

Q01. L'invariance autour de l'axe (Oz) impose en particulier $V(x, 0, z) = V(0, y = x, z)$ c'est-à-dire $\boxed{\alpha = \beta}$.

Par ailleurs, dans une **zone vide de charges**, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ qui donne : $\boxed{0 = 2 + 2\alpha + 2\beta}$.

En combinant les deux relations, il vient : $\boxed{\alpha = \beta = -1/2}$.

Q02. On commence par exprimer le champ électrostatique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \vec{E} = \frac{\eta V_0}{\ell_0^2} [-2z\vec{u}_z + x\vec{u}_x + y\vec{u}_y]$$

Et donc pour la force électrostatique :

$$\vec{F} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{F} = \frac{e\eta V_0}{\ell_0^2} [2z\vec{u}_z - x\vec{u}_x - y\vec{u}_y]$$

Si on ne tient pas compte du poids à ce stade, l'origine du piège est une position d'équilibre $\vec{F} = \vec{0}$ mais c'est une **position d'équilibre instable car la force est au moins répulsive dans une des directions au voisinage du centre**.

Remarque : plus généralement, pour une charge négative, il faudrait, au voisinage de l'origine un champ électrostatique partout sortant pour obtenir une force attractive dans toutes les directions. **Un champ partout sortant imposerait un flux non nul de celui-ci à travers une surface fermée entourant l'origine et ceci en contradiction avec le théorème de Gauss pour une zone vide de charges.**

Q03. Pour la suite, on suppose le régime « lentement » variable pour continuer à utiliser $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen en ne tenant compte que de la force électrostatique :

$$m\vec{a} = \frac{e\eta V_0 \cos(\Omega t)}{\ell_0^2} [2z\vec{u}_z - x\vec{u}_x - y\vec{u}_y]$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{e\eta V_0}{m\ell_0^2} \cos(\Omega t)x = 0 ; \ddot{y} + \frac{e\eta V_0}{m\ell_0^2} \cos(\Omega t)y = 0 ; \ddot{z} - 2\frac{e\eta V_0}{m\ell_0^2} \cos(\Omega t)z = 0$$

Avec $\omega^2 = \frac{e\eta V_0}{m\ell_0^2}$, les équations se réécrivent :

$$\ddot{x} + 2\frac{\omega^2}{\Omega^2} \cos(\Omega t)\frac{\Omega^2}{2}x = 0 ; \ddot{y} + 2\frac{\omega^2}{\Omega^2} \cos(\Omega t)\frac{\Omega^2}{2}y = 0 ; \ddot{z} - 4\frac{\omega^2}{\Omega^2} \cos(\Omega t)\frac{\Omega^2}{2}z = 0$$

On en déduit $\boxed{n_x = n_y = 2}$ et $\boxed{n_z = -4}$.

Q04. Considérons la relation (2) moyennée sur une période $2\pi/\Omega$, il vient :

$$\langle \ddot{r}_i \rangle + \left\langle q_i \cos(\Omega t) \frac{\Omega^2}{2} r_i \right\rangle = 0$$

avec $\langle \ddot{r}_i \rangle = \left\langle \ddot{R}_i \right\rangle + \underbrace{\left\langle \ddot{\xi}_i \right\rangle}_{=0} = \left\langle \ddot{R}_i \right\rangle$. Par ailleurs :

$$\left\langle q_i \cos(\Omega t) \frac{\Omega^2}{2} (R_i + \xi_i) \right\rangle = q_i \frac{\Omega^2}{2} \langle \cos(\Omega t) R_i \rangle + q_i \frac{\Omega^2}{2} \langle \cos(\Omega t) \xi_i \rangle$$

R_i peut être supposé constant sur une période d'intégration $2\pi/\Omega$, on peut alors le sortir de la moyenne du premier terme du membre de droite, en conséquence :

$$\left\langle q_i \cos(\Omega t) \frac{\Omega^2}{2} (R_i + \xi_i) \right\rangle = q_i \frac{\Omega^2}{2} R_i \underbrace{\langle \cos(\Omega t) \rangle}_{=0} + q_i \frac{\Omega^2}{2} \langle \cos(\Omega t) \xi_i \rangle = q_i \frac{\Omega^2}{2} \langle \cos(\Omega t) \xi_i \rangle$$

