta)} = -K \end{array} \right.$$

✗ Sachant que l'on cherche des solutions périodiques pour la fonction  $g$  ( $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$ ), la constante  $K$  est donc positive et sans dimension :

$$\frac{d^2 g}{d\theta^2} + Kg(\theta) = 0$$

Soit :

$$g(\theta) = A \cos(K\theta) + B \sin(K\theta)$$

✘ A l'infini, la vitesse vaut :

$$\vec{V}_\infty = V_\infty \vec{e}_x$$

Le potentiel des vitesses vaut donc :

$$\phi_\infty = V_\infty x = V_\infty r \cos \theta$$

La compatibilité de  $\phi$  avec les conditions limites, impose donc :  $K = 1$  et  $B = 0$ . On obtient donc :

$$g(\theta) = A \cos \theta$$

✘ L'équation différentielle vérifiée par  $f(r)$  est donc de la forme :

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} - f(r) = 0$$

On cherche les solutions sous la forme d'un polynôme en  $r$  :  $f(r) = Cr^n$ . On obtient ainsi :

$$r^2 \times Cn(n-1)r^{n-2} + r \times Cnr^{n-1} - Cr^2 = 0$$

Soit :

$$n(n-1) + n - 1 = 0 \Rightarrow (n-1)(n+1) = 0$$

Les solutions sont donc :  $n = 1$  et  $n = -1$ . On obtient donc :

$$f(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

✘ Le potentiel  $\phi$  est donc de la forme :

$$\phi = \left( C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \theta$$

✘ On en déduit le champ des vitesses :

$$\vec{V} = \begin{cases} V_r(r, \theta) = \left( C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta \\ V_\theta(r, \theta) = -\left( C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases}$$

✘ La vitesse  $V_r$  étant nulle pour  $r = R$ , le rayon du cylindre, on obtient :

$$C_1 = \frac{C_2}{R^2}$$

✘ La vitesse à l'infini vaut :

$$\vec{V}_\infty = V_\infty \vec{e}_x = V_\infty \cos \theta \vec{e}_r - V_\infty \sin \theta \vec{e}_\theta = C_1 \cos \theta \vec{e}_r - C_1 \sin \theta \vec{e}_\theta$$

On en déduit :

$$C_1 = V_\infty$$

$$C_2 = R^2 V_\infty$$

D'où :

$$\vec{V} = \begin{cases} V_r(r, \theta) = V_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ V_\theta(r, \theta) = -V_\infty \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases}$$

## 1.8 Évolution de la pression perpendiculairement à un écoulement parfait

SVF

Montrer que l'évolution de la pression, dans une direction perpendiculaire à un écoulement parfait, se fait de manière hydrostatique.

- ✗ On considère un écoulement parfait dirigé suivant  $(Ox)$ , comme représenté figure 11.

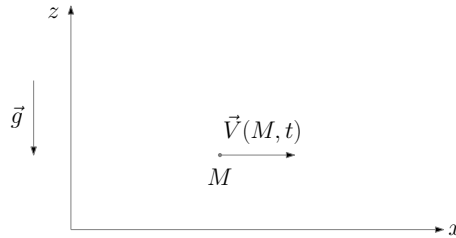


FIGURE 11 – Évolution du champ des pressions dans un écoulement

- ✗ L'équation d'Euler appliquée à une particule fluide donne :

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} \right) = -\text{grad}P + \mu \vec{g}$$

Soit :

$$\mu \left( \frac{\partial V}{\partial t} \vec{e}_x + V \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x \right) = -\text{grad}P + \mu \vec{g}$$

- ✗ Cette équation projetée sur la verticale  $(Oz)$  donne :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g$$

⇒ on retrouve bien la relation fondamentale de la statique des fluides.

## 1.9 Évolution de la pression en direction du centre de courbure d'une ligne de courant

SVF

Montrer que la pression diminue quand on se rapproche du centre de courbure d'une ligne de courant.

- ✗ On considère une ligne de courant courbée, en régime stationnaire, passant par un point  $M$ . On construit le cercle tangent à la ligne de courant en  $M$  : cercle de centre  $C$  et de rayon  $\mathcal{R}$ , comme représenté figure 12.

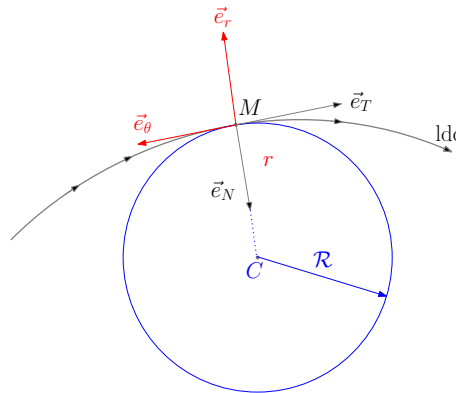


FIGURE 12 – Évolution du champ des pressions en direction d'un centre de courbure

- ✗ L'accélération de la particule fluide en  $M$ , dans la base locale de Frenet s'écrit :

$$\vec{a}(M) = \frac{dV}{dt} \vec{e}_T + \frac{V^2}{\mathcal{R}} \vec{e}_N$$

- ✘ En négligeant les effets de la pesanteur, l'équation d'Euler projetée dans la direction  $\vec{e}_N$  donne :

$$\mu \frac{V^2}{\mathcal{R}} = -\vec{e}_N \cdot \overrightarrow{\text{grad}}P$$

- ✘ Sachant que  $\vec{e}_N = -\vec{e}_r$ , on a :

$$\vec{e}_N \cdot \overrightarrow{\text{grad}}P = -\vec{e}_r \cdot \overrightarrow{\text{grad}}P = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

D'où :

$$\mu \frac{V^2}{\mathcal{R}} = \frac{\partial P}{\partial r}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial P}{\partial r} > 0$$

⇒ Quand on se rapproche du centre de courbure ( $r$  diminue), la pression diminue.

## 1.10 Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible

SVF

Montrer que, dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = f(t)$$

Où  $\Phi$  est le potentiel des vitesses.

(On ne tiendra compte que des forces volumiques de pesanteur)

- ✘ En tenant compte des hypothèses, on utilise l'équation d'Euler :

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu \vec{g}$$

Avec :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V}$$

- ✘ L'écoulement étant potentiel, il est donc irrotationnel et donc  $\text{rot} \vec{V} = \vec{0}$ . On obtient donc :

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{V^2}{2} \right) \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu \vec{g}$$

- ✘ On projette cette équation sur un déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  quelconque :

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial(\vec{V} \cdot d\vec{l})}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{V^2}{2} \right) \cdot d\vec{l} \right) &= -\overrightarrow{\text{grad}}P \cdot d\vec{l} + \mu \vec{g} \cdot d\vec{l} \\ \Rightarrow \mu \frac{\partial(\vec{V} \cdot d\vec{l})}{\partial t} + \mu d \left( \frac{V^2}{2} \right) &= \mu \frac{\partial(d\Phi)}{\partial t} + \mu d \left( \frac{V^2}{2} \right) = \mu d \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \mu d \left( \frac{V^2}{2} \right) = -dP - d(\mu gz) \end{aligned}$$

- ✘ On intègre alors sur le contour fermé orienté ( $C$ ) allant de  $A$  à  $B$  :

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_B - \Phi_A) + \mu \left( \frac{V_B^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} \right) = -(P_B - P_A) - \mu g(z_B - z_A)$$

- ✘ On a donc :

$$\mu \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} + \mu \frac{V_B^2}{2} + P_B + \mu g z_B = \mu \frac{\partial \Phi_A}{\partial t} + \mu \frac{V_A^2}{2} + P_A + \mu g z_A$$



On utilise le résultat :  $\overrightarrow{\text{grad}}X \cdot d\vec{r} = dX$



### 1.11 Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible, stationnaire

SVF

Montrer que, dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = \mathcal{C} \text{ sur une ldc}$$

(On ne tiendra compte que des forces volumiques de pesanteur)

✗ En tenant compte des hypothèses, on utilise l'équation d'Euler :

$$\mu (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu \vec{g}$$

Avec :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \wedge \vec{V}$$

✗ On projette cette équation sur un déplacement élémentaire  $\vec{dl}$  le long d'une ligne de courant :

$$\begin{aligned} \mu \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2}\right) \cdot \vec{dl} + \underbrace{\mu (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{dl}}_0 &= -\overrightarrow{\text{grad}}P \cdot \vec{dl} + \mu \vec{g} \cdot \vec{dl} \\ \Rightarrow \mu d\left(\frac{V^2}{2}\right) &= -dP - d(\mu gz) \end{aligned}$$

✗ On intègre alors sur le contour fermé orienté (C) allant de A à B :

$$\mu \left( \frac{V_B^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} \right) = -(P_B - P_A) - \mu g(z_B - z_A)$$

✗ On a donc :

$$\mu \frac{V_B^2}{2} + P_B + \mu g z_B = \mu \frac{V_A^2}{2} + P_A + \mu g z_A$$

### 1.12 Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, irrotationnel

SVF

Montrer que, dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, irrotationnel, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = \mathcal{C} \text{ dans tout le fluide}$$

(On ne tiendra compte que des forces volumiques de pesanteur)

✗ En tenant compte des hypothèses, on utilise l'équation d'Euler :

$$\mu (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu \vec{g}$$

Avec :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \wedge \vec{V}$$

✗ L'écoulement étant irrotationnel, on a :  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{0}$ . On obtient donc :

$$\mu \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu \vec{g}$$

- ✘ On projette cette équation sur un déplacement élémentaire  $\vec{dl}$  quelconque :

$$\mu \vec{\text{grad}} \left( \frac{V^2}{2} \right) \cdot \vec{dl} = -\vec{\text{grad}} P \cdot \vec{dl} + \mu \vec{g} \cdot \vec{dl}$$

$$\Rightarrow \mu d \left( \frac{V^2}{2} \right) = -dP - d(\mu g z)$$

- ✘ On intègre alors sur le contour fermé orienté (C) allant de A à B :

$$\mu \left( \frac{V_B^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} \right) = -(P_B - P_A) - \mu g (z_B - z_A)$$

et donc :

$$\mu \frac{V_B^2}{2} + P_B + \mu g z_B = \mu \frac{V_A^2}{2} + P_A + \mu g z_A$$

### 1.13 Jet homocinétique à l'air libre

SVF

Montrer que la pression dans un jet homocinétique à l'air libre est uniforme et est égale à la pression atmosphérique.

- ✘ On considère l'écoulement homocinétique représenté figure 13

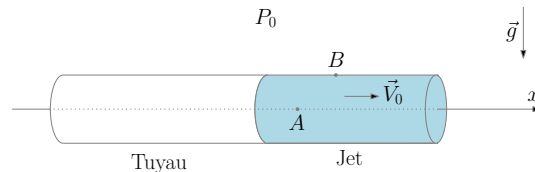


FIGURE 13 – Jet homocinétique à l'air libre

- ✘ On modélise l'écoulement par un écoulement parfait, stationnaire, homocinétique (et donc non tourbillonnaire) et incompressible. On néglige les effets de la pesanteur. On applique le théorème de Bernoulli entre les points A et B :

$$P_A + \frac{1}{2} \mu V_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \mu V_B^2$$

- ✘ La pression en B étant la pression atmosphérique, on a  $P_B = P_0$ .  
 ✘ La section du jet étant constante, par conservation du débit volumique, on peut affirmer que :  $V_A = V_B = V_0$ . On en déduit :

$$P_A = P_B = P_0$$



Il faut que B soit sur la surface libre, donc sur le côté du jet.

### 1.14 Formule de Toricelli

SVF

Démontrer la formule de Toricelli (vidanges) en déduite la durée de vidange  $\tau$

- ✗ On considère le schéma donné par la figure 14

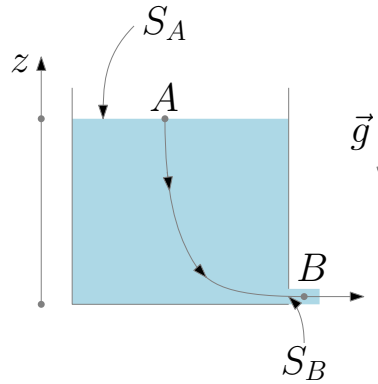


FIGURE 14 – Vidange

- ✗ On modélise l'écoulement par un écoulement parfait, stationnaire, incompressible. On applique le théorème de Bernoulli entre les deux points A et B appartenant à la même ligne de courant :

$$P_A + \frac{1}{2}\mu V_A^2 + \mu g z_A = P_B + \frac{1}{2}\mu V_B^2 + \mu g z_B$$

Avec :  $z_A = h$  et  $z_B = 0$ .

- ✗ Le point A appartenant à la surface libre, on a :  $P_A = P_0$ .
- ✗ Le point B appartenant à un jet homocinétique à l'air libre, on a :  $P_B = P_0$ .
- ✗ L'écoulement étant incompressible, on a conservation du débit volumique :

$$S_A V_A = S_B V_B$$

Sachant que  $S_A \gg S_B$ , on a donc :  $V_A \ll V_B$ .

- ✗ On obtient donc :

$$\mu g h = \frac{1}{2}\mu V_B^2 \Rightarrow V_B = \sqrt{2gh}$$

Le débit de vidange vaut donc :

$$D_v = S_B V_B = S_B \sqrt{2gh}$$

- ✗ La vitesse en A vérifie donc :

$$V_A = -\frac{dh}{dt} = \frac{D_v}{S_A} = \frac{S_B}{S_A} \sqrt{2gh}$$

- ✗ On résout facilement cette équation différentielle non linéaire par séparation des variables :

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{S_B}{S_A} \sqrt{2g} dt$$

$$\left[ 2\sqrt{h} \right]_H^0 = -\frac{S_B}{S_A} \sqrt{2g} [t]_0^\tau$$

Soit :

$$\tau = \frac{S_A}{S_B} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Temps que l'on peut comparer au temps de chute  $\tau_0$  d'un point matériel depuis une hauteur  $H$  :

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Que l'on retrouve si  $S_A = S_B$ .

