

Asservissement en fréquence d'un laser continu

1 Principe de fonctionnement d'un laser

1.1 Cavité électromagnétique dans le domaine optique

1. Le démarrage du laser s'effectue sur l'émission spontanée du niveau d'énergie le plus élevé vers le niveau d'énergie inférieur au cœur du milieu amplificateur. Toutefois, sur le schéma bloc on traduira cela en dehors du milieu amplificateur par une entrée d'un signal $\underline{s}_e$. Ce signal peut être décrit comme une amplitude d'onde électromagnétique. Dans le laser en anneau, on a une amplification que l'on traduira par la grandeur complexe $\underline{A}$, dans la partie retour, on aura un déphasage $\underline{\beta} = \exp i\varphi$ pour l'amplitude affectée d'un coefficient de réflexion $\underline{r}$. L'amplitude de sortie est notée $\underline{s}_s$, elle est le résultat de l'action d'un coefficient de transmission $\underline{t}$ sur la sortie du milieu amplificateur. Le schéma est représenté à la figure 1.

Pour ce laser, le transfert est $\frac{\underline{s}_s}{\underline{s}_e} = \frac{\underline{t}\underline{A}^2}{1 - \underline{\beta}\underline{r}\underline{A}^2}$. Pour le laser linéaire, on a toujours le même schéma sur la chaîne directe mais ensuite sur la chaîne de retour, on aura à nouveau l'amplification $\underline{A}$, le coefficient $\underline{r}$ pour la chaîne de retour mais à nouveau $\underline{A}$ dans cette chaîne de retour. Il suffit de remplacer $\underline{\beta}$ par $\underline{A}$. Le laser linéaire est aussi représenté à la figure 1.

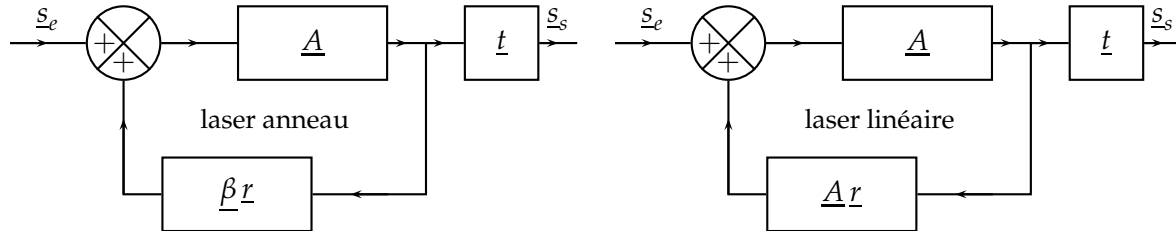


FIGURE 1 – Schémas blocs des deux lasers

2. On a $\lambda_\ell = cT_0$ d'où $T_0 = \frac{\lambda}{c} = 2 \times 10^{-15}$ s. La fréquence est $\nu_0 = \frac{1}{T_0} = 5 \times 10^{14}$ Hz. Dans le modèle onde plane harmonique on peut utiliser la relation de structure qui vient de $\vec{r} \otimes \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ à savoir $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}$ puisque l'air est assimilé au vide. Le champ magnétique est donc $\vec{B} = \vec{e}_y \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t + \varphi_0)$. Le vecteur de POYNTING est $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kz - \omega t + \varphi_0) \vec{e}_z$. On peut calculer la moyenne temporelle, sur une période ou sur une durée très grande devant la période pour négliger le reliquat d'un multiple non entier de périodes, de la norme du vecteur de POYNTING : $\langle \Pi \rangle_t = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c$. Avec la définition proposée par l'énoncé de l'intensité $I = |\underline{E}(z, t)|^2$, on en déduit que $I = 2\mu_0 c \langle \Pi \rangle_t$. Le vecteur de POYNTING représente la puissance surfacique ($W \cdot m^{-2}$) transportée par l'onde électromagnétique.

3. Si on prend une position z quelconque dans la cavité, après un parcours de L , il faut que l'on retrouve le même champ électrique. On a, par conséquent, $\mathcal{E}(z + L) = \mathcal{E}(z)$. Cela impose $\exp ikL = 1$ et donc $kL = N2\pi$. Comme on a $k = \frac{\omega}{c} = N\frac{2\pi}{L}$, on en déduit la fréquence des modes propres $\nu_N = N\frac{c}{L}$. Nous

sommes dans une situation où une onde progressive à z croissant se superpose à une onde progressive à z décroissant. L'amplitude complexe du champ électrique peut être exprimée selon $\mathcal{E}_{tot} = A \exp -kz + E_0 \exp ikz$. Les conditions aux limites en $z = 0$ et en $z = L/2$ où se trouvent deux conducteurs parfaits sont telles que $\mathcal{E}_{tot}(z = 0) = \mathcal{E}_{tot}(z = L/2) = 0$. On en déduit d'une part que $A = -E_0$ et et d'autre part on retrouve la condition définissant les modes. Dans ces conditions, on peut choisir une amplitude réelle et on obtient $\mathcal{E}_{tot} = E_0(\exp ikz - \exp -ikz)$ que l'on fait évoluer en intégrant la phase dans le choix de la date $t = 0$. On peut proposer $\mathcal{E}_{tot} = 2E_0 \sin kz$ avec $k = N\frac{2\pi}{L}$. Le champ électrique à l'intérieur de la cavité idéale est donc : $E(z, t) = 2E_0 \sin \frac{2\pi Nz}{L} \cos \omega_N t$ avec $\omega_N = \frac{2\pi Nc}{L}$. La représentation graphique de $\mathcal{E}_{tot}(z)$ est réalisée à la figure 2.

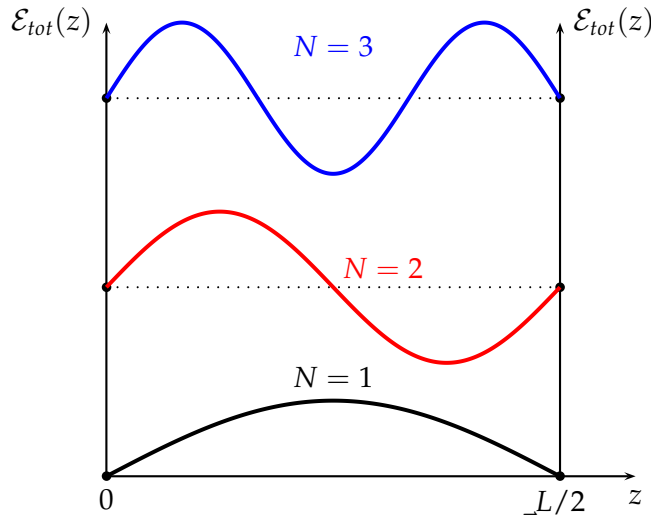


FIGURE 2 – Représentation de l'amplitude du champ électrique $\vec{E}$ des trois premiers modes propres de la cavité idéale.