En regroupant les termes, on obtient l'expression demandée :

$$\boxed{\left\langle \ddot{R}_i \right\rangle + q_i \frac{\Omega^2}{2} \langle \cos(\Omega t) \xi_i(t) \rangle = 0}$$

Q05a. Très généralement la fonction $\xi_i(t)$, $2\pi/\Omega$ -périodique, se décompose en série de Fourier selon :

$$\xi_i(t) = \xi_{i,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n} \cos(n\Omega t + \varphi_{i,n})$$

Comme $\xi_i(t)$ est supposé de moyenne nulle, on a $\xi_{i,0} = 0$ et en se limitant au fondamental, on en déduit : $\boxed{\xi_i(t) = \xi_{i,1} \cos(\Omega t + \varphi_{i,1})}$.

Q05b. On commence par reporter $r_i(t) = R_i(t) + \xi_i(t)$ dans la relation (2), il vient :

$$\ddot{\xi}_i(t) + \ddot{R}_i(t) + q_i \cos(\Omega t) \frac{\Omega^2}{2} [R_i(t) + \xi_i(t)] = 0 \quad (2')$$

On soustrait alors membre à membre cette relation (2') avec la relation (3) de l'énoncé, on en déduit (relation 2bis) :

$$\ddot{\xi}_i(t) + q_i \cos(\Omega t) \frac{\Omega^2}{2} R_i(t) + \left[\ddot{R}_i(t) - \left\langle \ddot{R}_i(t) \right\rangle \right] + q_i \frac{\Omega^2}{2} [\cos(\Omega t) \xi_i(t) - \langle \cos(\Omega t) \xi_i(t) \rangle] = 0$$

R_i variant peu à l'échelle de $2\pi/\Omega$, on peut le confondre avec sa moyenne, donc : $\left[\ddot{R}_i(t) - \left\langle \ddot{R}_i(t) \right\rangle \right] \approx 0$

Avec la forme proposée pour $\xi_i(t)$, il vient :

$$\cos(\Omega t) \xi_i(t) = \xi_{i,1} \cos(\Omega t) \cos(\Omega t + \varphi_{i,1}) = \frac{\xi_{i,1}}{2} [\cos(2\Omega t + \varphi_{i,1}) + \cos(\varphi_{i,1})]$$

Et, par ailleurs : $\langle \cos(\Omega t) \xi_i(t) \rangle = \frac{\xi_{i,1}}{2} \cos(\varphi_{i,1})$, en conséquence :

$$[\cos(\Omega t)\xi_i(t) - \langle \cos(\Omega t)\xi_i(t) \rangle] = \frac{\xi_{i,1}}{2} \cos(2\Omega t + \varphi_{i,1})$$

Ce dernier terme ne diffère de 0 que d'un terme oscillant en 2Ω , ce reliquat devrait donc être égalisé avec les termes de même pulsation de $\xi_i(t)$ que nous avons négligés, on peut donc négliger ce dernier terme pour la suite et la relation (2bis) se simplifie selon :

$$\ddot{\xi}_i(t) + q_i \frac{\Omega^2}{2} \cos(\Omega t) R_i(t) = 0$$

Pour $\xi_i(t)$, on peut alors proposer $\xi_i(t) = \frac{q_i}{2} R_i(t) \cos(\Omega t)$. Vérifions que ce résultat convient :

$$\dot{\xi}_i(t) = \frac{q_i}{2} \left[-\Omega \sin(\Omega t) R_i(t) + \cos(\Omega t) \dot{R}_i(t) \right] \approx -\frac{q_i \Omega}{2} \sin(\Omega t) R_i(t)$$

En effet, appelons ω_i la pulsation caractéristique d'évolution de $R_i(t)$, il vient, en ordre de grandeur : $\dot{R}_i(t) \propto \omega_i R_i(t)$. D'après l'indication de l'énoncé, $\omega_i \ll \Omega$ et on peut donc négliger le second de l'expression entre crochets.

En dérivant une seconde fois et selon la même approximation, on obtient le résultat souhaité : $\ddot{\xi}_i(t) = -q_i \frac{\Omega^2}{2} \cos(\Omega t) R_i(t)$.