## 1.15 Effet Venturi

SVF

Montrer, en utilisant le théorème de Bernoulli, l'origine de l'effet Venturi

- ✘ On considère un **tube de champ** d'un écoulement stationnaire, parfait, incompressible, pour lequel on néglige les effets de la pesanteur, comme représenté figure 15

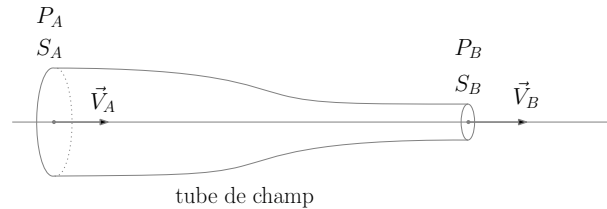


FIGURE 15 – Effet Venturi

- ✘ L'écoulement étant incompressible, on a conservation du débit volumique dans le tube de courant :

$$S_A V_A = S_B V_B$$

Sachant que  $S_A > S_B$ , on a :  $V_A < V_B$ .

- ✘ On applique le théorème de Bernoulli entre les points  $A$  et  $B$  appartenant à la même ligne de courant :

$$P_A + \frac{1}{2}\mu V_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\mu V_B^2$$

Soit :

$$P_B = P_A + \frac{1}{2}\mu V_A^2 \left( 1 - \frac{S_A^2}{S_B^2} \right)$$

Ainsi, si  $S_A > S_B$  alors  $P_A > P_B$

On retiendra : **dans un tube de courant, les zones de grandes sections sont des zones de petites vitesses et de grandes pressions.**



La notion de tdc est obligatoire pour la démonstration

## 1.16 Léviton d'une balle de ping-pong dans l'air

SVF

Interpréter à l'aide des différentes forces s'exerçant sur la balle, l'équilibre de la balle de ping-pong représentée figure 16.

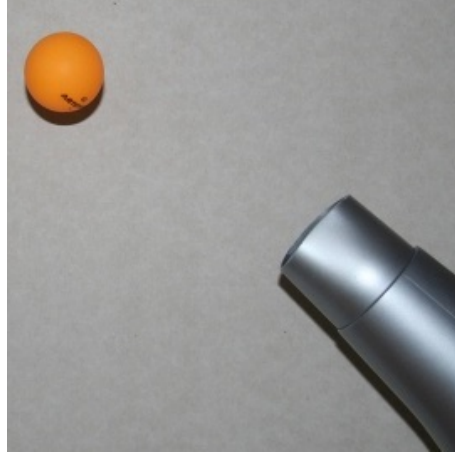


FIGURE 16 – Équilibre d'une balle de ping-pong

✗ L'écoulement d'air autour de la balle est représenté figure 17

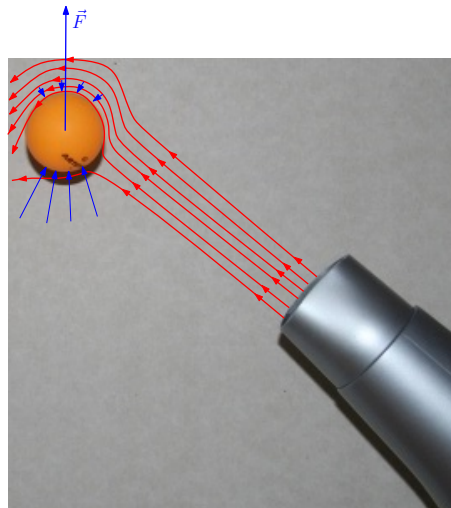


FIGURE 17 – Léviton d'une balle

✗ La courbure des lignes de courant étant accentué par l'effet Coanda, il existe au niveau de la face supérieure de la balle une large zone de dépression, non compensée par les pressions au niveau inférieur de la balle : la résultante de forces de pression est donc dirigée vers le haut et permet donc de compenser le poids

### 1.17 Lévitiation d'une balle dans un entonnoir

SVF

Prolonger les lignes de courant dans le schéma ci-dessous et représenter les forces de pression agissant sur la balle. En déduire la résultante des forces de pression s'exerçant sur la balle.

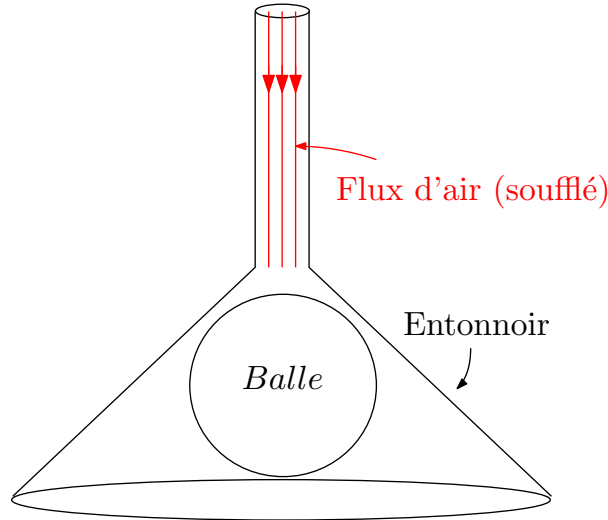


FIGURE 18 – Lévitiation d'une balle

- ✗ Les ldc sont déviées par la balle : les deux tdc, identiques dans le tube de l'entonnoir, se séparent en deux parties identiques et se resserrent au passage de la balle, une dépression apparaît sur le haut de la balle alors que le dessous de la balle reste pratiquement à pression atmosphérique, la résultante des forces de pression est donc dirigée vers le haut et permet de faire léviter la balle.

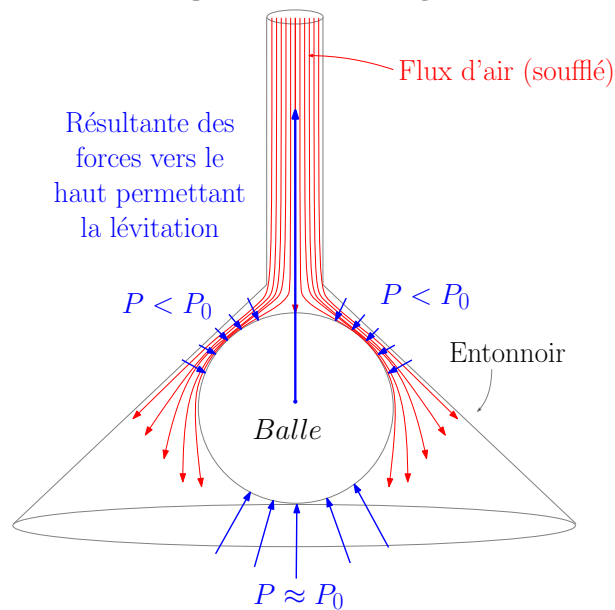


FIGURE 19 – Forces de pression permettant la lévitation de la balle

### 1.18 Effet Magnus - cylindre portant

SVF

Justifier qualitativement, en utilisant l'effet Venturi, l'origine de l'effet Magnus, sur l'exemple du cylindre portant.

- ✘ On considère un cylindre tournant sur lui-même (rotation propre dans le référentiel barycentrique du cylindre caractérisée par le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ ) comme représenté figure 20. Le centre d'inertie du cylindre est en translation uniforme dans l'air au repos à la vitesse  $\vec{V}_\infty = -V_\infty \vec{e}_x$ . On se place dans le référentiel barycentrique du cylindre qui est donc en translation pure uniforme dans le référentiel terrestre : l'air a alors une vitesse  $\vec{V}_{air} = V_\infty \vec{e}_x$  très loin du cylindre. L'écoulement d'air, dans le référentiel barycentrique, peut ainsi être considéré comme stationnaire. on néglige les effets de la pesanteur sur l'écoulement d'air.

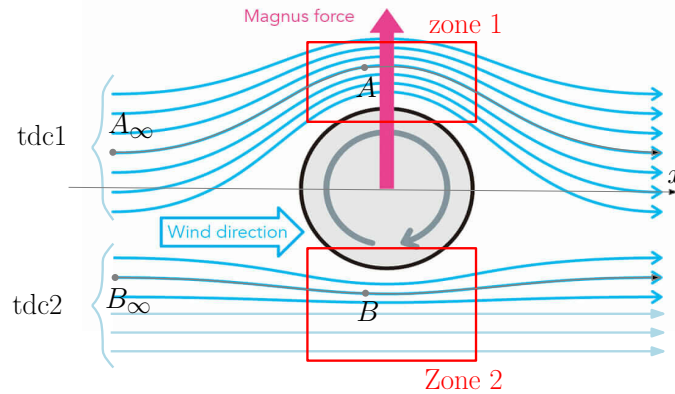


FIGURE 20 – Cylindre portant

- ✘ Si l'on considère le tdc1 :

- Loin en amont du cylindre, la pression et la vitesse valent respectivement  $P_0$  et  $V_\infty$  (point  $A_\infty$ ).
- La section de ce tdc diminue fortement au passage du cylindre : la zone au dessus du cylindre (zone 1) est donc une zone de "grande" vitesse et de "petite" pression.
- Le point  $A$  situé dans cette zone est donc tel que :

$$V_A > V_\infty$$

$$P_A < P_0$$

- ✘ Si l'on considère le tdc2 :

- Loin en amont du cylindre, la pression et la vitesse valent respectivement  $P_0$  et  $V_\infty$  (point  $B_\infty$ ).
- La section de ce tdc varie peu au passage du cylindre : dans la zone 2 les vitesse et pression sont donc peu modifiées.
- Le point  $B$  situé dans cette zone est donc tel que :

$$V_B \approx V_\infty$$

$$P_B \approx P_0$$

- ✘ Le champ des pressions n'est donc pas le même de part et d'autre du cylindre : la résultante des forces de pression est donc non nulle et orientée vers le haut.

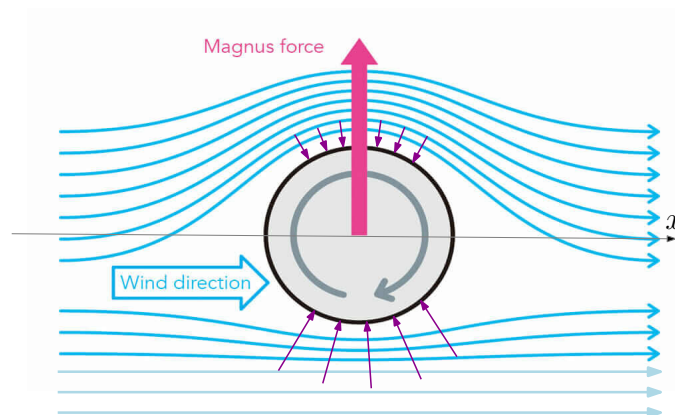


FIGURE 21 – Résultante des forces de pression sur le cylindre portant

## 1.19 Portance d'une aile d'avion

SVF

Expliquer qualitativement, en utilisant l'effet Venturi, l'origine de la portance d'une aile d'avion.  
 Expliquer qualitativement, en utilisant le théorème de Kutta -Jukowski, l'origine de la portance d'une aile d'avion.

On se place dans le référentiel de l'avion et on considère que l'écoulement d'air autour de l'aile est incompressible - homogène, stationnaire et parfait.

### ✗ Portance d'une aile d'avion expliqué grâce à l'effet Venturi

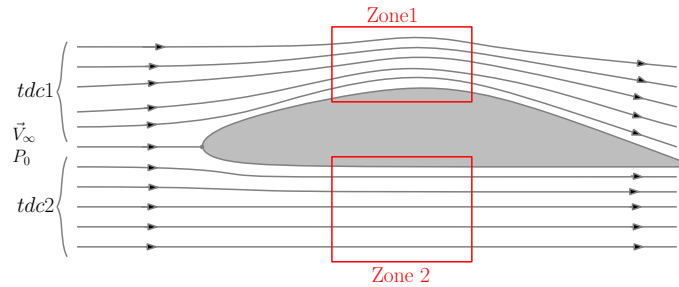


FIGURE 22 – Explication qualitative de la portance à l'aide de l'effet Venturi

- les deux tdc (tdc1 et tdc2) passant sur l'extrados et l'intrados de l'aile ont les mêmes caractéristiques loin en amont de l'aile.
- En passant au niveau de l'aile de l'avion (zone 1), le tdc1 est déformé et sa section diminue : la vitesse augmente donc et la pression diminue.
- En passant au niveau de l'aile de l'avion (zone 2), le tdc2 est peu déformé : sa section est quasiment constante. La vitesse et la pression dans le tdc2 restent ainsi quasiment inchangées par rapport à leurs valeurs loin de l'avion.
- L'extrados est donc le lieu de basses pressions par rapport à la pression atmosphérique régnant sur l'intrados : la résultante des forces de pression est donc dirigée vers le haut et permet de compenser le poids de l'avion.

### ✗ portance d'une aile d'avion expliqué qualitativement grâce au théorème de Kutta - Jukowski

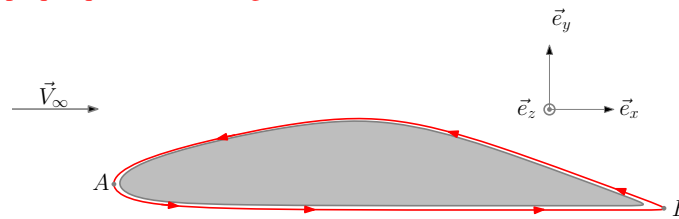


FIGURE 23 – Explication de la portance avec le théorème de Kutta - Jukowski

- Le vecteur circulation est défini par :

$$\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_z$$

(il sort par la face nord du contour fermé orienté)

- La circulation  $\Gamma$  peut être décomposée en deux circulations :
  - ✓ La circulation  $\Gamma_1 > 0$  allant du point d'arrêt  $A$  au point de fuite  $B$  et passant par l'intrados
  - ✓ La circulation  $\Gamma_2 < 0$  allant du point d'arrêt  $B$  au point de fuite  $A$  et passant par l'extrados.
- La courbure de l'aile sur l'extrados et la vitesse d'écoulement plus élevée sur l'extrados impliquent que  $|\Gamma_2| > \Gamma_1$  et donc :

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \Gamma_1 + \Gamma_2 < 0$$

- D'après le théorème de Kutta Jukowski, la portance par unité de longueur d'aile vaut :

$$\frac{\vec{F}}{L} = \mu \vec{V}_\infty \wedge \vec{\Gamma} = \underbrace{-\mu V_\infty \Gamma}_{>0} \vec{e}_y$$

⇒ La portance est donc dirigée vers le haut, de l'intrados vers l'extrados.