4. La cavité plane n'est pas stable car, par la loi de la réflexion de DESCARTES, le rayon légèrement incliné par rapport à Oz va se traduire progressivement au fur et à mesure de ses réflexions le long de l'axe transverse à Oz . Pour remédier à ce problème, on utilise des miroirs concaves et non pas des miroirs plans.

5. L'amplitude $\mathcal{E}$ est la conséquence (superposition) de la transmission de $\mathcal{E}_{in}$ et de la réflexion de $\mathcal{E}'$ d'où $\mathcal{E} = \sqrt{T}\mathcal{E}_{in} - \sqrt{R'}\mathcal{E}'$. L'amplitude $\mathcal{E}'$ résulte de la propagation dans la cavité (longueur déployée L) et aussi du coefficient de réflexion sur le miroir $-\sqrt{R'}$ d'où $\mathcal{E}' = -\mathcal{E}\sqrt{R'}\exp ikL$. On peut donc écrire que $\mathcal{E} = \sqrt{T}\mathcal{E}_{in} + \sqrt{RR'}\exp ikL \mathcal{E}$. On en déduit l'expression du transfert à travers le miroir de couplage pour l'entrée dans la cavité : $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{in}} = \frac{\sqrt{T}}{1 - \sqrt{RR'}\exp ikL}$ avec $k = \frac{\omega}{c} > 0$.

6. On passe au carré du module. On a $\frac{I}{I_{in}} = \frac{T}{(1 - \sqrt{RR'}\exp ikL)(1 - \sqrt{RR'}\exp -ikL)}$. Après un premier développement, on arrive à $\frac{I}{I_{in}} = \frac{T}{1 + RR' - 2\sqrt{RR'}\cos kL}$. Avec $\cos kL = 1 - 2\sin^2 \frac{kL}{2}$, on obtient en factorisant pour donner une forme plus lisible le résultat suivant : $\frac{I}{I_{in}} = \frac{T}{(1 - \sqrt{RR'})^2} \frac{1}{1 + \frac{4\sqrt{RR'}}{(1 - \sqrt{RR'})^2} \sin^2 \frac{kL}{2}}$. On a $R' = 1 - A'$ et $R =$

$1 - A - T$ mais les valeurs numériques nous fournissent $A \ll T$ et $A' \ll T$. On peut en déduire que $RR' = (1 - A - T)(1 - A') \simeq 1 - T$. En passant à la racine avec $T \ll 1$, on peut donc conclure que $\sqrt{RR'} \simeq 1 - \frac{T}{2} = 0,98$. RR' représente le coefficient de réflexion globale de la cavité, plus il sera élevé

plus l'énergie stockée dans la cavité sera importante comparativement à l'énergie qui sort sous la forme du faisceau laser. On peut donner une expression approchée du rapport des intensités en prenant en compte les valeurs numériques : $\frac{I}{I_{in}} = \frac{10^2}{1 + 10^4 \sin^2 \frac{kL}{2}}$. Avec $kL = N2\pi$, on voit que la fonction est très vite proche de zéro dès que l'on s'éloigne d'une des valeurs précédentes de kL . Le graphique demandé est représenté à la figure 3.

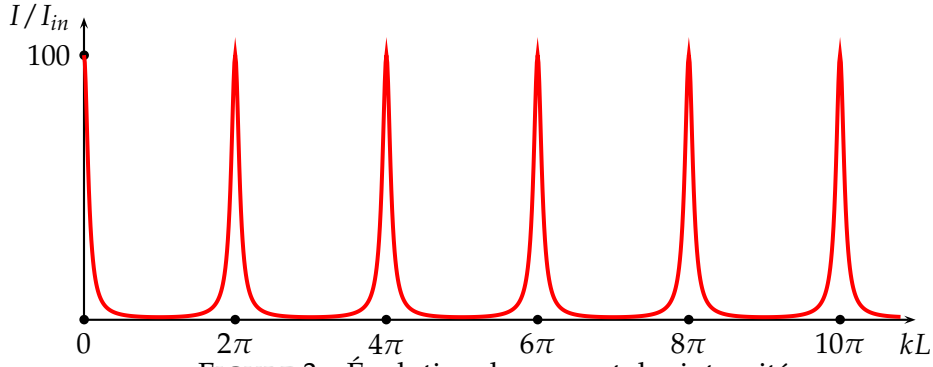


FIGURE 3 – Évolution du rapport des intensités

7. Les fréquences de résonance sont les mêmes que celles obtenues pour la cavité sans perte. On a donc $\nu_N = N \frac{c}{L}$. La largeur spectrale libre est donc $\nu_{ISL} = \nu_{N+1} - \nu_N = \frac{c}{L}$. On a donc $\tau = \frac{1}{\nu_{ISL}} = \frac{L}{c}$, ce temps représente la durée mise par l'onde électromagnétique pour parcourir la longueur déployée de la cavité. On trouve $\nu_{ISL} = 200$ MHz. Comme $\nu_N = 5 \times 10^{14}$ Hz, on voit que $N = \frac{\nu_N}{\nu_{ISL}} = 2,5 \times 10^6$. Cet ordre est très élevé devant 1. On a $\tau = 5$ ns.

8. La largeur à mi-hauteur est définie pour les fréquences réalisant $\frac{4\sqrt{RR'}}{(1-\sqrt{RR'})^2} \sin^2 \frac{\omega L}{2c} = 1$. Or, nous avons $\sqrt{RR'} \simeq 1$ et $1 - \sqrt{RR'} \simeq \frac{T}{2}$. On peut donc voir que $\sin^2 \frac{\omega}{2\nu_{ISL}} \simeq \frac{T^2}{16}$ ce qui permet d'écrire que $\sin \frac{\omega}{2\nu_{ISL}} \simeq \frac{T}{4} \simeq 10^{-2}$. Cette valeur est suffisamment faible pour que l'on puisse faire l'approximation du sinus par l'angle, on a donc, pour la plus basse des limites après $\omega = 0$, l'expression $\frac{\omega c_2}{2\nu_{ISL}} = \frac{T}{4}$. La largeur à mi-hauteur est le double de ω_{c2} . On a : $\Delta\omega_c = T\nu_{ISL} = 8 \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

9. On a $F = \frac{\nu_{ISL}}{\Delta\nu_c} = 2\pi \frac{\nu_{ISL}}{\Delta\omega_c}$. La finesse est donc $F = \frac{2\pi}{T} \simeq 160$. On trouve aussi que $\Delta\nu_c = \frac{\Delta\omega_c}{2\pi} = 1,3$ MHz.