L'intégration de $\ddot{\xi}_i$ fait normalement apparaître des constantes d'intégration mais, $\dot{\xi}_i$ et ξ_i étant de moyenne nulle, les constantes d'intégration sont nulles ce qui termine de valider l'expression proposée pour $\xi_i(t)$.

Q05c. Avec $q_i \propto \frac{\omega^2}{\Omega^2}$, $\omega \ll \Omega$ impose $|\xi_i| \ll |R_i|$.

Q06. En repartant de la relation (3) et en injectant l'expression obtenue pour $\xi_i(t)$, il vient, toujours en considérant R_i environ constant sur une durée $2\pi/\Omega$:

$$\ddot{R}_i(t) = -\frac{q_i \Omega^2}{2} \left\langle \frac{q_i}{2} \cos^2(\Omega t) R_i(t) \right\rangle = -\frac{q_i^2 \Omega^2}{4} R_i(t) \langle \cos^2(\Omega t) \rangle = -\frac{q_i^2 \Omega^2}{8} R_i(t)$$

On reconnaît l'équation d'un **oscillateur harmonique** de pulsation $\omega_i^2 = \frac{q_i^2 \Omega^2}{8}$

Avec $q_i \ll 1$, $\omega_i \ll \Omega$ en accord avec l'hypothèse initiale.

Q07. À la question Q03, on avait obtenu pour la force selon (Oz) : $F_z = 2 \frac{e\eta V_0}{\ell_0^2} \cos(\Omega t) z$, c'est-à-dire avec $V_0 < 0$:

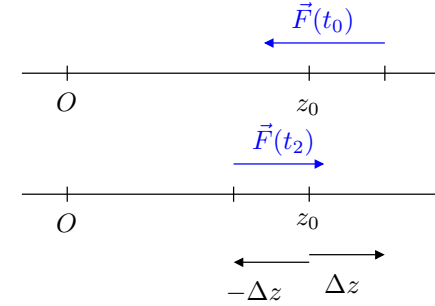
$$F_z(z, t) = -k \cos(\Omega t) z(t) \quad \text{avec} \quad k = \frac{2e\eta |V_0|}{\ell_0^2}$$

Par ailleurs $z(t) = Z(t) + \xi_z(t) = Z(t) \left(1 + \frac{q_i}{2} \cos(\Omega t) \right)$. Enfin sur une période $2\pi/\Omega$, on

suppose $Z(t) \approx z_0 > 0$.

Considérons alors différents instants :

- en $t_0 = 0$, $F_z(t_0 = 0) = -kz_0 (1 + q_i/2)$;
- en $t_1 = \pi/(2\Omega)$, $F_z(t_1) = 0$;
- en $t_2 = \pi/\Omega$, $F_z(t_2) = +kz_0 (1 - q_i/2)$.



La force a beau être tantôt attractive tantôt répulsive, elle est, en norme, un peu plus intense lorsqu'elle est attractive, ce qui en moyenne contribue à créer une force attractive.

Q08. L'expression obtenue pour le potentiel n'est valable que dans un voisinage de l'origine. Pour q_i « faible », **la particule est plongée dans un puits peu profond et les perturbations extérieures risquent de l'en faire sortir plus facilement.**

Q09. $|q_z| = \left| n_z \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right| = \frac{4e\eta |V_0|}{\Omega^2 m \ell_0^2}$, c'est-à-dire $|V_0| = \frac{q_z m \ell_0^2 \Omega^2}{4e\eta}$.

$$\text{A.N. : } V_0 = q_z \times \frac{2 \times 10^{-18} \times (10^{-4})^2 \times (2\pi \times 10^3)^2}{4 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 0,1} = \frac{2\pi^2}{1,6} q_z \approx 12 q_z.$$

Et donc un potentiel V_0 dans l'intervalle $[1, 2 \text{ V}; 3, 6 \text{ V}]$.

Q10. On note que le potentiel est invariant par les transformations $y \rightarrow -y$ et $z \rightarrow -z$ en accord avec la géométrie du dispositif.

Q11. En dehors des sources, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ ce qui impose ici $a_x + a_y + a_z = 0$ et $b_x + b_y + b_z = 0$.