## 1.20 Nombre de Reynolds

SVF

Justifier l'expression du nombre de Reynolds par 3 méthodes différentes.

### ✗ Rapport du vecteur densité de courant convectif de quantité de mouvement et du vecteur densité de courant diffusif de quantité de mouvement

- Le vecteur densité de courant convectif de quantité de mouvement, dans le cas d'un écoulement tel que  $\vec{V} = V(y)\vec{e}_x$  est tel que :

$$\vec{j}_{conv} = \mu V^2 \vec{e}_x$$

- Le vecteur densité de courant convectif de quantité de mouvement, dans le cas d'un écoulement tel que  $\vec{V} = V(y)\vec{e}_x$  est tel que :

$$\vec{j}_{diff} = \eta \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y$$

- Le rapport de la norme de ces deux vecteurs, en utilisant les grandeurs caractéristiques, donne le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{\|\vec{j}_{conv}\|}{\|\vec{j}_{diff}\|} = \frac{\mu V^2}{\eta \frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{\mu V^2}{\eta V/L} = \frac{\mu V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}$$

### ✗ Rapport de l'accélération convective et de la résultante massique des forces de viscosité

- L'accélération convective vaut de manière générale :

$$\vec{a}_{conv} = (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V}$$

- La résultante massique des forces de viscosité vaut :

$$\vec{f}_{visc,m} = \frac{\eta}{\mu} \Delta \vec{V} = \nu \Delta \vec{V}$$

- Le rapport de la norme de ces deux vecteurs, en utilisant les grandeurs caractéristiques, donne le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{\|\vec{a}_{conv}\|}{\|\vec{f}_{visc,m}\|} = \frac{\|(\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V}\|}{\|\nu \Delta \vec{V}\|} = \frac{\frac{V^2}{L}}{\frac{\nu}{L^2}} = \frac{V L}{\nu}$$

### ✗ Rapport de la trainée convective et de la trainée de Stokes

- La trainée convective vaut :

$$\vec{T}_{conv} = -\frac{1}{2} \mu V^2 C_x S \frac{\vec{V}}{V}$$

- La trainée de Stokes est de la forme :

$$\vec{T}_{Stokes} \approx -\eta L \vec{V}$$

- Le rapport de la norme de ces deux vecteurs, en utilisant les grandeurs caractéristiques, donne le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{\|\vec{T}_{conv}\|}{\|\vec{T}_{Stokes}\|} = \frac{\|\frac{1}{2} \mu V^2 C_x S \frac{\vec{V}}{V}\|}{\|\eta L \vec{V}\|} = \frac{\mu V^2 L^2}{\eta L V} = \frac{\mu V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}$$

### ✗ Rapport du temps caractéristique de diffusion et du temps caractéristique de convection

- Le temps caractéristique de convection est lié au trajet d'une particule fluide :

$$\tau_{conv} = \frac{L}{V}$$

où  $L$  est la distance caractéristique de l'écoulement et où  $V$  est la vitesse caractéristique de l'écoulement.

- Le temps caractéristique de diffusion est lié à l'équation de diffusion :

$$\tau_{diff} = \frac{L^2}{D} = \frac{L^2}{\nu}$$

- Le rapport de la norme de ces deux temps nous donne le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} = \frac{\left(\frac{L^2}{\nu}\right)}{\left(\frac{L}{V}\right)} = \frac{LV}{\nu}$$

## 1.21 Couche limite : nombre de Reynolds local et dimension

SVF

Déterminer la dimension caractéristique d'une couche limite laminaire en déduire le nombre de Reynolds dans cette couche limite (nombre de Reynolds local)

- Dans la couche limite ( $Cl$ ), le transport diffusif domine le transport convectif, alors qu'à l'extérieur ( $Ext$ ) de la couche limite, c'est l'inverse.
- En écrivant qu'au bord de la couche limite (épaisseur  $\delta$ ), les deux termes de l'équation de Navier – Stokes sont du même ordre de grandeur, on obtient :

$$1 \approx \frac{\|(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}\|_{Ext}}{\|\nu \overrightarrow{\Delta} \vec{V}\|_{Cl}} = \frac{\frac{V^2}{L}}{\eta \frac{V}{\delta^2}} = \frac{VL \delta^2}{\eta L^2} = R_e \frac{\delta^2}{L^2}$$

D'où :

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{R_e}}$$

- Le nombre de Reynolds local, dans la couche limite laminaire, vaut :

$$R_{e,local} = \frac{V\delta}{\nu} = \frac{V}{\nu} \frac{L}{\sqrt{R_e}} = \frac{LV}{\nu} \frac{1}{\sqrt{R_e}} = \sqrt{R_e}$$

## 1.22 Équation de diffusion

SVF

Montrer que dans le cas d'un écoulement laminaire, incompressible où seules les forces de viscosité interviennent, le champ des vitesses obéit à une équation de diffusion dont on donnera la diffusivité. En déduire la relation entre le temps caractéristique de diffusion et la distance caractéristique de diffusion (diffusion de quantité de mouvement).

- On part de l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{f}_v + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{V}$$

Et on la modifie sachant que :

- Toutes les actions mécaniques sont négligées à l'exception des forces de viscosité
- L'écoulement étant laminaire, on néglige l'accélération convective devant les forces (massiques) de viscosité ( $R_e \ll 1$ )

✘ On obtient donc :

$$\mu \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{V}$$

Soit :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu} \Delta \vec{V}$$

On obtient donc une équation de diffusion, de diffusivité :

$$D_{visc} = \nu = \frac{\eta}{\mu}$$



L'accélération convective n'est pas nulle, elle est négligeable car l'écoulement est laminaire

### 1.23 Débit de Poiseuille

SVF

Démontrer l'expression du débit de Poiseuille :

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P$$

Par deux méthodes :

✘ En utilisant le laplacien, en coordonnées cylindriques, d'un champ scalaire qui ne dépend que de  $r$  :

$$\Delta X(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial X}{\partial r} \right)$$

✘ En utilisant la contrainte visqueuse dans le cas d'un champ des vitesses de la forme :  $\vec{V}(M) = V(r) \vec{e}_z$  en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\sigma}(r, t) = \left. \frac{d\vec{F}_{visc}}{dS} \right|_{(r,t)} = \eta \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{(r,t)} \vec{e}_z$$

- ✘ Un écoulement de Poiseuille désigne d'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite, écoulement induit par une différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite.
- ✘ On étudie ici l'écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe ( $Oz$ ), de rayon  $R$ , de longueur  $L$ , la pression d'entrée étant  $P_A$  et la pression à la sortie étant  $P_B$ . On néglige les effets de la pesanteur.

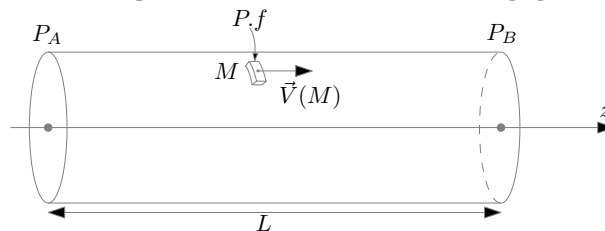


FIGURE 24 – Écoulement de Poiseuille

✘ L'équation de Navier Stokes, appliquée à une particule fluide est donc :

$$\mu \vec{a} = \vec{f}_{v,P} + \vec{f}_{v,visc}$$

où :  $\vec{f}_{v,P}$  est la résultante volumique des forces de pression et où  $\vec{f}_{v,visc}$  est la résultante volumique des forces de viscosité.

✘ Le champ des vitesses, induit par la différence de pression, est de la forme :

$$\vec{V}(M) = V(r, \theta, z, t) \vec{e}_z$$

- ✗ L'écoulement étant stationnaire et invariant par rotation d'angle  $\theta$ , on obtient :

$$\vec{V}(M) = V(r, z) \vec{e}_z$$

- ✗ L'écoulement étant incompressible, on a :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

- ✗ Finalement, le champ des vitesses s'écrit :

$$\vec{V} = V(r) \vec{e}_z$$

- ✗ L'accélération de la particule fluide en  $M$  s'écrit :

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\vec{0}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \operatorname{grad}) \vec{V}}_{V(r) \frac{\partial}{\partial z} (V(r) \vec{e}_z) = \vec{0}} = \vec{0}$$

- ✗ La résultante volumique des forces de pression s'écrit :

$$\vec{f}_{v,p} = -\operatorname{grad} P = - \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- ✗ Résultante volumiques des forces de viscosité :

- En utilisant le Laplacien :

$$\vec{f}_{v,visc} = \eta \Delta \vec{V} = \eta (\Delta V(r)) \vec{e}_z = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

- En utilisant les contraintes visqueuses s'exerçant sur une particule fluide :

- ✓ Deux contraintes visqueuses s'appliquent sur la particule fluide représentée figure 25

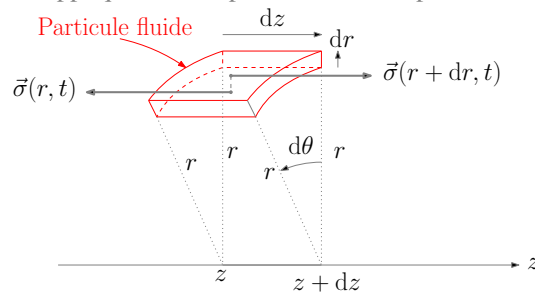


FIGURE 25 – Contraintes visqueuses s'appliquant sur une particule fluide

- ✓ La résultante des forces de viscosité vaut donc :

$$\vec{dF}_{visc} = \eta \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{(r+dr,t)} dS_{r+dr} \vec{e}_z - \eta \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{(r,t)} dS_r \vec{e}_z$$

Avec :  $dS_{r+dr} = (r + dr)d\theta dz$  et  $dS_r = rd\theta dz$

D'où :

$$\vec{dF}_{visc} = \eta \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{(r+dr,t)} (r + dr)d\theta dz \vec{e}_z - \eta \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{(r,t)} rd\theta dz \vec{e}_z$$

Soit :

$$\vec{dF}_{visc} = \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right) dr d\theta dz \vec{e}_z = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right) dr \vec{e}_z$$

D'où :

$$\vec{f}_{v,visc} = \frac{\vec{dF}_{visc}}{d\tau} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

✗ L'équation de Navier-Stokes donne donc :

$$d\vec{F} = \begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial r} \Rightarrow P(r, \theta, z) = P(\theta, z) \\ 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \Rightarrow P(r, \theta, z) = P(z) \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \end{cases}$$

✗ On obtient donc une équation différentielle avec à gauche une expression qui ne dépend que de  $z$  et à droite une expression qui ne dépend que de  $r$  : les deux membres de cette équation sont donc constants. En prenant cette constante égale à  $K$ , on obtient :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = K$$

✗ D'après les conditions aux limites, on a :

$$K = \frac{dP}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$$

où  $\Delta P = P_A - P_B > 0$

✗  $V(r)$  vérifie donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{r \Delta P}{\eta L}$$

Soit :

$$r \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{r^2 \Delta P}{2\eta L} + C_1$$

Cette première constante d'intégration est nulle car, la dérivée de la vitesse ne peut pas diverger en  $r = 0$ , on obtient donc :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{r \Delta P}{2\eta L}$$

✗ En intégrant une nouvelle fois, on obtient :

$$V(r) = -\frac{r^2 \Delta P}{4\eta L} + C_2$$

✗ On détermine la nouvelle constante d'intégration, en utilisant les condition limite sur la paroi de la conduite :

$$V(r = R) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{R^2 \Delta P}{4\eta L}$$

D'où :

$$V(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

✗ Le débit volumique se déterminer alors facilement :

$$D_v = \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

Où  $d\vec{S}$  est le vecteur surface élémentaire de toute surface  $S$  perpendiculaire à la paroi.

✗ En choisissant, comme surface élémentaire, la couronne d'axe ( $Oz$ ), de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ , on obtient :

$$d\vec{S} = 2\pi r dr \vec{e}_z$$

Et donc :

$$D_v = \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = -\frac{\Delta P}{8\pi\eta L} \int_{r=0}^{r=R} (R^2 - r^2) r dr = \frac{\Delta P \pi R^4}{8\eta L}$$

## 1.24 Débit de Couette

SVF

On déplace une plaque de masse  $M$  de surface  $S$ , sur une couche de fluide de masse volumique  $\mu$  et de viscosité dynamique  $\eta$ , à la vitesse  $\vec{V}_0$  comme représenté figure 26.

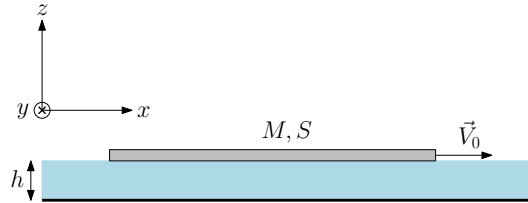


FIGURE 26 – Déplacement d'une plaque à la surface d'un fluide visqueux

L'écoulement du fluide sous la plaque est supposé incompressible et stationnaire et le système est invariant par rapport à  $y$  (profondeur très grande).