10. Comme $RR' \simeq 1$, on étudiera l'énergie contenue dans la cavité pour le cas idéal. Nous avons vu que $\vec{E} = 2E_0 \sin kz \cos \omega t \vec{e}_x$ avec $k = N \frac{2\pi}{L}$. On calcule le champ magnétique par l'équation de MAXWELL-AMPÈRE $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ avec $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y$. Comme $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, on obtient $2E_0 k \cos kz \cos \omega t \vec{e}_y = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ que l'on intègre sans prendre en compte de composante statique du champ magnétique, c'est-à-dire sans considérer de constante d'intégration. On obtient $\vec{B} = -\frac{2E_0}{c} \cos kz \sin \omega t \vec{e}_y$ puisque $k = \frac{\omega}{c}$. La densité volumique d'énergie électrique est $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = 2\epsilon_0 E_0^2 \sin^2 kz \cos^2 \omega t$, l'énergie magnétique volumique est $u_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 kz \sin^2 \omega t = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 kz \sin^2 \omega t$. Si on calcule la moyenne spatiale, cela conduit à $\langle u_{em} \rangle_z = \epsilon_0 E_0^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \epsilon_0 E_0^2$. Dans notre étude, E_0 correspond à $\mathcal{E}$. Pour trouver l'énergie stockée dans la cavité, il suffit de multiplier l'énergie électromagnétique volumique par le volume occupé par le faisceau $S \frac{L}{2}$. On obtient donc : $W = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 S \frac{L}{2}$. On a $\mathcal{E}_{in} = 0$, alors $\mathcal{E}_{out} = \sqrt{T}(-\mathcal{E})$. L'énergie qui sort de la cavité laser pendant la durée τ est $\delta W_{out} = P_{out} \tau$ avec $P_{out} = \langle \Pi_{out} \rangle_t S$ où $\langle \Pi_{out} \rangle_t$ est la moyenne temporelle du vecteur de POYNTING de l'onde sortant et constituant le faisceau laser. On a donc $\delta W_{out} = \frac{\epsilon_0 c \mathcal{E}_{out}^2}{2} S \tau = \frac{\epsilon_0 c \mathcal{E}^2 T}{2} S \tau$. Cette dernière expression permet de faire le lien avec l'énergie contenue dans la cavité : $\delta W_{out} = \frac{c}{T} \tau \frac{W}{L}$. Comme $\delta W \ll W$, on peut écrire que $\frac{dW}{dt} = \frac{W(t+\tau) - W(t)}{\tau} = -\frac{\delta W_{out}}{\tau} = -c T \frac{W}{L}$. L'énergie dans la cavité évolue selon l'équation différentielle $\frac{dW}{dt} + \frac{cT}{L} W = 0$. Son temps caractéristique est $\tau_W = \frac{L}{cT}$. Compte tenu de la définition de la finesse, on a : $\tau_W = \tau \frac{F}{2\pi} = 125$ ns. On peut donc voir que si l'on coupe l'alimentation du laser (ce qui revient à faire $\mathcal{E}_{in} = 0$), alors le faisceau laser disparaît très rapidement puisqu'il suffit de $5\tau_W$ pour que l'on puisse considérer que $W = 0$. Cela représente moins d'une microseconde.

1.2 Amplification optique

11. On a un état stationnaire possible lorsque le potentiel V ne dépend pas du temps, la conséquence est que la densité de probabilité de présence est indépendante du temps. La fonction d'onde se présente sous la forme d'un produit de deux fonctions à variables séparées : $\psi(x, t) = \varphi_a(x) \exp -i \frac{E_a}{\hbar} t$. En testant cette forme de fonction dans l'équation de SCHRÖDINGER, on obtient l'équation dite spatiale : $E_a \varphi_a(x) =$

$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi_a(x)}{dx^2} + V(x) \varphi_a(x)$. La condition de normalisation est : $\int_{\mathcal{D}} |\varphi_a|^2 dx = 1$ où $\mathcal{D}$ est le domaine accessible à la particule quantique.

12. Dans le puits de potentiel, le potentiel est nul. L'équation de SCHRÖDINGER spatiale est : $\frac{d^2 \varphi_a}{dx^2} + \frac{2mE_a}{\hbar^2} \varphi_a = 0$. Comme en dehors du puits de potentiel, le potentiel est infini. La densité de probabilité du quanton est nulle en dehors du puits. Les conditions aux limites imposent que $\varphi_a(x = \pm \frac{\ell}{2}) = 0$. L'énergie du quanton étant nécessairement positive (énergie cinétique) dans le puits, on pose $k = \frac{\sqrt{2mE_a}}{\hbar}$. La solution est de la forme $\varphi_a(x) = A \exp ikx + B \exp -ikx$ avec les deux relations obtenues aux limites : $A \exp -ik\frac{\ell}{2} + B \exp ik\frac{\ell}{2} = 0$ et $A \exp ik\frac{\ell}{2} + B \exp -ik\frac{\ell}{2} = 0$. En sommant ces deux dernières relations, on arrive à $2(A + B) \cos \frac{k\ell}{2} = 0$ ce qui provoque soit $A = -B$, soit $\cos \frac{k\ell}{2} = 0$. Commençons par $\cos \frac{k\ell}{2} = 0$: cela impose la condition de quantification $k\ell = (2p + 1)\pi$. Si on impose $A = -B$ alors on obtient $\sin \frac{k\ell}{2} = 0$ ce qui donne $k\ell = 2p\pi$. On peut conclure que dans tous les cas, $k\ell = n\pi$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On aura pour n impair une fonction $\varphi_a = A' \cos \frac{n\pi x}{\ell}$ et pour n pair $\varphi_a = A'' \sin \frac{n\pi x}{\ell}$. Le puits de potentiel est symétrique par rapport à $x = 0$, les grandeurs qui ont du sens physique doivent nécessairement être paires en x . Cela n'est pas contradictoire avec une fonction d'onde paire ou impaire puisque c'est le carré de son module qui a du sens physique en donnant la densité de probabilité. Cette densité sera nécessairement paire. L'énergie d'un état stationnaire caractérisé par l'entier n est $E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2}$. Les trois premiers états stationnaires sont représentés à la figure

4. On a aussi représenté $\frac{dp}{dx} = |\varphi_a|^2$ pour voir comment évolue la densité de probabilité et son caractère paire sur un second graphique.