Q12. L'énergie potentielle dans la direction x est donnée par $E_p = \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2$. Chaque degré de liberté énergétique quadratique contribuant à $k_B T/2$ pour l'énergie moyenne, il vient :

$$\left\langle \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 \right\rangle = \frac{k_B T}{2} \Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m \omega_x^2} \quad \Rightarrow \quad \langle x^2 \rangle = \frac{8 k_B T}{m q_x^2 \Omega^2}$$

$\omega_x^2 = \frac{q_x^2 \Omega^2}{8}$

Et pour l'écart-type de l'amplitude $\sigma(x) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$, le potentiel étant pair

$$\langle x \rangle = 0 \text{ et donc } \sigma(x) = \frac{2\sqrt{2}}{q_x \Omega} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}.$$

$$\text{A.N. : } \sigma(x) = \frac{2\sqrt{2}}{0,2 \times 2\pi \times 10^3} \times \sqrt{\frac{1,38 \times 10^{-23} \times 300}{2 \times 10^{-18}}} \Rightarrow \boxed{\sigma(x) \approx 1 \times 10^2 \text{ } \mu\text{m}}$$

Q13. Ici $\sigma(x) \approx \ell_0$. La particule a une probabilité significative de s'écarter au-delà de un écart-type. **Le piège ne paraît pas efficace.**

Q14. À l'équilibre, la force de rappel élastique équilibre le poids :

$$-m\omega_z^2 z_{\text{eq}} - mg = 0 \Rightarrow \boxed{z_0 = -\frac{g}{\omega_z^2}}$$

$$\text{A.N. : } z_0 = \frac{-9,8}{(2\pi \times 10^3)^2} \approx \frac{-9,8}{40 \times 10^6} \Rightarrow \boxed{z_0 \approx -2,5 \times 10^{-7} \text{ m}}$$

Q15. Pour un gaz parfait $P = nk_B T$, le nombre de Knudsen a pour expression :

$$K_n = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi a^2 d P}$$

$$\text{A.N. : } K_n = \frac{1,38 \times 10^{-23} \times 300}{1,4 \times \pi \times 10^{-20} \times 10^{-7} \times 100} \Rightarrow \boxed{K_n \approx 10^4 \gg 1}$$

L'écoulement est libre.

Q16. Pour un gaz classique, avec $k_B T/2$ par degré de liberté énergétique quadratique :

$$\left\langle \frac{m}{2} v^2 \right\rangle = \frac{m}{2} v_{qm}^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \boxed{v_{qm} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}}$$

Un noyau d'azote contient 7 protons et 7 neutrons, donc on peut considérer $m_{N_2} \approx 28 m_p$, en conséquence :

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300}{28 \times 1,7 \times 10^{-27}}} \Rightarrow \boxed{v_{qm} \approx 5 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Q17. D'après la loi de Newton pour les transferts conducto-convectifs :

$$\phi = h (T(t) - T_0) S$$

Q18. On applique le premier principe de la thermodynamique à la particule entre deux instants voisins t et $t + dt$:

$$\begin{aligned} mc_m dT &= \mathcal{P}_{\text{abs},0} (1 + \cos(\omega_m t)) dt - K (T(t) - T_0) dt \\ \Rightarrow \boxed{\frac{mc_m}{K} \frac{dT}{dt} + T(t) &= T_0 + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K} + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K} \cos(\omega_m t)} \end{aligned}$$

Q19. L'équation étant linéaire, il est possible de superposer des solutions.

- pour l'équation homogène, on peut retenir $T_1(t) = C e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{mc_m}{K}$;
- pour la solution particulière associée à l'excitation permanente, il vient immédiatement $T_2(t) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K}$;
- pour la solution particulière associée à l'excitation sinusoïdale, on cherche une solution sous la forme $T_3(t) = A \cos(\omega_m t) + B \sin(\omega_m t)$.