Déterminer le débit de l'écoulement induit par le déplacement de la plaque ainsi que la force que doit exercer l'opérateur pour maintenir la translation de la plaque à la vitesse  $\vec{V}_0$ .

En déduire le temps caractéristique d'établissement du régime permanent.

### ✗ Débit de Couette

- Un écoulement de Couette est un écoulement laminaire induit par le déplacement d'une paroi au contact du fluide. Ici, on considère le déplacement d'une plaque horizontale, de grandes dimensions, posée sur un fluide initialement au repos.
- Les hypothèses de l'étude sont : écoulement laminaire, newtonien (on note  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide), stationnaire et incompressible-homogène (on note  $\mu$  la masse volumique du fluide).
- Le champ des vitesses, en un point  $M$  de l'écoulement est de la forme :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(x, y, z, t)$$

- L'écoulement étant induit par le déplacement de la plaque se faisant suivant  $(Ox)$ , le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{V}(M) = V(M) \vec{e}_x$$

- L'écoulement étant stationnaire,  $\vec{V}$  ne dépend pas du temps :

$$V(M) = V(x, y, z)$$

- La plaque étant de grandes dimensions, il y a invariance par translation par rapport à  $y$  :

$$V(M) = V(x, z)$$

- L'écoulement étant incompressible, la divergence du champ des vitesses est nulle :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow V(M) = V(z)$$

Ainsi le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{V}(M) = V(z) \vec{e}_x$$

- L'accélération particulière d'une particule fluide est alors nulle :

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial V(z) \vec{e}_x}{\partial t}}_{\vec{0}} + \underbrace{\left( V(z) \vec{e}_x \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \right) (V(z) \vec{e}_x)}_{V(z) \frac{\partial}{\partial x} (V(z) \vec{e}_x) = \vec{0}}$$

- L'équation de Navier-Stokes donne :

$$\mu \vec{a} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} P + \mu \vec{g} + \eta \Delta \vec{V}$$

Avec :

✓

$$\vec{\text{grad}}P = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix}$$

✓

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

✓

$$\Delta \vec{V} = \begin{pmatrix} \Delta V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ \Delta V_y = \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} = 0 \\ \Delta V_z = \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

- La pression  $P$  ne dépend donc pas de  $y$ , l'intégration de la dernière équation donne :

$$P(x, z) = -\mu g z + f(x)$$

En considérant que la pression au niveau de la plaque est une constante, notée  $P_{ext}$ , on obtient :

$$P_{ext} = -\mu g h + f(x)$$

On en déduit que la fonction  $f(x)$  est en réalité une constante égale à :  $\mu g h + P_{ext}$ .

- La première équation donne :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow V(z) = Az + B$$

- En utilisant les conditions aux limites, on détermine les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  :

- Condition aux limites sur la plaque fixe :

$$V(0) = 0 = B \Rightarrow B = 0$$

- Condition aux limites sur la plaque mobile :

$$V(h) = V_0 = Ah \Rightarrow A = \frac{V_0}{h}$$

- Le champ des vitesses est donc de la forme :

$$\vec{V}(M) = \frac{V_0 z}{h} \vec{e}_x$$

- Le débit de Couette se détermine alors facilement :

$$D_v = \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_S (V(z) \vec{e}_x) \cdot (dS \vec{e}_x) = \int_{z=0}^{z=h} V(z) dz dy = \frac{V_0 L_y}{h} \int_{z=0}^{z=h} z dz = \frac{V_0 L_y h}{2}$$

### ✗ Force de l'opérateur pour déplacer la plaque à vitesse constante

- La force que doit exercer l'opérateur sert à compenser les forces de viscosité s'exerçant sur la plaque :

$$\vec{F}_{op} = -\vec{F}_{visc}$$

- Soit un élément de surface  $dS$  de la plaque mobile. Les forces de viscosité exercées par le fluide sur cet élément de surface valent :

$$\vec{dF}_{visc} = -\eta \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=h} dS \vec{e}_x$$

- En prenant  $dS = dzdy$  et connaissant le profil des vitesses, on obtient :

$$\vec{V}(M) = \frac{V_0 z}{h} \vec{e}_x \Rightarrow \vec{dF}_{visc} = -\eta \frac{V_0}{h} dydz \vec{e}_x$$

Soit :

$$\vec{F}_{visc} = -\eta \frac{V_0}{h} S \vec{e}_x$$

Et donc :

$$\vec{F}_{op} = \eta \frac{V_0}{h} S \vec{e}_x$$

En notant  $S$  la surface de la plaque.

### ✗ Temps caractéristique d'établissement du régime permanent

- D'après l'équation de diffusion, la relation entre le temps caractéristique de diffusion  $\tau$  et la distance caractéristique  $L$  est :

$$D_{visc} = \nu = \frac{\eta}{\mu} = \frac{L^2}{\tau}$$

- Sachant qu'ici, la distance caractéristique est la distance  $h$ , on obtient :

$$\tau = \frac{h^2}{\nu} = \frac{h^2 \mu}{\eta}$$

## 1.25 Décollement d'une couche limite

SVF

Expliquer qualitativement l'origine du décollement d'une couche limite. Pourquoi une couche limite turbulente se décolle-t-elle plus difficilement qu'une couche limite laminaire ?

### ✗ Développement d'une couche limite laminaire le long d'un obstacle

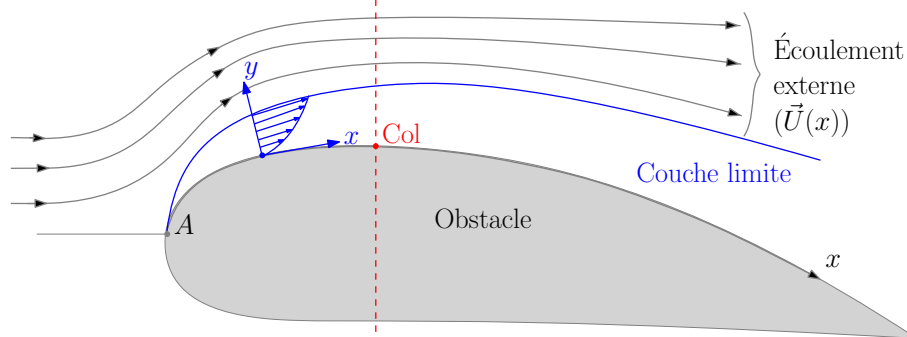


FIGURE 27 – Développement de la couche limite à partir du point d'arrêt

- La couche limite laminaire se développe à partir du point d'arrêt comme représenté figure 27.
- La vitesse de l'écoulement externe est notée  $\vec{U}(x) = U(x) \vec{e}_x$  où  $x$  est l'abscisse curviligne le long de l'obstacle comptée à partir du point d'arrêt. L'évolution de  $U(x)$  est prévue par l'effet venturi : avant le col,  $U$  augmente avec  $x$  et après le col  $U$  diminue avec  $x$ .
- Le champ des vitesses dans la couche limite est de la forme :

$$\vec{v} = v_x(x, y) \vec{e}_x + v_y(x, y) \vec{e}_y$$

Avec :



- ✓  $v_x \gg v_y$
- ✓  $\frac{\partial v_x}{\partial x} \propto \frac{dU}{dx}$

- L'évolution du champ des pressions est le même que dans l'écoulement externe (en particulier  $P$  ne dépend que de  $x$ ) et est prévu par l'effet Venturi :

$$\frac{dP}{dx} \propto -\frac{dU}{dx}$$

- Ainsi :

- ✓ Dans la zone avant le col :

$$x \nearrow \Rightarrow U \nearrow \Rightarrow P \searrow$$

- ✓ Dans la zone après le col :

$$x \nearrow \Rightarrow U \searrow \Rightarrow P \nearrow$$

La région après le col est donc une zone de pression défavorable dans la couche limite : les particules fluides font face à un champ des pressions de plus en plus élevé.

### ✗ Décollement de la couche limite

- Les particules fluides au contact avec l'obstacle, après le col, font face à un champ de pression défavorable, leur vitesse diminue donc et plus particulièrement :

$$x \nearrow \Rightarrow \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{x,y=0} \searrow$$

- Pour une valeur donnée de  $x$ , cette dérivée s'annule, c'est le point de décollement  $D$  :

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{x_D,y=0} = 0$$

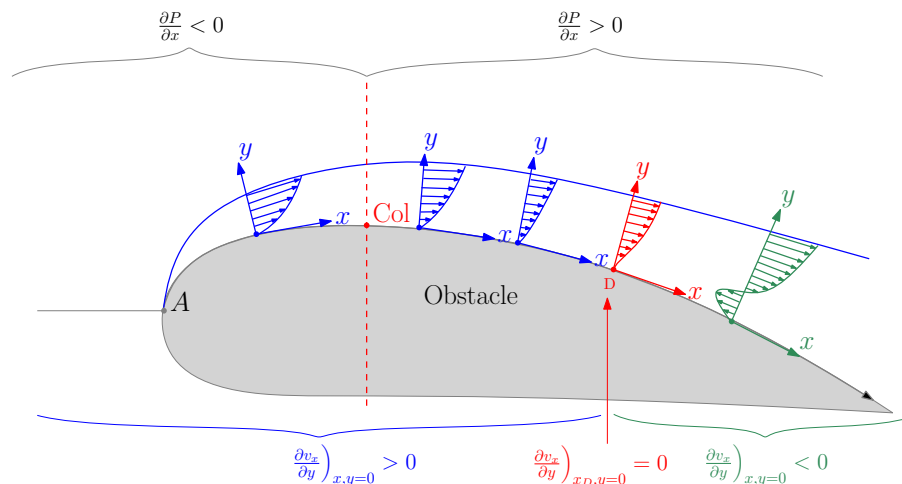


FIGURE 28 – Décollement de la couche limite en  $D$

- Après le point de décollement, cette dérivée peut devenir négative : les particules fluides proches de la paroi ont alors des vitesses opposées à  $\vec{e}_x$ . Il se forme ainsi des tourbillons de re-circulation : à partir du point  $D$ , un sillage turbulent apparaît.

### ✗ Décollement d'une couche limite vs décollement d'une couche limite turbulente

- Le décollement de la couche limite peut apparaître sur une couche limite laminaire ou une couche limite turbulente mais une couche limite turbulente se décolle moins facilement qu'une couche limite laminaire.
- En effet, la couche limite turbulente et l'écoulement externe échangent facilement leurs quantités de mouvement en raison de la trajectoire chaotique des particules fluides. Ainsi, les particules fluides au contact avec la paroi, fortement freinées par le champ de pression défavorable, conserveront une vitesse suffisante pour éviter le décollement grâce à ces transferts de quantités de mouvement.

## 1.26 Coefficient de trainé en régime laminaire

SVF

Montrer que le coefficient de trainée en régime laminaire, dans le cas d'un écoulement autour d'une sphère vaut :

$$C_x = \frac{24}{Re}$$

- En régime laminaire, la trainée est donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{T} = -6\pi\eta R V \frac{\vec{V}}{V}$$

où  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide et où  $R$  est le rayon de la sphère.

- L'expression générale de la trainée est :

$$\vec{T} = -\frac{1}{2}\mu V^2 C_x S \frac{\vec{V}}{V}$$

où  $\mu$  est la masse volumique du fluide et où  $S$  est le maître-couple :  $S = \pi R^2$ .

- En égalisant les deux expressions, on obtient :

$$6\pi\eta R V = \frac{\pi R^2}{2} \mu V^2 C_x$$

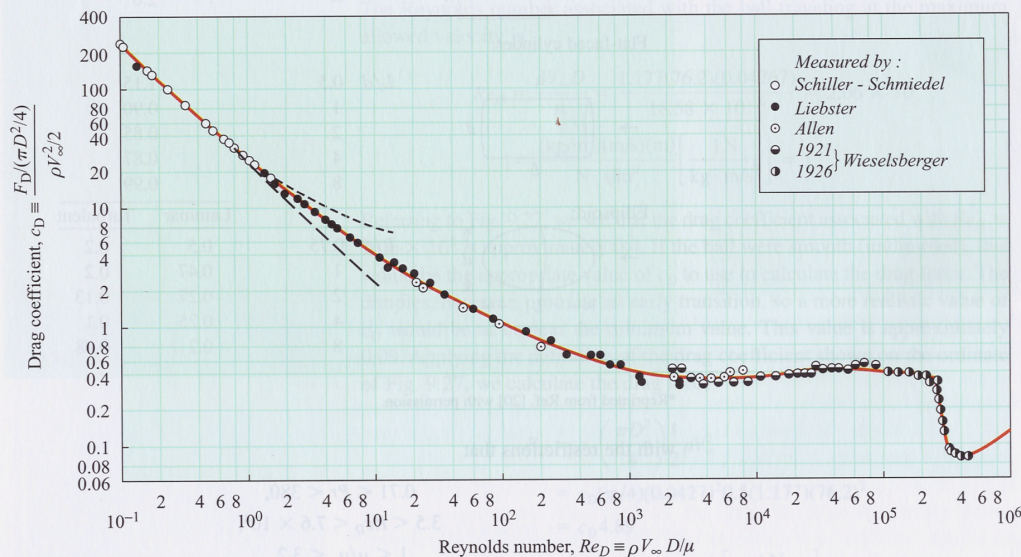
D'où, sachant que  $Re = \frac{2R\mu V}{\eta}$  :

$$C_x = \frac{12\eta}{\mu R V} = \frac{24}{Re}$$

## 1.27 Utilisation du diagramme de trainée

SVF

En utilisant le diagramme ci-dessous, déterminer la vitesse de chute d'un bille d'acier de 2 mm de diamètre dans de l'eau (régime permanent).



**FIGURE 9.27**  
Drag coefficient for a sphere in a uniform flow. Reprinted from Ref. [11] with permission.

**FIGURE 29**

- ✗ La bille, en chute libre a un mouvement vertical descendant, sa vitesse et son accélération sont donc de la forme :

$$\vec{V} = \dot{z} \vec{e}_z = -V \vec{e}_z \text{ et } \vec{a} = \ddot{z} \vec{e}_z = -\frac{dV}{dt} \vec{e}_z$$

Où  $\vec{e}_z$  est la vertical ascendante.