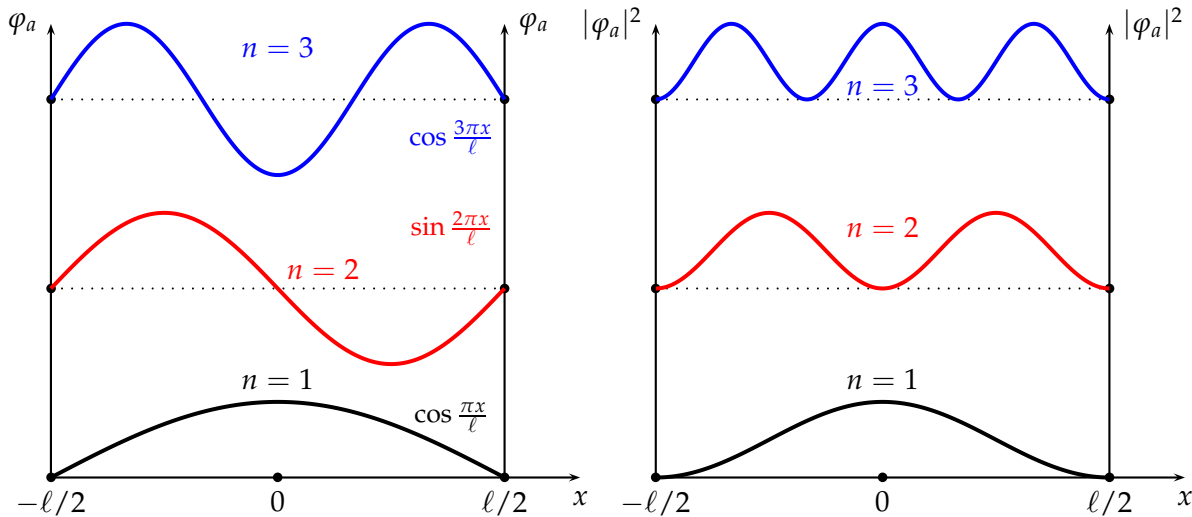


FIGURE 4 – Représentation des trois premiers états stationnaires du quanton et de la densité de probabilité associées

Pour montrer l'orthogonalité au sens du produit scalaire, commençons par nous intéresser à $(\varphi_n, \varphi_p) = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{p\pi x}{\ell} dx$. Les règles de calcul en trigonométrie donnent $\cos \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{p\pi x}{\ell} = \frac{1}{2} [\cos(n-p) \frac{\pi x}{\ell} + \cos(n+p) \frac{\pi x}{\ell}]$. La fonction $\cos(n-p) \frac{\pi x}{\ell}$ possède une période $\frac{2\ell}{(n-p)}$, or $n \geq n+2$, par conséquent, l'intervalle sur lequel on intègre (de $-\ell/2$ à $\ell/2$) est au moins une période de cette fonction ou bien un multiple de celle-ci. L'intégrale est donc nulle. Pour $\cos(n+p) \frac{\pi x}{\ell}$, la période est $\frac{2\ell}{(n+p)}$. Ici encore, on intègre sur un intervalle multiple de la période, l'intégrale sera nulle. On peut conduire exactement la même argumentation pour le produit $\sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{p\pi x}{\ell}$, en déphasant de $\pi/2$. Pour $\cos \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{p\pi x}{\ell}$, on doit intégrer une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0, l'intégrale est forcément nulle. Nous avons donc bien démontré que $(\varphi_n, \varphi_p) = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{p\pi x}{\ell} dx = 0$ pour $n \neq p$.

13. L'espace est de dimension 2 puisque l'on ne considère que deux états stationnaires qui constituent deux vecteurs indépendants φ_a et φ_b . Il est muni de l'addition, de la multiplication par un scalaire. On peut donc faire des combinaisons linéaires ce qui confirme les propriétés de base à savoir que l'addition est commutative, associative et la multiplication scalaire est distributive. C'est donc bien un espace vectoriel. On a $i\hbar \frac{da}{dt} = E_a a(t)$ ce qui équivaut à écrire que $\frac{da}{dt} - i \frac{E_a}{\hbar} a(t) = 0$. L'équation est identique pour

$b(t)$. Les deux solutions sont similaires : $a(t) = a_0 \exp -i \frac{E_a}{\hbar} t$ et $b(t) = b_0 \exp -i \frac{E_b}{\hbar} t$. $a(t)$ et $b(t)$ sont les parties temporelles de la fonction d'onde d'un état stationnaire, elle donne la pulsation des oscillations de celle-ci. On a $p_a = a_0^2$ et $p_b = b_0^2$. La fonction d'onde est $\psi(x, t) = a(t)\varphi_a(x) + b(t)\varphi_b(x)$. On a donc $|\psi(x, t)|^2 = |a(t)|^2|\varphi_a|^2 + |b(t)|^2|\varphi_b|^2 + a^* \varphi_a^* b \varphi_b + a \varphi_a b^* \varphi_b^*$. Les fonctions représentant les états stationnaires sont réelles donc $\varphi_a = \varphi_a^*$ tout comme $\varphi_b = \varphi_b^*$. Ainsi, on peut écrire la densité de probabilité $\frac{dp}{dx} = |\psi(x, t)|^2 = |a(t)|^2|\varphi_a|^2 + |b(t)|^2|\varphi_b|^2 + (a^*b + ab^*)\varphi_a\varphi_b$. On normalise la loi de probabilité : $\int_{-\ell/2}^{\ell/2} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$. Comme $\varphi_a(x)$ et $\varphi_b(x)$ sont orthogonales, on en déduit que la normalisation revient à écrire $1 = |a(t)|^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |\varphi_a(x)|^2 dx + |b(t)|^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |\varphi_b(x)|^2 dx$ puisque $\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \varphi_a \varphi_b dx = 0$. Comme chaque état stationnaire a été normalisé $\int_{-\ell/2}^{\ell/2} |\varphi_a(x)|^2 dx = 1$, idem pour φ_b . On a la relation $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$.

14. On a $D_{aa} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |\varphi_a|^2 (-ex) dx$. Cette intégrale est nulle parce que l'on intègre toujours sur le domaine $[-\ell/2, \ell/2]$ et que la fonction intégrée est impaire. Il est donc logique d'avoir $D_{aa} = D_{bb} = 0$. Comme nous l'avons dit φ_a et φ_b sont réelles, on a donc nécessairement $D_{ab} = D_{ba} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \varphi_a \varphi_b (-ex) dx$. Comme on nous invite à considérer φ_1 et φ_2 qui sont, respectivement, impaire et paire, le produit de ces deux fonctions et de $(-ex)$ constitue une fonction paire. Son intégrale sera réelle et non nulle. On notera bien que si l'on choisit φ_a et φ_b de même parité alors $d = 0$! Mais cela n'est pas le cas dans la suite du problème... On a $V_{int} = - \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix} E_0 \cos \omega t = -dE_0 \cos \omega t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui définit : $f(t) = -dE_0 \cos \omega t = -\hbar \Omega_R \cos \omega t$.