En reportant dans l'équation, il vient :

$$-\tau A \omega_m \sin(\omega_m t) + B \tau \omega_m \cos(\omega_m t) + A \cos(\omega_m t) + B \sin(\omega_m t) = \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K} \cos(\omega_m t)$$

Les fonctions cosinus et sinus formant une famille libre, A et B doivent vérifier :

$$-\tau A \omega_m + B = 0 \quad \text{et} \quad B \tau \omega_m + A = \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K}$$

$$\text{Finalement } A = \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)} \text{ et } B = \frac{\tau \omega_m \mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)}$$

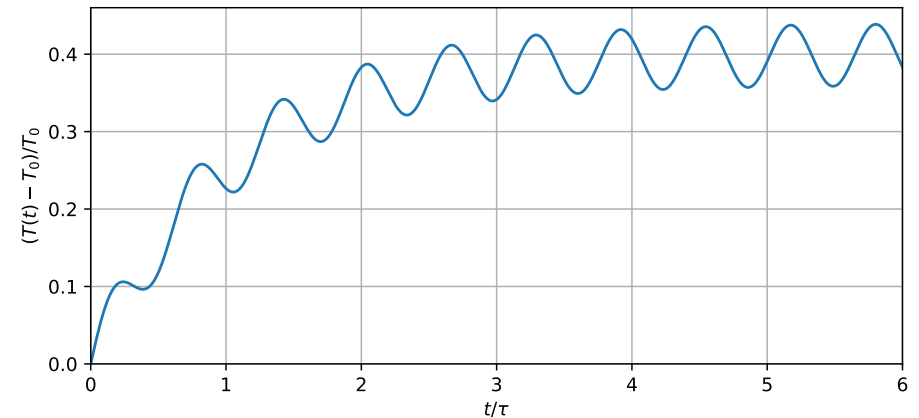
La solution générale est donc de la forme :

$$T(t) = C e^{-t/\tau} + T_0 + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K} + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)} \cos(\omega_m t) + \frac{\tau \omega_m \mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)} \sin(\omega_m t)$$

Avec $T(t=0) = T_0 = C + T_0 + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K} + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)}$, il vient :

$$T(t) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K} - \left(\frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K} + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)} \right) e^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)} [\cos(\omega_m t) + \tau \omega_m \sin(\omega_m t)]$$

Q20. La courbe ci-dessous a été réalisée avec $\mathcal{P}_{\text{abs},0}/K = 0,4 T_0$ et $\omega_m = 10/\tau$.



La température passe d'une valeur initiale T_0 à une valeur finale moyenne $T_0 + \mathcal{P}_{\text{abs},0}/K$ selon une loi exponentielle sur une durée de quelques τ , tout ceci modulé par une oscillation à la pulsation ω_m .

$$\text{Q21. } \tau = \frac{mc_m}{K} = \frac{mc_m}{K} = \frac{mc_m}{hS} = \frac{mc_m}{h4\pi(d/2)^2} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{mc_m}{\pi h d^2}}$$

$$\text{A.N. : } \tau = \frac{2 \times 10^{-18} \times 5 \times 10^2}{\pi \times 100 \times (10^{-7})^2} \Rightarrow \boxed{\tau \approx 3 \times 10^{-4} \text{ s}}$$

Q22. Une fois le régime transitoire évacué, la température vérifie :

$$T(t) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K} + \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)} [\cos(\omega_m t) + \tau \omega_m \sin(\omega_m t)]$$

Pour déterminer l'amplitude des oscillations du terme oscillant, on peut remarquer que $A \cos(\omega_m t + \varphi) = A \cos(\varphi) \cos(\omega_m t) - A \sin(\varphi) \sin(\omega_m t)$ et donc par identification :

$$A \cos(\varphi) = \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)} \quad \text{et} \quad -A \sin(\varphi) = \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K(1 + \omega_m^2 \tau^2)} \tau \omega_m$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}^2}{K^2(1 + \omega_m^2 \tau^2)^2} (1 + \omega_m^2 \tau^2) \Rightarrow A = \frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K \sqrt{1 + \omega_m^2 \tau^2}}$$

Expression que l'on peut réécrire : $\boxed{\tau = \frac{1}{\omega_m} \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}^2}{K^2 A^2} - 1}}$

En répétant des expériences, on peut mesurer une série de valeurs d'amplitude pour une série de valeurs de pulsations. Grâce à la dernière relation, on obtient une série de valeurs de τ dont on peut extraire une moyenne et un écart-type. Comme $\tau = \frac{mc_m}{K}$, on peut alors en déduire c_m si les autres grandeurs sont connues. Si nécessaire $\frac{\mathcal{P}_{\text{abs},0}}{K}$ peut être obtenue *via* la mesure du décalage constant de la température d'équilibre par rapport à T_0 .