- ✗ La bilan des actions mécaniques appliquées à la bille donne :

- Le poids :

$$\vec{P} = -mg \vec{e}_z$$

où  $m$  est la masse de la bille :

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \mu_b$$

$r$  étant le rayon de la bille et  $\mu_b$  étant la masse volumique de la bille.

- La poussée d'Archimède (résultante des forces de pression dues à la gravité) :

$$\vec{\Pi} = +m^* g \vec{e}_z$$

où  $m^*$  est la masse d'eau déplacée :

$$m^* = \frac{4}{3} \pi r^3 \mu_e$$

$\mu_e$  étant la masse volumique de l'eau.

- La force de trainée exercée par l'eau sur la bille (comprenant les forces de viscosité et les forces de pression) :

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \mu_e V^2 C_D S \vec{e}_z$$

$C_D$  étant le coefficient de trainée et  $S = \pi r^2$  étant le maître-couple.

- ✗ Le PFD appliqué à la bille donne :

$$m \frac{dV}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{T}$$

Soit, en projetant sur  $(Oz)$  :

$$-\frac{dV}{dt} = -mg + m^* g + \frac{1}{2} \mu_e V^2 C_D S$$

- ✗ En régime permanent, on obtient :

$$0 = -\frac{4}{3} \pi r^3 \mu_b g + \frac{4}{3} \pi r^3 \mu_e g + \frac{\pi r^2}{2} \mu_e V^2 C_D$$

D'où :

$$V = \sqrt{\frac{8rg}{3C_D} \left( \frac{\mu_b}{\mu_e} - 1 \right)}$$

- ✗ La bille ayant un diamètre de 2 mm et le fluide étant dans l'eau, on suppose que l'écoulement de l'eau autour de la bille est turbulent et donc que  $Re$  est compris entre  $10^3$  et  $2 \times 10^5$  avec  $C_D = 0.45$ .

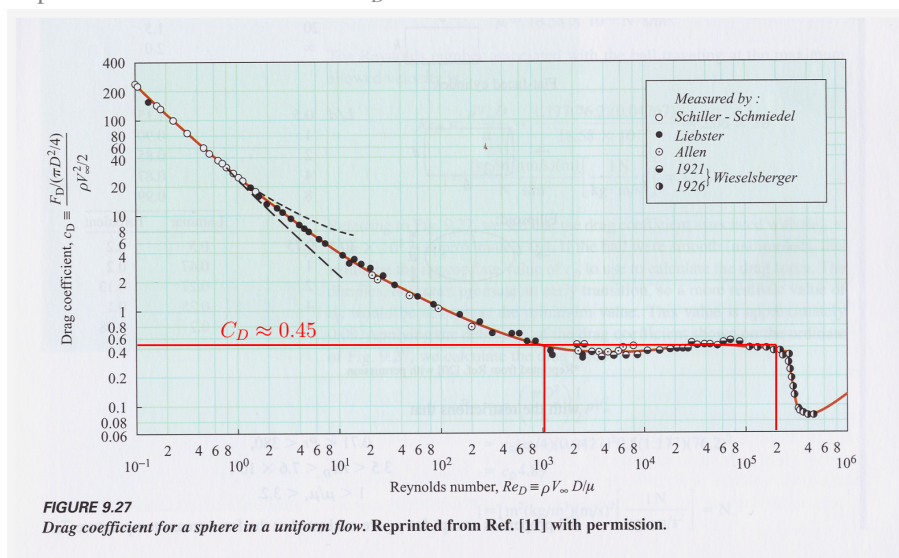


FIGURE 30 – Valeur du  $C_D$  pour un écoulement turbulent autour d'une sphère

- ✗ Connaissant  $C_D$ , on calcule  $V$  :

$$V = 0.63 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

- ✗ on en déduit la valeur de  $R_e$  :

$$R_e = \frac{2r\mu_e V}{\eta} \approx 1.2 \times 10^3$$

Le nombre de Reynolds trouvé étant compris dans l'intervalle retenu, la valeur de  $V$  est validée.

## 1.28 Loi de Laplace (tension superficielle)

SVF

Démontrer la loi de Laplace donnant la discontinuité des pressions de part et d'autre d'une interface sphérique soumise à une tension superficielle  $\gamma$  :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R}$$

- ✗ On considère une interface sphérique, de rayon  $r$ , séparant deux fluides, comme représenté figure 31. La tension superficielle de l'interface est notée  $\gamma$ .

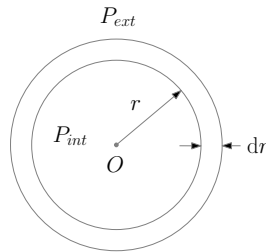


FIGURE 31 – Démonstration de la loi de Laplace

- ✗ On fait varier, de manière quasi-statique, le rayon  $r$  de l'interface de  $dr$ . La variation d'énergie cinétique de l'interface étant nulle, on obtient :

$$dE_c = 0 = \delta W_\gamma + \delta W_{pression} = -dE_S + \delta W_{pression}$$

- ✗ Le travail des forces de pression vaut :

$$\delta W_{pression} = -P_{ext}dV + P_{int}dV = (P_{int} - P_{ext})dV = (P_{int} - P_{ext}) \times 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2 \Delta P dr$$

- ✗ La variation de l'énergie potentielle des tensions de surface vaut :

$$dE_S = \gamma dS = \gamma \times 8\pi r dr$$

- ✗ On obtient donc :

$$\gamma \times 8\pi r dr = 4\pi r^2 \Delta P dr$$

Soit :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{r}$$

## 1.29 Loi de Jurin

SVF

Démontrer, en utilisant trois méthodes différentes, la loi de Jurin :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\mu g r}$$

### ✗ Méthode 1 : En utilisant la loi de Laplace

- On considère le schéma de la figure 32 :

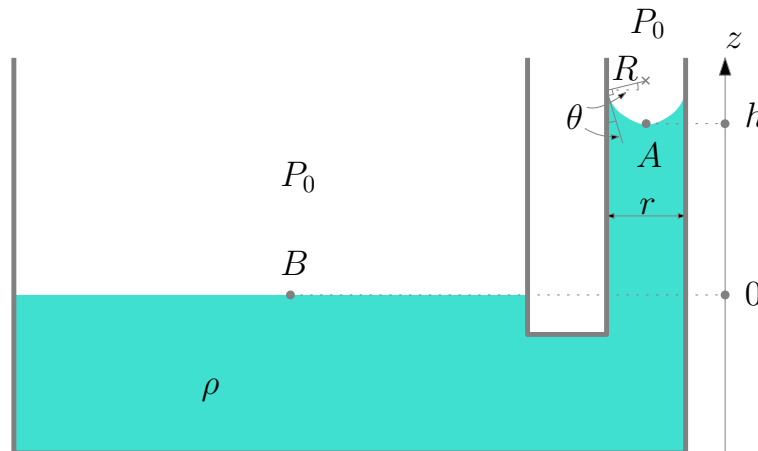


FIGURE 32 – Loi de Jurin : utilisation de la loi de Laplace

- L'invariant hydrostatique entre A et B donne :

$$P_A = P_0 - \rho gh$$

- La loi de Laplace nous donne également la relation entre  $P_0$  et  $P_A$  :

$$\Delta P = P_0 - P_A = \frac{2\gamma}{R}$$

Avec :

$$\cos \theta = \frac{r}{R}$$

- En combinant ces deux équations, on obtient :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$$



La pression en A est inférieure à la pression en B puisque A est plus haut que B

### ✗ Méthode 2 : approche énergétique

- On considère le schéma de la figure 33, où le système étudié est la colonne de fluide dans la capillaire entre  $z = 0$  et  $z = h$  :

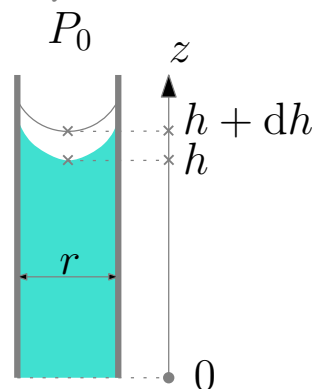


FIGURE 33 – Loi de Jurin : méthode énergétique

- L'énergie potentielle de pesanteur du système vaut :

$$E_{pp} = mgz_G = (\pi r^2 h \rho) g \frac{h}{2}$$

Sa variation quand  $h$  varie de  $dh$  vaut :

$$dE_{pp} = \pi r^2 \rho g h dh$$

- La variation d'énergie potentielle surfacique quand  $h$  varie de  $dh$  vaut :

$$dE_S = \gamma_{SL} \times 2\pi r dh - \gamma_{SG} \times 2\pi r dh = (\gamma_{SL} - \gamma_{SG}) 2\pi r dh$$

En utilisant la formule de Young, on introduit  $\gamma_{LG} = \gamma$  :

$$\gamma_{SL} - \gamma_{SG} = -\cos \theta \gamma$$

D'où :

$$dE_S = -2\pi r \cos \theta \gamma dh$$

On suppose que l'interface entre la gaz et le liquide n'est pas modifiée et donc que l'énergie potentielle de l'interface n'est pas modifiée quand la colonne monte de  $dh$ .

- L'énergie cinétique de la colonne restant nulle, on a :

$$dE_p = dE_{pp} + dE_S = 0$$

On obtient donc :

$$\pi r^2 \rho g h dh - 2\pi r \cos \theta \gamma dh = 0$$

Soit :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$$

### ✗ Méthode 3 : Utilisation des forces capillaires

- On considère le système représenté figure 34, où le système étudié est l'ensemble des corps à l'intérieur de la surface  $\Sigma$  :

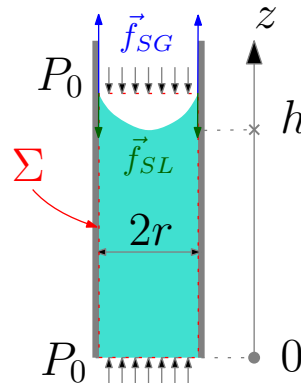


FIGURE 34 – Loi de Jurin : utilisation des forces capillaires

- Bilan des actions mécaniques :

- En négligeant le poids de l'air, on obtient le poids du système :

$$\vec{P} = -\pi r^2 \rho g h \vec{e}_z$$

- Les forces de capillarité de l'interface solide gaz :

$$\vec{f}_{SG} = \gamma_{SG} \times 2\pi r \vec{e}_z$$

- Les forces de capillarité de l'interface solide liquide :

$$\vec{f}_{SL} = -\gamma_{SL} \times 2\pi r \vec{e}_z$$

- La résultante des forces de pression est nulle

- L'équilibre du système se traduit par la relation :

$$0 = -\pi r^2 \rho g h + \gamma_{SG} \times 2\pi r - \gamma_{SL} \times 2\pi r$$

- En utilisant la formule de Young :  $\gamma_{SG} - \gamma_{SL} = \cos \theta \gamma$ , on obtient :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$$

### 1.30 Bilans macroscopiques

SVF

- ✘ Montrer que le bilan d'une grandeur extensive dans un tdc, en régime stationnaire, donne :

$$\frac{DG}{Dt} = D_m (g_s - g_e)$$

- ✘ Montrer que le bilan d'une grandeur extensive dans un tdc comprenant deux niveaux d'entrée (mélange), en régime stationnaire, donne :

$$\frac{DG}{Dt} = (D_{me,1} + D_{me,2}) g_s - (D_{me,1} g_{e1} + D_{me,2} g_{e2})$$

- ✘ Déterminer la puissance de la pompe utilisée pour pomper de l'eau sur une hauteur  $h$  avec un débit volumique  $D_v$  (on négligera les pertes de charges).
- ✘ Retrouver le théorème de Bernoulli par un bilan d'énergie cinétique.
- ✘ Déterminer la force exercée par un opérateur pour maintenir la conduite fixe (écoulement parfait) :

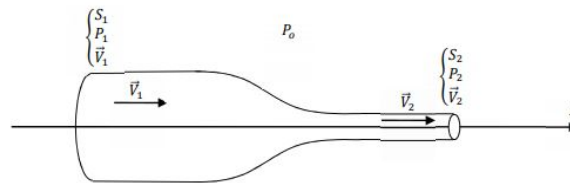
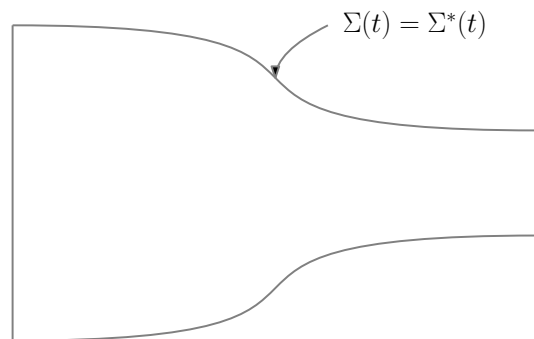


FIGURE 35

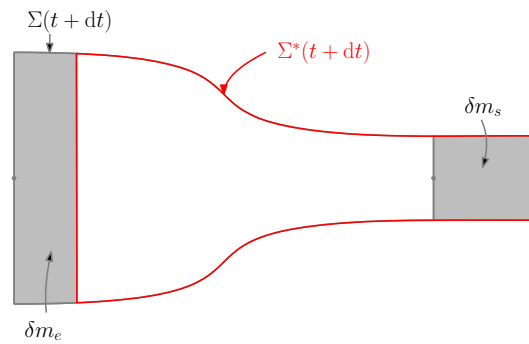
- ✘ En utilisant le modèle de Betz, déterminer le rendement maximal théorique d'une éolienne.
- ✘ A l'aide d'un bilan d'énergie cinétique, déterminer la puissance des forces de viscosité dans une conduite.