L'équation de SCHRÖDINGER vérifiée par $\psi(x, t)$ est $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V_{int} \psi$. Commençons par $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\hbar \left(\frac{da}{dt} \varphi_a(x) + \frac{db}{dt} \varphi_b(x) \right)$, ensuite $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} a(t) \frac{d^2 \varphi_a}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2m} b(t) \frac{d^2 \varphi_b}{dx^2}$. Mais comme φ_a et φ_b sont les fonctions d'onde des états stationnaires, on a $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi_a}{dx^2} = E_a \varphi_a(x)$ et la même forme pour φ_b . Quant au potentiel, il faut effectuer le produit matriciel $V_{int} \psi(x, t) = -\hbar \Omega_R \cos \omega t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{pmatrix}$. On en déduit que $V_{int} \psi(x, t) = -\hbar \Omega_R \cos \omega t \begin{pmatrix} b(t) \\ a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{pmatrix}$. On obtient alors les équations différentielles $i\hbar \frac{da}{dt} = E_a a(t) - \hbar \Omega_R \cos \omega t b(t)$ et la forme similaire pour $b(t)$. On divise par $i\hbar$ et on aboutit bien à l'équation fournie par l'énoncé : $\frac{da}{dt} = -i \frac{E_a}{\hbar} a(t) + i \Omega_R \cos \omega t b(t)$ et l'expression similaire pour la seconde équation portant sur $b(t)$.

15. On a $a(t) = \alpha(t) \exp -i \frac{E_a}{\hbar} t$ d'où $\frac{da}{dt} = -i \alpha \frac{E_a}{\hbar} \exp -i \frac{E_a}{\hbar} t + \frac{d\alpha}{dt} \exp -i \frac{E_a}{\hbar} t$. En utilisant ce développement, $b(t) = \beta(t) \exp -i \frac{E_b}{\hbar} t \exp -i \omega t$ et $\cos \omega t = \frac{1}{2} (\exp i \omega t + \exp -i \omega t)$ dans l'équation différentielle vérifiée par $a(t)$, on arrive, après simplification, à : $\frac{d\alpha}{dt} = i \frac{\Omega_R}{2} (1 + \exp -i 2 \omega t) \beta(t)$. Les variations rapides de $\alpha(t)$ sont dues au terme en $\exp -i 2 \omega t$ et, par opposition, celles qui sont lentes sont dues au facteur 1. On procède de la même manière pour la seconde équation différentielle $\frac{db}{dt} = (-i \beta(t) (\frac{E_b}{\hbar} + \omega) + \frac{d\beta}{dt}) \exp -i (\frac{E_b}{\hbar} + \omega) t$. On injecte cette expression dans l'équation différentielle vérifiée par $b(t)$ dans les mêmes conditions de calcul qu'avant pour $\alpha(t)$. On est amené à considérer $\frac{E_b - E_a}{\hbar} = \omega_0$ et $\delta \omega = \omega - \omega_0$. Après calcul, on arrive à : $\frac{d\beta}{dt} = i \delta \omega \beta(t) + i \frac{\Omega_R}{2} (\exp i 2 \omega t + 1) \alpha(t)$. De la même façon, le terme en $\exp i 2 \omega t$ représente les variations rapides de $\beta(t)$.

16. On a $\frac{dP}{dx} = \psi(x, t) \psi^*(x, t)$ d'où $dP = \psi(x, t) \psi^*(x, t) dx$. On note $\mathcal{D}$ le domaine d'intégration correspondant à la probabilité précédente. La moyenne du moment dipolaire est $\langle D_x \rangle = \int_{\mathcal{D}} (-ex) \psi(x, t) \psi^*(x, t) dx$. En utilisant $\psi(x, t) = a(t) \varphi_a(x) + b(t) \varphi_b(x)$, on arrive à l'expression suivante $\langle D_x \rangle = aa^* \int_{\mathcal{D}} \varphi_a \varphi_a^* (-ex) dx + bb^* \int_{\mathcal{D}} \varphi_b \varphi_b^* (-ex) dx + ab^* \int_{\mathcal{D}} \varphi_a \varphi_b^* (-ex) dx + a^* b \int_{\mathcal{D}} \varphi_a^* \varphi_b (-ex) dx$. La moyenne du moment dipolaire se met bien sous la forme voulue $\langle D_x \rangle = |a(t)|^2 D_{aa} + |b(t)|^2 D_{bb} + ab^* D_{ba} + a^* b D_{ab}$. On a $\alpha \alpha^* = |a(t)|^2$ et $\beta \beta^* = |b(t)|^2$ et donc $\alpha \alpha^* + \beta \beta^* = 1$. $\alpha \alpha^*$ représente la probabilité de trouver la particule quantique dans l'état d'énergie E_a et $\beta \beta^*$ celle de la trouver dans l'état d'énergie E_b . La particule est, a priori, dans une superposition de deux états stationnaires mais si on interagit avec elle, on la trouvera soit dans l'état E_a , soit dans l'état E_b . Nous avons vu que $D_{aa} = D_{bb} = 0$ et que $D_{ab} = D_{ba} = d$. On peut en déduire que $\langle D_x \rangle = d(\alpha \beta^* \exp i \omega t + \alpha^* \beta \exp -i \omega t)$. Si on pose $C = \beta \alpha^*$ alors $C^* = \beta^* \alpha$. On peut donc bien voir que la moyenne du moment dipolaire est uniquement relié à la cohérence C puisque l'on a :

$\langle D_x \rangle = d(C \exp i\omega t + C^* \exp -i\omega t)$. En posant $C = \frac{1}{2}(u + iv)$, on obtient $C^* = \frac{1}{2}(u - iv)$. On a donc $\langle D_x \rangle = \frac{d}{2}(u \exp i\omega t + u \exp -i\omega t + iv \exp i\omega t - iv \exp -i\omega t)$. On obtient $\langle D_x \rangle = \frac{d}{2}(2u \cos \omega t - 2v \sin \omega t)$. Cela conduit bien à l'expression : $\langle D_x \rangle = d(u \cos \omega t - v \sin \omega t)$.