Q23. On note que le numérateur définissant γ est une force (pression multipliée par une surface) et que le dénominateur est une quantité de mouvement. La deuxième loi de Newton assure alors que γ est dimensionné à l'inverse d'un temps.

$$\text{A.N. : } \gamma = \frac{40 \times 10^2 \times (10^{-7})^2}{3 \times 2 \times 10^{-18} \times 5 \times 10^2} = \frac{4}{3} \times 10^4 \Rightarrow \boxed{\gamma = 1,3 \times 10^4 \text{ s}^{-1}}$$

Q24. En écrivant formellement $\Gamma_z = -\alpha\phi$ le couple de rappel associé à l'oscillation, l'application du théorème du moment cinétique à la particule conduit, en projection sur l'axe (Oz), à :

$$I\ddot{\phi} = -I\gamma\dot{\phi} - \alpha\phi \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} + \gamma\dot{\phi} + \frac{\alpha}{I}\phi = 0}$$

Cette expression est bien de la forme : $\ddot{\phi} + \frac{\omega_\phi}{Q}\dot{\phi} + \omega_\phi^2\phi = 0$ ce qui permet d'identifier le facteur de qualité :

$$\frac{\omega_\phi}{Q} = \gamma \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\omega_\phi}{\gamma}}$$

$$\text{A.N. : } Q = \frac{2\pi \times 10^4}{4/3 \times 10^4} \Rightarrow \boxed{Q \approx 5}$$

Q25. La vitesse angulaire maximale est atteinte lorsque le couple de frottement et le couple excitateur s'égalisent en norme, c'est-à-dire :

$$I\gamma\dot{\phi}_{\text{max}} = C_\ell \Rightarrow \boxed{\dot{\phi}_{\text{max}} = \frac{C_\ell}{I\gamma} = \frac{10C_\ell}{md^2\gamma}}$$

$$\dot{\phi}_{\text{max}} = \frac{10 \times 10^{-19}}{2 \times 10^{-18} \times (10^{-7})^2 \times (4/3) \times 10^4} = \frac{3}{8} \times 10^{10} \Rightarrow \boxed{\dot{\phi}_{\text{max}} \approx 4 \times 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Q26. On repart de l'expression de la force électrique $\vec{F}$ obtenue à la question Q02. Les forces sur les charges en P_1 et P_2 sont respectivement :

$$\vec{F}_1 = \frac{e\eta V(t)}{\ell_0^2} [2(z + \delta z)\vec{u}_z - (x + \delta x)\vec{u}_x - (y + \delta y)\vec{u}_y]$$

$$\vec{F}_2 = \frac{e\eta V(t)}{\ell_0^2} [2(z - \delta z)\vec{u}_z - (x - \delta x)\vec{u}_x - (y - \delta y)\vec{u}_y]$$

La force résultante subie par la particule est la somme des forces sur chacune de ces parties, en conséquence :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{2e\eta V(t)}{\ell_0^2} [2z\vec{u}_z - x\vec{u}_x - y\vec{u}_y]}$$

Ce qui est bien en accord avec la proposition de l'énoncé.

Q27a. $\vec{\Gamma}_{O,1} = [(x + \delta x)\vec{u}_x + (y + \delta y)\vec{u}_y + (z + \delta z)\vec{u}_z] \wedge \vec{F}_1$ ce qui donne :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{O,1} = 3\frac{e\eta V(t)}{\ell_0^2} [(y + \delta y)(z + \delta z)\vec{u}_x - (x + \delta x)(z + \delta z)\vec{u}_y]}$$

Pour le calcul de $\vec{\Gamma}_{O,2}$, il suffit de changer $\delta r_i \rightarrow -\delta r_i$:

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{O,2} = 3\frac{e\eta V(t)}{\ell_0^2} [(y - \delta y)(z - \delta z)\vec{u}_x - (x - \delta x)(z - \delta z)\vec{u}_y]}$$

Q27b. En sommant les deux couples, on en déduit :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_O = \frac{6e\eta V(t)}{\ell_0^2} [(yz\vec{u}_x - xz\vec{u}_y) + (\delta y\delta z\vec{u}_x - \delta x\delta z\vec{u}_y)]}$$

Q28. On pose $\vec{\Gamma}_C = \frac{6e\eta V(t)}{\ell_0^2} (\delta y \delta z \vec{u}_x - \delta x \delta z \vec{u}_y)$. En effet, il s'agit du terme qui est indépendant de la position du centre de masse de la particule.