#### ✘ Bilan d'une grandeur extensive dans un tdc

- ☛ On considère le système fermé ( $S^*$ ) coïncidant à l'instant  $t$  avec le système ouvert ( $S$ ), comme représenté figure 36. On considère que l'écoulement est stationnaire.

FIGURE 36 – Système ouvert et système fermé coïncidant à l'instant  $t$ 

- ☛ À l'instant  $t + dt$ , le système fermé s'est déplacé, comme représenté figure 37.

FIGURE 37 – Système ouvert et système fermé à l'instant  $t + dt$ 

- La grandeur extensive  $G$  de  $(S^*)$  s'écrit donc :

- ✓ À l'instant  $t$  :

$$G^*(t) = G(t)$$

- ✓ À l'instant  $t + dt$  :

$$G^*(t + dt) = G(t + dt) - \delta m_e g_e + \delta m_s g_s$$

- En différenciant ces deux expressions, on obtient :

$$G^*(t + dt) - G^*(t) = G(t + dt) - G(t) - \delta m_e g_e + \delta m_s g_s$$

Soit, en divisant par  $dt$ , et en utilisant la notation différentielle « $D$ » pour les dérivées particulaire :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{dG}{dt} - \frac{\delta m_e}{dt} g_e + \frac{\delta m_s}{dt} g_s$$

- En régime stationnaire :

- ✓ La grandeur  $G$  du système ouvert ( $S$ ) est indépendante du temps,
- ✓ Le débit massique se conserve :

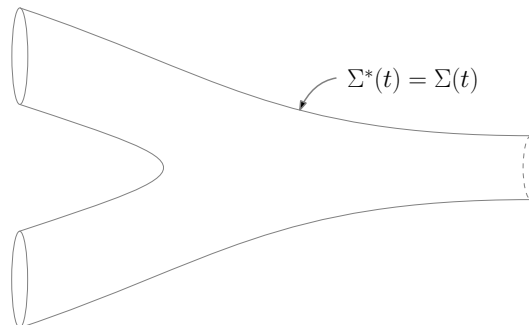
$$D_m = \frac{\delta m_e}{dt} = \frac{\delta m_s}{dt}$$

On obtient donc :

$$\frac{DG}{Dt} = D_m (g_s - g_e)$$

### ✗ Bilan d'une grandeur extensive dans un tdc avec deux entrées

- On considère le système fermé ( $S^*$ ) coïncidant à l'instant  $t$  avec le système ouvert ( $S$ ), comme représenté figure 38. On considère que l'écoulement est stationnaire.

FIGURE 38 – Système ouvert et système fermé coïncidant à l'instant  $t$ 

- À l'instant  $t + dt$ , le système fermé s'est déplacé, comme représenté figure 44.



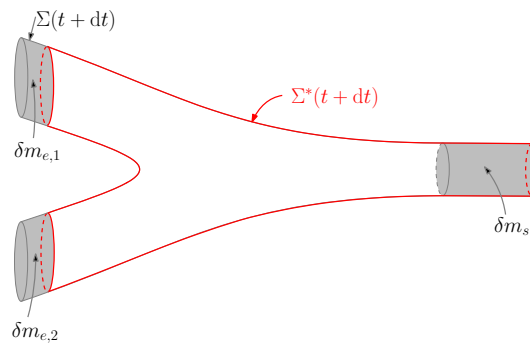


FIGURE 39 – Système ouvert et système fermé à l'instant  $t + dt$

- La grandeur extensive  $G$  de  $(S^*)$  s'écrit donc :

- ✓ À l'instant  $t$  :

$$G^*(t) = G(t)$$

- ✓ À l'instant  $t + dt$  :

$$G^*(t + dt) = G(t + dt) - \delta m_{e,1} g_{e,1} - \delta m_{e,2} g_{e,2} + \delta m_s g_s$$

- En différenciant ces deux expressions, on obtient :

$$G^*(t + dt) - G^*(t) = G(t + dt) - G(t) - \delta m_{e,1} g_{e,1} - \delta m_{e,2} g_{e,2} + \delta m_s g_s$$

Soit, en divisant par  $dt$ , et en utilisant la notation différentielle « $D$ » pour les dérivées particulaire :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{dG}{dt} - \frac{\delta m_{e,1}}{dt} g_{e,1} - \frac{\delta m_{e,2}}{dt} g_{e,2} + \frac{\delta m_s}{dt} g_s$$

- En régime stationnaire :

- ✓ La grandeur  $G$  du système ouvert  $(S)$  est indépendante du temps,
- ✓ Le débit massique se conserve :

$$D_m = \frac{\delta m_{e,1}}{dt} + \frac{\delta m_{e,2}}{dt} = \frac{\delta m_s}{dt}$$

On obtient donc :

$$\frac{DG}{Dt} = (D_{me,1} + D_{me,2}) g_s - (D_{me,1} g_{e,1} + D_{me,2} g_{e,2})$$

### ✗ Puissance d'une pompe

- On modélise le système comme suit.

- ✓ L'écoulement d'eau est considéré comme parfait, incompressible - homogène (masse volumique  $\mu$ ) et stationnaire.
- ✓ On néglige les pertes de charges.
- ✓ L'eau est aspirée par la pompe dans l'eau sous une pression proche de la pression atmosphérique ( $P_0$ ) avec une vitesse  $V_A$  négligeable devant  $V_B$  (figure 40).
- ✓ À la sortie de la pompe, l'eau est dirigée dans une conduite de section  $S$  jusqu'au point  $B$  : le débit volumique vaut donc :

$$D_v = S V_B$$

- ✓ On note  $\mathcal{P}$  la puissance de la pompe.

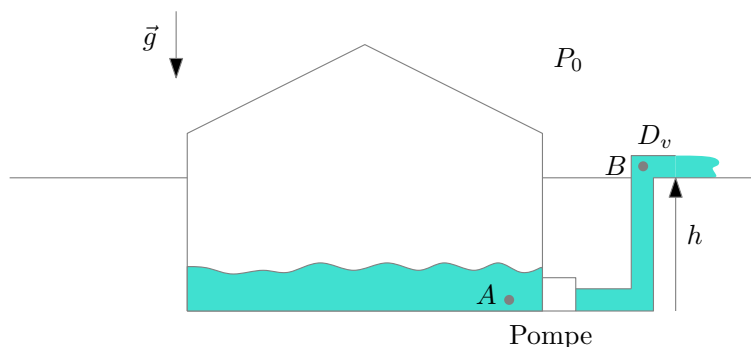


FIGURE 40 – Modélisation du pompage

- Un bilan d'énergie cinétique entre les points (A) et (B) donne :

$$\frac{D_m}{2} (V_B^2 - V_A^2) = \frac{D_m}{2} V_B^2 = \frac{\mu D_V^3}{S^2} = \mathcal{P} + \mathcal{P}_{poids} + \mathcal{P}_{pression}$$

Avec :

- La puissance du poids :

$$\mathcal{P}_{poids} = D_m g (z_A - z_B) = -\mu D_V g h$$

- la puissance des forces de pression :

$$\mathcal{P}_{pression} = \frac{D_m}{\mu} (P_A - P_B) = 0$$

On obtient donc :

$$\frac{\mu D_V^3}{S^2} = -\mu D_V g h + \mathcal{P}$$

Soit :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu D_V^3}{S^2} + \mu D_V g h$$

### ✗ Théorème de Bernoulli

- On considère un tdc élémentaire le long d'une ldc, comme représenté figure 41
- on se place dans le cadre suivant : écoulement parfait, incompressible - homogène (masse volumique  $\mu$ ), stationnaire.
- On considère le système fermé ( $S^*$ ) coïncidant à l'instant  $t$  avec le système ouvert ( $S$ ), comme représenté figure 41.

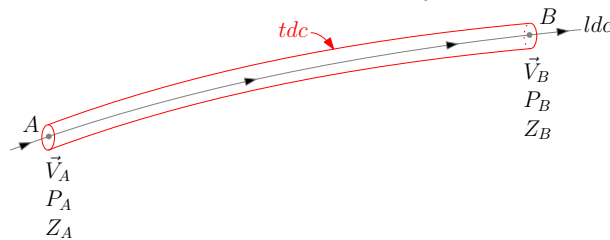


FIGURE 41 – Système ouvert et système fermé coïncidant à l'instant  $t$

- À l'instant  $t + dt$ , le système fermé s'est déplacé, comme représenté figure 42.

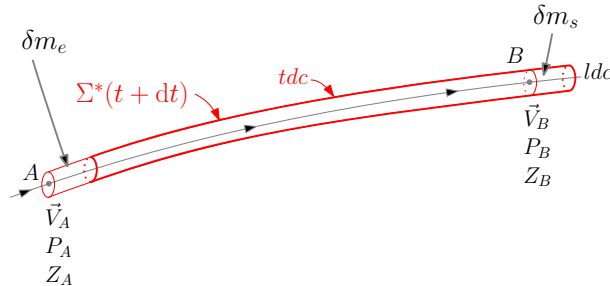


FIGURE 42 – Système fermé à l'instant  $t + dt$

- L'énergie cinétique de ( $S^*$ ) s'écrit donc :

- À l'instant  $t$  :

$$E_c^*(t) = E_c(t)$$

- À l'instant  $t + dt$  :

$$E_c^*(t + dt) = E_c(t + dt) - \frac{1}{2} \delta m_e V_A^2 + \frac{1}{2} \delta m_s V_B^2$$

- En différenciant ces deux expressions, on obtient :

$$E_c^*(t + dt) - E_c^*(t) = E_c(t + dt) - E_c(t) - \frac{1}{2} \delta m_e V_A^2 + \frac{1}{2} \delta m_s V_B^2$$

Soit, en divisant par  $dt$ , et en utilisant la notation différentielle «D» pour les dérivées particulaire :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \frac{dE_c}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\delta m_e}{dt} V_A^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta m_s}{dt} V_B^2$$

☛ En régime stationnaire :

- ✓ L'énergie cinétique du système ouvert ( $S$ ) est indépendante du temps,
- ✓ Le débit massique se conserve :

$$D_m = \frac{\delta m_e}{dt} = \frac{\delta m_s}{dt}$$

On obtient donc :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \frac{D_m}{2} (V_B^2 - V_A^2)$$

☛ le bilan des actions mécaniques, met en jeu les puissances suivantes :

- ✓ La puissance du poids :

$$\mathcal{P}_{poids} = D_m g (z_A - z_B)$$

- ✓ la puissance des forces de pression :

$$\mathcal{P}_{pression} = \frac{D_m}{\mu} (P_A - P_B)$$

☛ LE TEC donne donc :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \mathcal{P}_{poids} + \mathcal{P}_{pression}$$

Soit :

$$\frac{D_m}{2} (V_B^2 - V_A^2) = D_m g (z_A - z_B) + \frac{D_m}{\mu} (P_A - P_B)$$

☛ Ainsi, la grandeur :

$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu}$$

, se conserve le long de la ldc.

### ✗ Force d'un opérateur

☛ **Bilan de quantité de mouvement, force exercée par le fluide sur la conduite**

- ✓ On considère le système fermé ( $S^*$ ) coïncidant à l'instant  $t$  avec le système ouvert ( $S$ ), comme représenté figure 43. On considère que l'écoulement est stationnaire.

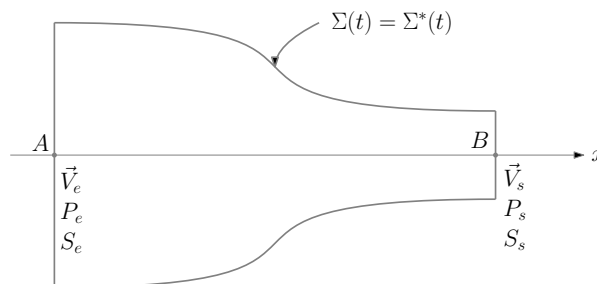


FIGURE 43 – Système ouvert et système fermé coïncidant à l'instant  $t$

- ✓ À l'instant  $t + dt$ , le système fermé s'est déplacé, comme représenté figure 44.