17. En suivant bien les différentes indications de l'énoncé, on obtient $\frac{dp_a}{dt} = -i\frac{\Omega_R}{2}(C - C^*) + \Lambda_a - \gamma_1 p_a$ ainsi que $\frac{dp_b}{dt} = i\frac{\Omega_R}{2}(C - C^*) + \Lambda_b - \gamma_1 p_b$. La cohérence, elle, obéit à $\frac{dC}{dt} = -i\delta\omega C - i\frac{\Omega_R}{2}(p_a - p_b) - \gamma_2 C$. En absence d'onde électromagnétique, $E_0 = 0$ et donc $\Omega_R = 0$. On étudie le régime stationnaire pour lequel $\frac{d}{dt} = 0$. On arrive rapidement à $\Lambda_a - \gamma_1 p_a^0 = 0$ d'où $p_a^0 = \frac{\Lambda_a}{\gamma_1}$ et donc $p_b^0 = \frac{\Lambda_b}{\gamma_1}$. Pour la cohérence, on a $0 = (\gamma_2 - i\delta\omega)C$. Comme γ_2 et $\delta\omega$ sont des réels, on a $\gamma_2 \neq i\delta\omega$. Par conséquent, la cohérence doit être nulle : $C^0 = 0$. Ce résultat nul montre bien que la cohérence est nulle en l'absence de champ électrique. on peut écrire $\langle D_x \rangle = -\frac{dm_0\Omega_R}{\delta\omega^2 + \gamma_2^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Omega_R^2}(\delta\omega \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t)$. On peut poser un angle $\phi = \arctan \frac{\gamma_2}{\delta\omega}$ avec $\cos \phi = \frac{\delta\omega}{\sqrt{\delta\omega^2 + \gamma_2^2}}$ et $\sin \phi = \frac{\gamma_2}{\sqrt{\delta\omega^2 + \gamma_2^2}}$. Cela permet d'écrire que : $\langle D_x \rangle = -\frac{dm_0\Omega_R}{\delta\omega^2 + \gamma_2^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Omega_R^2} \sqrt{\delta\omega^2 + \gamma_2^2} \cos(\omega t + \phi)$. Pour obtenir la polarisation P , il suffit de multiplier par le nombre n d'atomes par unité de volume. On a alors $P = -\frac{ndm_0\Omega_R}{\delta\omega^2 + \gamma_2^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Omega_R^2} \sqrt{\delta\omega^2 + \gamma_2^2} \cos(\omega t + \phi)$. Cette polarisation oscille à la pulsation ω . Sa représentation complexe est $\mathcal{P} = -\frac{ndm_0\Omega_R}{\delta\omega^2 + \gamma_2^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Omega_R^2} \sqrt{\delta\omega^2 + \gamma_2^2} \exp -i(\omega t + \phi)$. On peut écrire $\mathcal{P} = \varepsilon_0 \underline{\chi} E(z=0, t)$ à condition de poser $\underline{\chi} = -\frac{nd^2}{\hbar\varepsilon_0} \frac{m_0}{\delta\omega^2 + \gamma_2^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Omega_R^2} \sqrt{\delta\omega^2 + \gamma_2^2} \exp -i\phi$. Cela permet d'identifier les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité diélectrique : $\chi' = -\frac{nd^2}{\hbar\varepsilon_0} \frac{m_0\delta\omega}{\delta\omega^2 + \gamma_2^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Omega_R^2}$ et $\chi'' = +\frac{nd^2}{\hbar\varepsilon_0} \frac{m_0\gamma_2}{\delta\omega^2 + \gamma_2^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Omega_R^2}$.

18. L'équation de propagation conduit à $\frac{d^2\mathcal{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathcal{E}(z) = \varepsilon_0 \underline{\chi} \mathcal{E}(z)(-\mu_0\omega^2) = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{\chi} \mathcal{E}(z)$. L'équation différentielle vérifiée par l'amplitude du champ électrique est $\frac{d^2\mathcal{E}}{dz^2} + (1 + \underline{\chi}) \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E}(z) = \frac{d^2\mathcal{E}}{dz^2} + \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E}(z) = 0$. La relation de dispersion est alors $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \underline{\chi})$. Pour rechercher les solutions possibles pour le vecteur d'onde, on prend les racines de cette expression : $\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c}(1 + \underline{\chi})^{1/2}$. Comme on est assuré du fait que $|\underline{\chi}| \ll 1$, on peut faire un développement limité pour écrire que $(1 + \underline{\chi})^{1/2} \simeq 1 + \frac{\underline{\chi}}{2}$. On retiendra la solution pour laquelle il y a propagation dans le sens de l'axe Oz croissant. En posant $\underline{k} = k' + ik''$, on arrive à $k' = \frac{\omega}{c}(1 + \frac{\chi'}{2})$ et $k'' = \frac{\omega}{c} \frac{\chi''}{2}$. L'amplitude du champ électrique est donc donnée par $\mathcal{E}(z) = E_0 \exp ik'z \exp -k''z$. Pour qu'il y ait amplification, il faut que $k'' < 0$ et donc $\chi'' < 0$. Si l'inégalité n'est pas satisfaite alors l'onde laser va s'amortir au cours de sa propagation dans la cavité sur une longueur caractéristique de l'ordre de $\frac{1}{k''}$. Dans l'expression de χ'' , il n'y a que des termes positifs à l'exception de $m_0 = p_a^0 - p_b^0$. Il faut que $m_0 < 0$ pour qu'il y ait amplification de l'onde laser. C'est bien une situation d'inversion de population puisque qu'il faut que la probabilité de trouver des atomes dans l'état d'énergie le plus élevé E_b soit plus grande que celle d'en trouver dans l'état d'énergie E_a ($p_b^0 > p_a^0$). Cela est contraire à la loi statistique de BOLTZMANN qui prédit qu'à l'équilibre thermique à la température T , la probabilité d'occupation d'un niveau d'énergie E_i est proportionnelle à $\exp -\frac{E_i}{k_B T}$ où k_B est la constante de BOLTZMANN : $\exp -\frac{E_a}{k_B T} > \exp -\frac{E_b}{k_B T}$. La situation d'inversion de population n'est pas une situation d'équilibre. On a $\mathcal{E}(z=0) = E_0$ et $\mathcal{E}(z=\ell_a) = E_0 \exp ik'\ell_a \exp -k''\ell_a$. Le transfert est $\underline{H} = \exp i\frac{\omega\chi'\ell_a}{2c} \exp -\frac{\omega\chi''\ell_a}{2c}$. Les intensités étant les carrés des modules, on obtient le gain en intensité $G_I = \exp -\frac{\omega\chi''\ell_a}{c}$.

19. Rappelons qu'il y a inversion de population et que $m_0 < 0$, on en déduit que $\chi' > 0$. On peut écrire $\chi' = A' \frac{\delta\omega}{\delta\omega^2 + B}$ avec $\delta\omega = \omega - \omega_0$. χ' agit sur le déphasage de l'onde ce qui correspond au temps de parcours de l'onde dans la cavité. Ce temps dépend de la pulsation de l'onde ω , il y a donc dispersion. C'est χ' qui va rendre compte de cela. L'évolution de χ' est fournie à la figure 5. En ce qui concerne $\chi'' = -A'' \frac{1}{\delta\omega^2 + B}$ avec $A'' > 0$, il agit sur l'amplitude du signal. On voit clairement la résonance se produire pour $\delta\omega = 0$ sur le graphique de la figure 5. La mi-hauteur de cette résonance se réalise lorsque $\delta\omega^2 = B$ et donc $\delta\omega = \pm\sqrt{B}$. On a donc $\Delta\omega_S = 2\sqrt{B}$ d'où $\Delta\omega_S = 2\sqrt{\gamma_2^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Omega_R^2}$. Cette largeur dépend en général de

l'intensité puisque $\Omega_R = \frac{d|\mathcal{E}|(z)}{\hbar}$ en généralisant la pulsation de RABI qui avait été seulement définie pour $z = 0$. Ω_R^2 est proportionnelle à l'intensité $|\mathcal{E}|^2 = I$. Il n'y aura pas de dépendance pour de petites intensités que l'on peut caractériser par une pulsation de RABI telle que $\gamma_2^2 \gg \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \Omega_R^2$ ce qui revient à dire que cela se produit lorsque $\Omega_R \ll \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$. En cas d'absence de saturation, on a $\Delta\omega_{NS} = 2\gamma_2$.