Il est aisé de vérifier que $\frac{6e\eta V(t)}{\ell_0^2} (yz \vec{u}_x - xz \vec{u}_y) = \vec{OC} \wedge \vec{F}$, il correspond au couple « moyen » comme si les deux charges se trouvaient au point C . **Ce moment est associé à la rotation du centre de masse C autour de l'origine du repère.**

Q29. $I\ddot{\phi}_1 = -\frac{6e\eta V(t)}{\ell_0^2} \delta x \delta z$ et $I\ddot{\phi}_2 = \frac{6e\eta V(t)}{\ell_0^2} \delta y \delta z$.

Par ailleurs $\vec{v} = \frac{\vec{P}_2 \vec{P}_1}{d} = \frac{2}{d} (\delta x \vec{u}_x + \delta y \vec{u}_y + \delta z \vec{u}_z)$. Le vecteur $\vec{v}$ pointant quasiment selon $\vec{u}_z$, il vient $\delta z \approx d/2$ et on obtient :

$$\vec{v} \approx \vec{u}_z + \frac{2\delta x}{d} \vec{u}_x + \frac{2\delta y}{d} \vec{u}_y$$

Puis, par unicité de la décomposition sur une base et compte tenu de la relation proposée dans l'énoncé, on en déduit : $\delta x = \phi_1 d/2$ et $\delta y = -\phi_2 d/2$.

Il reste à reporter ces expressions dans les relations issues du théorème du moment cinétique :

$$I\ddot{\phi}_1 = -\frac{6e\eta V(t)}{\ell_0^2} \frac{d^2}{4} \phi_1 \quad \text{et} \quad I\ddot{\phi}_2 = -\frac{6e\eta V(t)}{\ell_0^2} \frac{d^2}{4} \phi_2$$

Q30. Avec $I = \frac{2}{5} m d^2/4$, il vient : $\ddot{\phi}_i = -15 \frac{e\eta V_0}{m \ell_0^2} \cos(\Omega t) \phi_i$.

Les équations sont tout à fait similaires aux équations obtenues pour x et y à la question

Q03. On peut les réécrire : $\ddot{\phi}_i + q_i \frac{\omega_r^2}{\Omega^2} \cos(\Omega t) \frac{\Omega^2}{2} \phi_i = 0$.

On pose alors $\omega_r^2 = \omega^2 = \frac{e\eta V_0}{m \ell_0^2}$ et $q_{\phi_1/\phi_2} = 30 \left(\frac{\omega_r}{\Omega} \right)^2$.

Q31a. En reprenant les raisonnements des questions Q04, Q05, Q06, on en déduit que, comme pour la position, les angles oscillent autour de la valeur nulle à la pulsation

$$\omega_{r,\phi_i}^2 = \frac{q_{\phi_i}^2 \Omega^2}{8}.$$

Q31b. La charge étant doublée, q_i l'est aussi et la pulsation effective pour le mouvement du centre de masse selon Oz devient $\omega_z^2 = 4 \frac{q_z^2 \Omega^2}{8}$. En conséquence :

$$\frac{\omega_z}{\omega_{r,\phi_i}} = 2 \frac{|q_z|}{q_{\phi_i}} = \frac{2 \times 4}{30} \Rightarrow \frac{\omega_z}{\omega_{r,\phi_i}} \approx 0,25$$

Q32. Dans le référentiel tournant, la particule est soumise aux forces d'inertie :

— la force d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$;

— la force de Coriolis : $\vec{f}_{ic} = -2m\Omega \vec{u}_z \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{f}_{ic} = 2m\Omega (y\vec{u}_x - x\vec{u}_y)$

Q33. On note qu'à l'énergie potentielle U , on associe une force :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y = -m\omega^2 x \vec{u}_x + m\omega^2 y \vec{u}_y$$