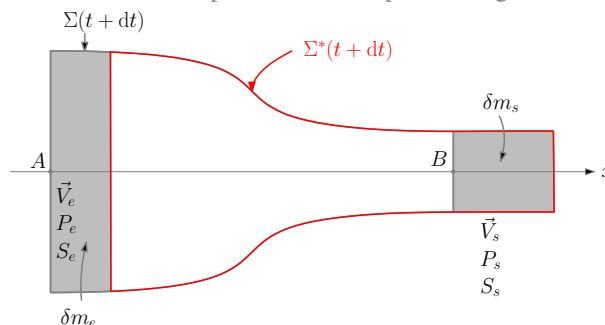


FIGURE 44 – Système ouvert et système fermé à l'instant  $t + dt$

- ✓ La quantité de mouvement de ( $S^*$ ) s'écrit donc :

✎ À l'instant  $t$  :

$$\vec{P}^*(t) = \vec{P}(t)$$

✎ À l'instant  $t + dt$  :

$$\vec{P}^*(t + dt) = \vec{P}(t + dt) - \delta m_e \vec{V}_e + \delta m_s \vec{V}_s$$

- ✓ En différenciant ces deux expressions, on obtient :

$$\vec{P}^*(t + dt) - \vec{P}^*(t) = \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) - \delta m_e \vec{V}_e + \delta m_s \vec{V}_s$$

Soit, en divisant par  $dt$ , et en utilisant la notation différentielle « $D$ » pour les dérivées particulaire :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} - \frac{\delta m_e}{dt} \vec{V}_e + \frac{\delta m_s}{dt} \vec{V}_s$$

- ✓ En régime stationnaire :

✎ La quantité de mouvement du système ouvert ( $S$ ) est indépendante du temps,

✎ Le débit massique se conserve :

$$D_m = \frac{\delta m_e}{dt} = \frac{\delta m_s}{dt}$$

On obtient donc :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = D_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e) = D_m (V_s - V_e) \vec{e}_x$$

- ✓ La bilan des actions mécaniques appliquées au système fermé ( $S^*$ ), en négligeant les effets de la pesanteur sur ( $S^*$ ), donne :

✎ Les forces de pression en entrée :

$$\vec{F}_{\text{pression},e} = P_e S_e \vec{e}_x$$

✎ Les forces de pression en sortie :

$$\vec{F}_{\text{pression},s} = -P_s S_s \vec{e}_x$$

✎ La résultante des forces exercées par la conduite sur le fluide (attention, l'air extérieur n'agit pas directement sur le fluide !):

$$\vec{F}_{c \rightarrow f} = F_{c \rightarrow f} \vec{e}_x$$

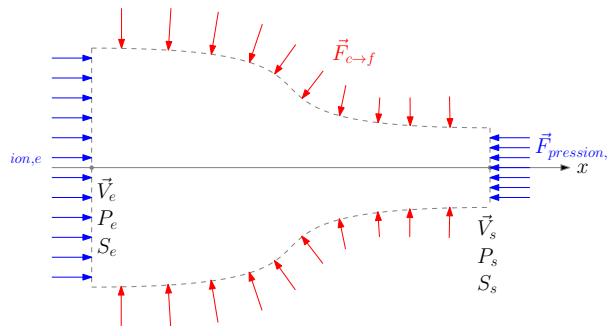


FIGURE 45 – Bilan des actions mécaniques agissant sur le système fermé ( $S^*$ )

- ✓ Le TRC appliqué au système ( $S^*$ ), donne :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \vec{F}_{\text{pression},e} + \vec{F}_{\text{pression},s} + \vec{F}_{c \rightarrow f}$$

Soit :

$$D_m (V_s - V_e) = P_e S_e - P_s S_s + F_{c \rightarrow f}$$

Et donc :

$$F_{c \rightarrow f} = D_m (V_s - V_e) - P_e S_e + P_s S_s$$

- ✓ On peut simplifier cette expression en considérant que l'écoulement est parfait et incompressible (masse volumique  $\mu$ ). En effet, dans ce cas là :

☞ On a conservation du débit volumique :

$$D_m = \mu D_v = \mu S_e V_e = \mu S_s V_s \Rightarrow V_s = \frac{S_e}{S_s} V_e$$

☞ On peut appliquer le théorème de Bernoulli (HYP : stationnaire, incompressible-homogène, parfait), sur la ligne de courant allant de A à B :

$$\frac{1}{2}\mu V_e^2 + P_e = \frac{1}{2}\mu V_s^2 + P_s \Rightarrow P_s = P_e + \frac{\mu}{2}(V_e^2 - V_s^2) = P_e + \frac{\mu}{2}V_e^2\left(1 - \frac{S_e^2}{S_s^2}\right)$$

D'où :

$$F_{c \rightarrow f} = \mu S_e V_e^2 \left(\frac{S_e}{S_s} - 1\right) + P_e (S_s - S_e) + \frac{\mu}{2} S_s V_e^2 \left(1 - \frac{S_e^2}{S_s^2}\right)$$

Soit, après simplifications :

$$F_{c \rightarrow f} = P_e (S_s - S_e) + \frac{\mu V_e^2}{2 S_s} (S_e - S_s)^2$$

☞ D'après le principe des actions réciproques, on en déduit la force exercée par le fluide sur la conduite :

$$\vec{F}_{f \rightarrow c} = -\vec{f}_{c \rightarrow f} = -\left[ P_e (S_s - S_e) + \frac{\mu V_e^2}{2 S_s} (S_e - S_s)^2 \right] \vec{e}_x$$

- ☞ Le premier terme intervenant dans l'expression de  $F_{f \rightarrow c}$  étant prédominant, on retrouve une résultat intuitif :  
Si  $S_e > S_s$  la force exercée par la conduite sur le fluide est dirigée vers la droite.  
Si  $S_e < S_s$  la force exercée par la conduite sur le fluide est dirigée vers la gauche.

#### ☛ Force de l'opérateur

- ✓ Le bilan des actions mécaniques exercées sur la conduite donne :

☞ La force de l'opérateur :  $\vec{F}_{op}$

☞ La force exercée par le fluide sur la conduite :  $\vec{F}_{f \rightarrow c}$

☞ La résultante des forces de pression s'exerçant sur la surface latérale de la conduite :  $\vec{F}_L$

☞ Le poids (éventuel) si non compensé : non pris en compte ici, l'opérateur ne compense que l'écoulement.

- ✓ La résultante des forces latérales s'exerçant sur la conduite, plongée dans  $P_0$ , se calcule en considérant la surface fermée  $\Sigma = S_e \cup S_s \cup S_L$  entièrement plongée dans  $P_0$  :

$$\oiint_{\Sigma} P_0 \vec{d\Sigma} = 0 = \iint_{S_e} P_0 \vec{dS}_e + \iint_{S_s} P_0 \vec{dS}_s + \iint_{S_L} P_0 \vec{dS}_L$$

En considérant tous les vecteurs surface sortant.

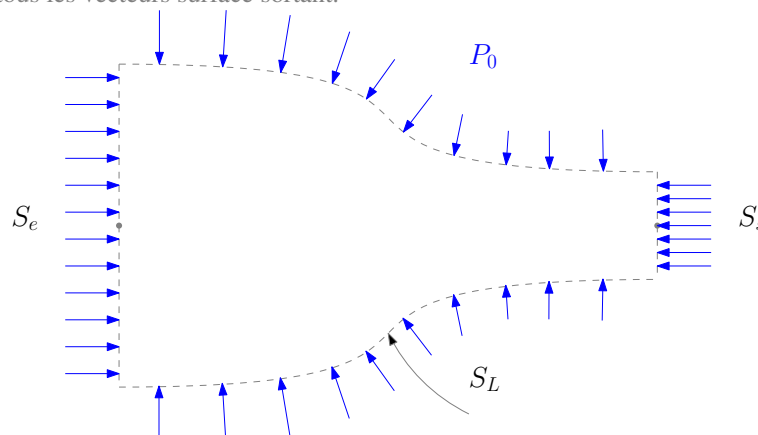


FIGURE 46 – Calcul de la résultante des forces de pression latérales exercées sur la conduite

Sachant que :

$$\iint_{S_e} P_0 \overrightarrow{dS}_e = -P_0 S_e \vec{e}_x$$

$$\iint_{S_s} P_0 \overrightarrow{dS}_s = P_0 S_s \vec{e}_x$$

$$\iint_{S_L} P_0 \overrightarrow{dS}_L = -\vec{F}_L$$

On en déduit :

$$\vec{F}_L = -P_0 S_e \vec{e}_x + P_0 S_s \vec{e}_x$$

✓ L'équilibre de la conduite donne donc :

$$\vec{0} = \vec{F}_{op} + \vec{F}_{f \rightarrow c} + \vec{F}_L \Rightarrow \vec{F}_{op} = \left[ P_e (S_s - S_e) + \frac{\mu V_e^2}{2S_s} (S_e - S_s)^2 \right] \vec{e}_x + P_0 S_e \vec{e}_x - P_0 S_s \vec{e}_x$$

✗ **Modèle de Betz**

- On étudie l'écoulement d'air sur une hélice d'éolienne. Autour de cette hélice, on construit le tube de champ, plongé dans la pression atmosphérique  $P_0$ , représenté figure 47. Cet écoulement est considéré comme incompressible (masse volumique  $\mu$ ), stationnaire et parfait.

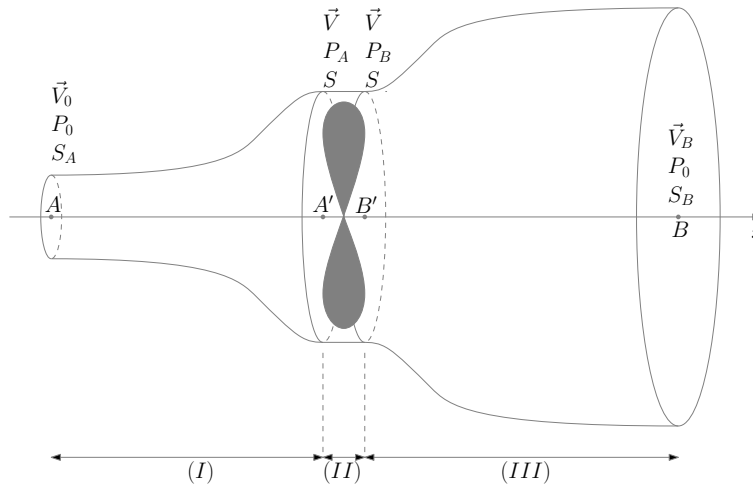


FIGURE 47 – Tube de courant autour de l'hélice

- Bilan de quantité de mouvement sur le système fermé ( $S^* = \{I, II, III\}$ )**

✓ On considère le système fermé ( $S^*$ ) coïncidant à l'instant ( $t$ ) avec le système ouvert ( $S$ ), comme représenté figure 48.

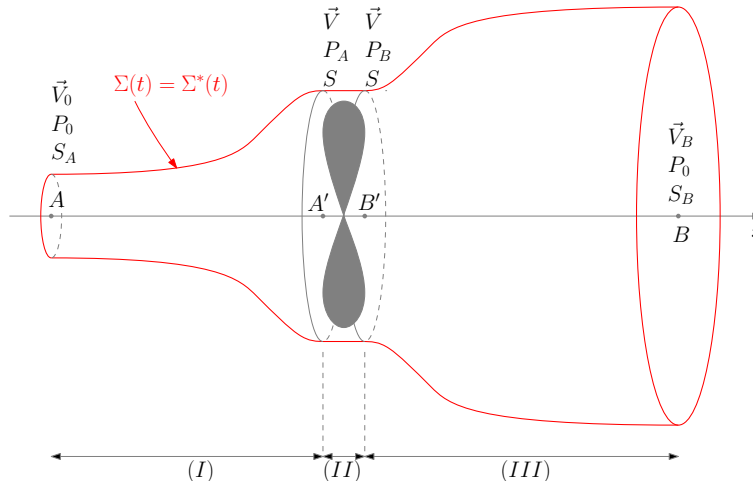


FIGURE 48 – Système ouvert et système fermé coïncidant à l'instant  $t$

- ✓ À l'instant  $t + dt$ , le système fermé s'est déplacé, comme représenté figure 49.

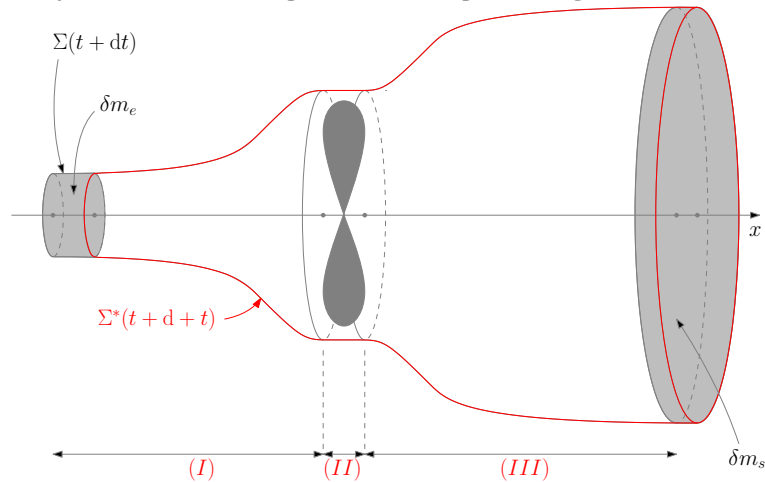


FIGURE 49 – Système ouvert et système fermé coïncidant à l'instant  $t + dt$

- ✓ La quantité de mouvement de  $(S^*)$  s'écrit donc :

☞ À l'instant  $t$  :

$$\vec{P}^*(t) = \vec{P}(t)$$

☞ À l'instant  $t + dt$  :

$$\vec{P}^*(t + dt) = \vec{P}(t + dt) - \delta m_e \vec{V}_A + \delta m_s \vec{V}_B$$

- ✓ En différenciant ces deux expressions, on obtient :

$$\vec{P}^*(t + dt) - \vec{P}^*(t) = \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) - \delta m_e \vec{V}_0 + \delta m_s \vec{V}_B$$

Soit, en divisant par  $dt$ , et en utilisant la notation différentielle « $D$ » pour les dérivées particulaire :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} - \frac{\delta m_e}{dt} \vec{V}_0 + \frac{\delta m_s}{dt} \vec{V}_B$$

- ✓ En régime stationnaire :

- ☞ La quantité de mouvement du système ouvert  $(S)$  est indépendante du temps,
- ☞ Le débit massique se conserve :

$$D_m = \frac{\delta m_e}{dt} = \frac{\delta m_s}{dt}$$

On obtient donc :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = D_m (\vec{V}_B - \vec{V}_0) = D_m (V_B - V_0) \vec{e}_x$$

- ✓ La bilan des actions mécaniques appliquées au système fermé  $(S^*)$ , en négligeant les effets de la pesanteur sur  $(S^*)$ , donne :

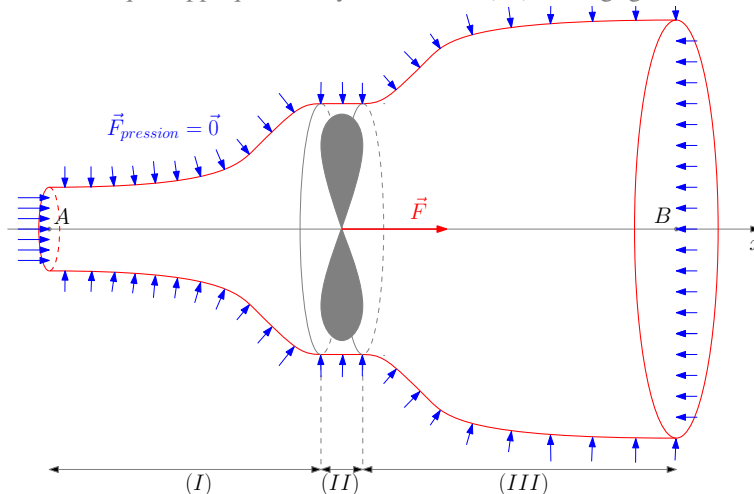


FIGURE 50 – Bilan des actions mécaniques agissant sur le système fermé  $(S^*)$

✎ Résultante des forces de pression :

$$\vec{F}_{\text{pression}} = \oiint P_0 \vec{ds} = \vec{0}$$

✎ La résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide :

$$\vec{F} = F \vec{e}_x$$

✓ Le TRC appliqué au système ( $S^*$ ), donne :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \vec{F}$$

Soit :

$$F = D_m (V_B - V_0) = \mu S V (V_B - V_0)$$

✎ Bilan de quantité de mouvement sur le système fermé ( $S^*$ ) = {II}

✓ On considère le système fermé ( $S^*$ ) coïncidant à l'instant ( $t$ ) avec le système ouvert ( $S$ ), comme représenté figure 51.