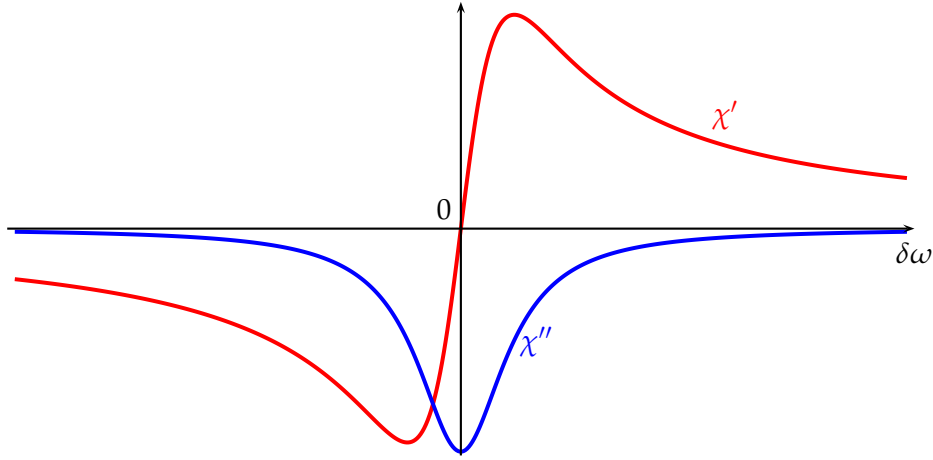


FIGURE 5 – Évolution des parties réelle et imaginaire de la susceptibilité en fonction de l'écart à la résonance

Les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité possèdent le même dénominateur $\frac{1}{\delta\omega^2 + \gamma_2^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{d^2 I}{\hbar^2}}$. On peut factoriser $\delta\omega^2 + \gamma_2^2$ pour mettre en évidence la forme $\frac{1}{1 + \frac{\gamma_2 d^2 I}{\gamma_1 \hbar^2 (\delta\omega^2 + \gamma_2^2)}}$. On obtient bien alors la forme envi-

sagée pour la susceptibilité à savoir $\chi = \chi_\ell \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$ à condition de poser $I_s = \frac{\gamma_1 \hbar^2 (\delta\omega^2 + \gamma_2^2)}{\gamma_2 d^2}$. On complète avec

$\chi'_\ell = -\frac{nd^2 m_0}{\hbar \epsilon_0} \frac{\delta\omega}{\delta\omega^2 + \gamma_2^2}$ et $\chi''_\ell = +\frac{nd^2 m_0}{\hbar \epsilon_0} \frac{\gamma_2}{\delta\omega^2 + \gamma_2^2}$. On divise par I le second membre de l'équation différentielle pour obtenir $\frac{dI}{dz} = -\frac{\omega}{c} \chi''_\ell \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$. On peut donc écrire que $\frac{dI}{I} + \frac{dI}{I_s} = -\frac{\omega}{c} \chi''_\ell dz$. On intègre avec $I(z=0) = I_e$

et $I(z = \ell_a) = I_s$ pour obtenir $\ln \frac{I_s}{I_e} + \frac{I_s - I_e}{I_s} = -\frac{\omega}{c} \chi''_\ell \ell_a$. Si l'intensité est faible alors $I_s - I_e \ll I_s$, on peut négliger ce terme et on retrouve bien une évolution croissante exponentielle puisque $I_s = I_e \exp -\frac{\omega}{c} \chi''_\ell \ell_a$ en n'oubliant pas le fait que $\chi''_\ell < 0$. Dans le cas où le terme $\ln \frac{I_s}{I_e}$ est négligeable, on obtient une évolution linéaire $I_s = I_e + \frac{\omega}{c} |\chi''_\ell| I_s \ell_a$.

1.3 Oscillateur dans le domaine optique

20. L'amplitude sortant du milieu amplificateur est $\mathcal{E}_s$. L'onde se propage dans l'air sur la longueur $\frac{L}{2} - \ell_a$, cela provoque un déphasage qui fait que l'amplitude est $\mathcal{E}_s \exp i\frac{\omega}{c}(\frac{L}{2} - \ell_a)$. Il y a maintenant réflexion avec le coefficient $-\sqrt{R} = -\sqrt{1 - T}$. Nous allons négliger le déphasage provoqué par un déplacement de l'onde transversalement à l'axe de la cavité. Il y a donc trois réflexions de coefficient $-\sqrt{R'} \simeq -1$. Le retour sur la longueur $\frac{L}{2}$ provoque un nouveau déphasage traduit par $\exp i\frac{\omega}{c} \frac{L}{2}$. Finalement, on a $\mathcal{E}'_e = -\sqrt{1 - T} \mathcal{E}_s \exp i\frac{\omega}{c}(\frac{L}{2} - \ell_a) (-\sqrt{R'})^3 \exp i\frac{\omega}{c} \frac{L}{2}$. On peut donc conclure sur l'expression de l'amplitude après un parcours dans la boucle : $\mathcal{E}' = \sqrt{1 - T} \mathcal{E}_s \exp i\frac{\omega}{c}(L - \ell_a)$. Dans le schéma bloc proposé à la figure 1, on a bien mis en évidence la chaîne de retour avec le facteur $(-\sqrt{R'})^3$ et le déphasage $\exp i\frac{\omega}{c} \frac{L}{2}$. Avec l'expression fournie pour le lien entre $\mathcal{E}_e$ et $\mathcal{E}_s$, on peut écrire que $\mathcal{E}'_e = \mathcal{E}_e \exp i\frac{\omega}{c}(1 + \frac{\chi'_s}{2}) \ell_a \exp -\frac{\omega}{c} \frac{\chi''_s}{2} \ell_a \exp i\frac{\omega}{c}(L - \ell_a) \sqrt{1 - T}$. Le transfert est $\underline{H}(\omega) = \frac{\mathcal{E}'_e}{\mathcal{E}_e} = \sqrt{1 - T} \exp -\frac{\omega}{c} \frac{\chi''_s}{2} \ell_a \exp i\frac{\omega}{c}(\frac{\chi'_s}{2} \ell_a + L)$. On a une forme $\underline{H}(\omega) = A \exp i\varphi$ avec $A = \sqrt{1 - T} \exp -\frac{\omega}{c} \frac{\chi''_s}{2} \ell_a$ et $\varphi = \frac{\omega}{c}(\frac{\chi'_s}{2} \ell_a + L)$. En régime stationnaire, on doit avoir $\mathcal{E}'_e = \mathcal{E}_e$, c'est-à-dire $\underline{H} = 1$. On obtient deux conditions, l'une sur l'amplitude et l'autre sur la phase. $1 = \sqrt{1 - T} \exp -\frac{\omega}{c} \frac{\chi''_s}{2} \ell_a$ et $\varphi = 2\pi N$ avec $\chi'_s = \chi'_\ell \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$ et $\chi''_s = \chi''_\ell \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$. Il y a bien un système de deux