L'application du principe fondamental de la dynamique à la particule donne alors :

$$m\ddot{x} = m(\Omega^2 - \omega^2)x + 2m\Omega y \quad \text{et} \quad m\ddot{y} = m(\Omega^2 + \omega^2)y - 2m\Omega x$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = (\Omega^2 - \omega^2)x + 2\Omega y \quad \text{et} \quad \ddot{y} = (\Omega^2 + \omega^2)y - 2\Omega x$$

Q34. En reportant les formes proposées dans les équations différentielles, il vient :

$$x_0(r^2 + \omega^2 - \Omega^2) - 2\Omega r y_0 = 0 \quad \text{et} \quad 2r\Omega x_0 + (r^2 - \Omega^2 - \omega^2)y_0 = 0$$

Ce système homogène peut s'écrire sous forme matricielle $MZ = 0$ avec $Z = (x_0, y_0)$. La recherche de solutions non triviales impose $\det(M) = 0$, c'est-à-dire :

$$(r^2 + \omega^2 - \Omega^2)(r^2 - \Omega^2 - \omega^2) + 4\Omega^2 r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = r^4 + 2\Omega^2 r^2 + \Omega^4 - \omega^4$$

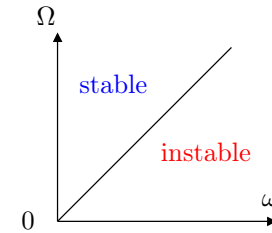
On pose $X = r^2$ qui vérifie $0 = X^2 + 2\Omega^2 X + \Omega^4 - \omega^4$ et donc pour les racines solutions de cette équation :

$$X_{\pm} = \frac{1}{2} (-2\Omega^2 \pm \sqrt{4\Omega^4 - 4\Omega^4 + 4\omega^4}) \Rightarrow X_{\pm} = -\Omega^2 \pm \omega^2$$

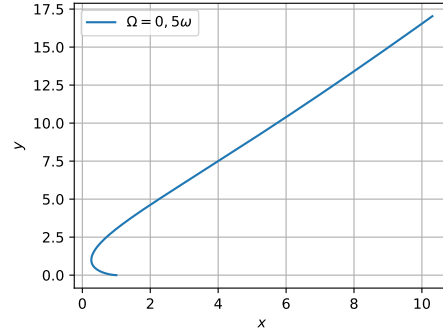
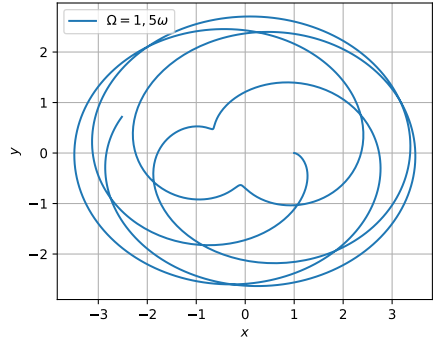
Pour $\Omega > \omega$, $X_{\pm} < 0$ et les racines r sont des imaginaires purs, **le système est stable**.

Pour $\Omega < \omega$, $X_+ > 0$ et une racine r est un réel positif conduisant à un **système instable**.

En conclusion :



Ci-dessous deux exemples de solutions sont présentés, à chaque fois avec les conditions initiales $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = (1, 0, 0, 0)$:



Ces résolutions numériques sont en accord avec le critère précédemment obtenu.

Il reste en toute rigueur le cas $\Omega = \omega$ à discuter. Dans ce cas particulier, les équations se simplifient selon :

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = 2\Omega^2y - 2\Omega\dot{x}$$

La première équation s'intègre immédiatement selon $\dot{x} = 2\Omega y + \text{cste}_1$, expression que l'on reporte dans la seconde équation :

$$\ddot{y} = 2\Omega^2y - 4\Omega^2y + \text{cste}_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + 2\Omega^2y = \text{cste}_2$$

Très généralement la solution pour y est la superposition d'un terme oscillant stable et d'une constante. Dans le cas général (sauf valeurs spécifiques de la constante d'intégration dépendant des conditions initiales), le terme $\dot{x}$ est donc la somme d'un terme oscillant et d'une constante. **L'intégration de la constante crée une dérive dans la direction x et un système instable.**