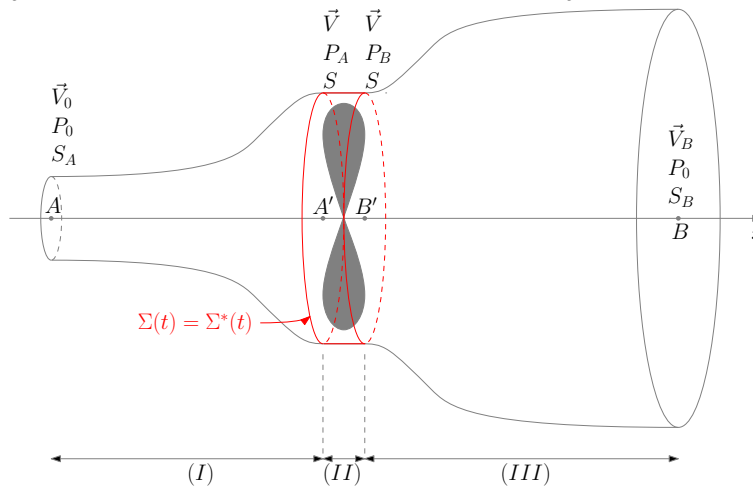


FIGURE 51 – Système ouvert et système fermé coïncidant à l'instant  $t$

✓ À l'instant  $t + dt$ , le système fermé s'est déplacé, comme représenté figure 52.

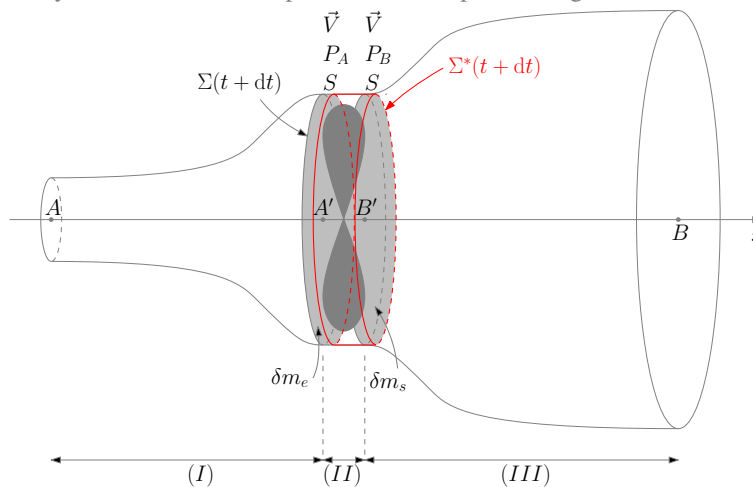


FIGURE 52 – Système ouvert et système fermé coïncidant à l'instant  $t + dt$

✓ La quantité de mouvement de ( $S^*$ ) s'écrit donc :

✎ À l'instant  $t$  :

$$\vec{P}^*(t) = \vec{P}(t)$$

✎ À l'instant  $t + dt$  :

$$\vec{P}^*(t + dt) = \vec{P}(t + dt) - \delta m_e \vec{V} + \delta m_s \vec{V}$$



- ✓ En différenciant ces deux expressions, on obtient :

$$\vec{P}^*(t + dt) - \vec{P}^*(t) = \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) - \delta m_e \vec{V} + \delta m_s \vec{V}$$

Soit, en divisant par  $dt$ , et en utilisant la notation différentielle « $D$ » pour les dérivées particulaire :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} - \frac{\delta m_e}{dt} \vec{V} + \frac{\delta m_s}{dt} \vec{V}$$

- ✓ En régime stationnaire :

- ☞ La quantité de mouvement du système ouvert ( $S$ ) est indépendante du temps,
- ☞ Le débit massique se conserve :

$$D_m = \frac{\delta m_e}{dt} = \frac{\delta m_s}{dt}$$

On obtient donc :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = D_m (\vec{V} - \vec{V}) = \vec{0}$$

- ✓ La bilan des actions mécaniques appliquées au système fermé ( $S^*$ ), en négligeant les effets de la pesanteur sur ( $S^*$ ), donne :

- ☞ Les forces de pression en entrée :

$$\vec{F}_{\text{pression},A} = P_A S \vec{e}_x$$

- ☞ Les forces de pression en sortie :

$$\vec{F}_{\text{pression},B} = -P_B S \vec{e}_x$$

- ☞ La résultante des forces de pression latérale est nulle car la section du tdc est constante.
- ☞ La résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide :

$$\vec{F} = F \vec{e}_x$$

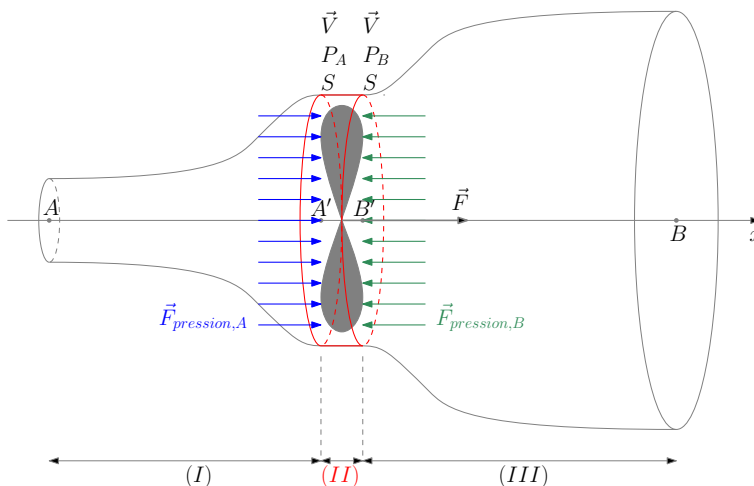


FIGURE 53 – Bilan des actions mécaniques agissant sur le système fermé ( $S^*$ )

- ✓ Le TRC appliqué au système ( $S^*$ ), donne :

$$\vec{0} = \vec{F}_{\text{pression},A} + \vec{F}_{\text{pression},B} + \vec{F}$$

Soit :

$$F = S (P_B - P_A)$$

- ✓ On modifie cette expression en appliquant le théorème de Bernoulli sur le ldc allant de  $A$  vers  $A'$  et la ldc allant de  $B'$  vers  $B$  :

- ☞ Bernoulli entre  $A$  et  $A'$  :

$$\frac{1}{2} \mu V_0^2 + P_0 = \frac{1}{2} \mu V^2 + P_A \Rightarrow P_A = P_0 + \frac{\mu}{2} (V_0^2 - V^2)$$

☞ Bernoulli entre  $B'$  et  $B$  :

$$\frac{1}{2}\mu V^2 + P_B = \frac{1}{2}\mu V_B^2 + P_0 \Rightarrow P_B = P_0 + \frac{\mu}{2}(V_B^2 - V^2)$$

✓ On en déduit une nouvelle expression de  $F$  :

$$F = \frac{\mu}{2}S(V_B^2 - V^2)$$

### ☛ Puissance reçue par l'hélice

✓ En égalisant les deux expressions de la force, on obtient une relation entre  $V$  et  $V_0$  et  $V_B$  :

$$F = \mu S V (V_B - V_0) = \frac{\mu}{2}S(V_B^2 - V^2) \Rightarrow V = \frac{V_0 + V_B}{2}$$

✓ La puissance reçue par l'air en écoulement vaut :

$$\mathcal{P}_f = \vec{F} \cdot \vec{V} = \frac{\mu}{2}S(V_B^2 - V_0^2)V = \frac{\mu}{4}S(V_B^2 - V_0^2)(V_B + V_0)$$

✓ La puissance reçue par l'hélice vaut donc :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu}{4}S(V_0^2 - V_B^2)(V_B + V_0)$$

Soit, en introduisant  $x = \frac{V_B}{V_0}$  :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu}{4}S V_0^3 (1 - x^2)(1 + x)$$

✓ Cette puissance est maximale pour  $x = x_m$  tel que :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx} = 0 = \frac{\mu}{4}S V_0^3 ((1 - x_m^2) - 2x_m(1 + x_m)) = \frac{\mu}{4}S V_0^3 (1 + x_m)(1 - 3x_m) \Rightarrow x_m = \frac{1}{3}$$

### ☛ Rendement et rendement maximal

✓ Le rendement de l'hélice est défini de la manière suivante :

$$r = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_c}$$

Où  $\mathcal{P}_c$  est la puissance cinétique incidente, calculée en considérant un vent de vitesse  $V_0$  arrivant sur toute la surface définie par l'hélice :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2}D_m V_0^2 = \frac{1}{2}S\mu V_0^3$$

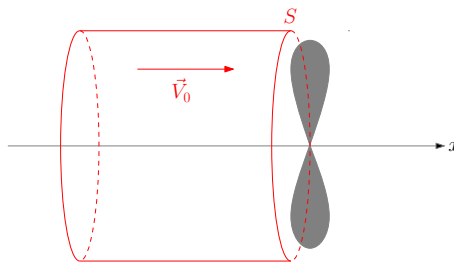


FIGURE 54 – Puissance cinétique incidente

On a donc :

$$r = \frac{\frac{\mu}{4}V_0^3(1 - x^2)(1 + x)}{\frac{1}{2}\mu V_0^3} = \frac{(1 - x^2)(1 + x)}{2}$$

✓ Le rendement maximal vaut :

$$r_m = \frac{(1 - x_m^2)(1 + x_m)}{2} = \frac{16}{27}$$

C'est la limite de Betz.

### ✗ Puissance des forces de viscosité

- On considère un écoulement de Poiseuille dans une conduite de rayon  $R$  constant, comme représenté figure 55. L'écoulement est supposé stationnaire, incompressible (masse volumique  $\mu$ ), newtonien (viscosité dynamique  $\eta$ ).

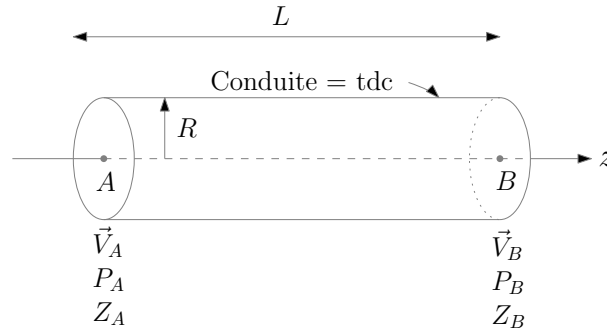


FIGURE 55

- La vitesse dans l'écoulement est de la forme :

$$\vec{V}(M) = V(r) \vec{e}_z$$

- En notant  $\Delta P = P_A - P_B$ , on introduit le débit de Poiseuille :

$$D_v = \frac{\Delta P \pi R^4}{8 \eta L}$$

- On définit la vitesse moyenne de l'écoulement sur une section  $S$  de la conduite (vitesse débitante) :

$$\vec{V} = V \vec{e}_z = \frac{1}{S} \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \frac{D_v}{\pi R^2} \vec{e}_z = \frac{\Delta P R^2}{8 \eta L} \vec{e}_z$$

- Le bilan d'énergie cinétique, en régime stationnaire, sur la portion de fluide comprise entre  $A$  et  $B$ , donne :

$$\frac{D\vec{P}}{dt} = \mu D_v (\vec{V}_A - \vec{V}_B)$$

Sachant que les vitesses  $\vec{V}_A$  et  $\vec{V}_B$  sont les vitesses débitantes en  $A$  et en  $B$ , on a :

$$\vec{V} = \vec{V}_A = \vec{V}_B$$

D'où :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \vec{0}$$

- Le bilan des actions mécaniques appliquées au fluide donne :

- ✓ Puissance des forces de pression :

$$\mathcal{P}_{pression} = \frac{\delta W_{pression}}{dt} = \frac{P_A \delta v_A}{dt} - \frac{P_B \delta v_B}{dt} = D_{v,A} P_A - D_{v,B} P_B = D_v (P_A - P_B)$$

- ✓ La puissance du poids : négligé dans le cadre de l'écoulement de Poiseuille

- ✓ La puissance des actions intérieures : l'écoulement étant incompressible, la puissance des actions intérieures est la puissance des forces de viscosité à l'intérieur de l'écoulement. On la note  $\mathcal{P}_{visc}$

- Le TEC appliqué au système, donne donc :

$$0 = \mathcal{P}_{pression} + \mathcal{P}_{visc} \Rightarrow \mathcal{P}_{visc} = -D_v (P_A - P_B)$$

Soit en remplaçant  $P_A - P_B = -\Delta P = \frac{8 \eta L D_v}{\pi R^4}$  et  $D_v = V \pi R^2$ , on obtient :

$$\mathcal{P}_{visc} = -D_v \Delta P = -\frac{8 \eta L D_v^2}{\pi R^4} = -8 \pi \eta L V^2$$