équations à deux inconnues la pulsation ω et l'intensité $I(0)$. Cela définit bien le point de fonctionnement du laser. La pulsation ω_N est telle que $\frac{\omega_N}{c}L = 2\pi N$ comme $\frac{\chi'_s \ell_a}{2} \ll L$ puisque l'épaisseur du milieu amplificateur est très mince. Cela veut aussi dire que l'indice optique reste proche de $n = 1$ comme pour l'air. Il n'y a presque pas de déphasage lié au milieu amplificateur. Pour l'équation sur l'amplitude, on peut écrire que $\exp \frac{\omega}{c} \frac{|\chi'_s|}{2} \ell_a = \frac{1}{\sqrt{1-T}}$. Cela traduit le fait que le milieu amplificateur compense les pertes d'énergie par la sortie du faisceau laser. En régime stationnaire, l'énergie apportée pour faire l'inversion de population est exactement celle qui sort du laser pour former le faisceau.

2 Asservissement de la fréquence d'un laser continu monomode

21. Le schéma bloc est fourni à la figure 6. Le signal d'erreur est $\varepsilon = C_0(p) - K(p)s$. En boucle ouverte, on a : $FTBO = \frac{s}{C_0(p)} = C(p)H(p)$. En boucle fermée, on a $s = C(p)H(p)(C_0(p) - K(p)s)$, la fonction de transfert est : $FTBF = \frac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)K(p)}$. On retrouve la relation connue entre la FTBO et la FTBF à savoir $FTBF = \frac{FTBO}{1+FTBO \times K(p)}$ où $K(p)$ est la chaîne de retour. Le capteur a pour rôle de récupérer le signal de sortie pour pouvoir faire la comparaison avec la consigne. Le correcteur a pour rôle, en général, d'amplifier et de mettre en forme le signal d'erreur pour obtenir une sortie intéressante à la fois sur le plan statique et sur le plan dynamique.

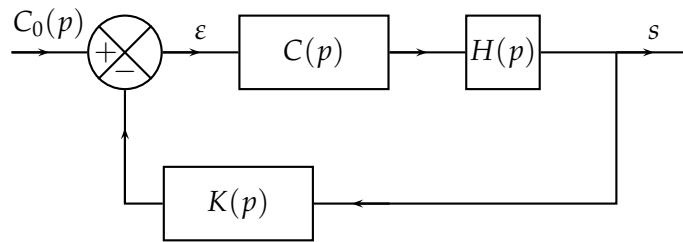


FIGURE 6 – Schéma bloc pour l'asservissement en fréquence du laser

22. On a $\tau = \frac{1}{\nu_{ISL}} = 5 \text{ ns}$, $\tau_W = 100 \text{ ns}$, $\tau_1 \simeq 10 \text{ ns}$, $T_0 = 10 \text{ fs}$ et enfin $\Delta\nu_c = \frac{1}{\tau_c} = 1,3 \text{ MHz}$. On en déduit que $\tau_c \simeq 0,8 \mu\text{s}$. Il est donc clair que la basse fréquence correspond à $\Delta\nu_c$ et donc que le temps caractéristique le plus long de tous est τ_c . La fonction de transfert est donc : $H(p) = \frac{1}{1+\tau_c p} = \frac{1}{1+\frac{p}{\Delta\nu_c}}$.

23. Pour pouvoir agir sur $\nu - \nu_0$, il faut pouvoir agir sur l'intensité puisque comme nous l'avons vu avant, le point de fonctionnement est réglé par le couple $(\nu, I(0))$.

24. On a $\nu = N \frac{c}{L}$ d'où $\nu L = Nc = \text{Cte}$. En différentiant en logarithme, on obtient $\frac{d\nu}{\nu} + \frac{dL}{L} = 0$. Comme $\nu_{ISL} \ll \nu_0$, on peut considérer que les variations seront très petites devant les grandeurs fréquence et longueur. On peut donc écrire que $\frac{\nu_{ISL}}{\nu_0} + \frac{\Delta L}{L_0} = 0$. On a donc : $\Delta L = -L_0 \frac{\nu_{ISL}}{\nu_0}$. Nous savons que $\nu_0 = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$, que $\nu_{ISL} = 2 \times 10^8 \text{ Hz}$ et que $L_0 \simeq 1,5 \text{ m}$. On en déduit que $\Delta L \simeq -0,6 \mu\text{m}$. Cette valeur paraît faible mais elle est accessible avec une lame piézoélectrique. En utilisant la figure fournie, on voit que $\varepsilon < 0$ pour $\nu > \nu_0$. Il faut donc que δU_e soit du signe de $-K$. Mais si $\nu > \nu_0$, cela veut dire que $L < L_0$, il faut donc augmenter la longueur L , ce qui veut dire que la lame doit se contracter pour que e diminue. Mais comme e diminue si U augmente, alors $\delta U_e > 0$. Il faut donc $K < 0$. Nous avons vu au début de l'étude que le rapport des intensités était de la forme $\frac{I_{tr}}{I_{in}} = \theta = \frac{a}{1+b \sin^2 \frac{\omega L}{2c}}$ avec $a = \frac{T}{(1-\sqrt{RR'})^2}$ et $b = \frac{4\sqrt{RR'}}{(1-\sqrt{RR'})^2}$. On a donc $\frac{d\theta}{d\nu} = -\frac{2ab \sin \frac{\pi L}{c} \nu \cos \frac{\pi L}{c} \nu}{(1+b \sin^2 \frac{\pi L}{c} \nu)^2} \frac{\pi L}{c}$. Sur le graphique de la figure 3, on voit que l'intensité possède une résonance très aiguë autour du mode N choisi. On reste donc très près de $\nu_0 = N_0 \frac{c}{L}$. On pose $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$ avec $\Delta\nu \ll \nu_0$. On peut donc en déduire que $\sin \frac{\pi L}{c} \nu = \sin(\frac{\pi L}{c} \nu_0 + \frac{\pi L}{c} \Delta\nu)$. En développant, on obtient $\sin \frac{\pi L}{c} \nu = \sin \frac{\pi L \nu_0}{c} \cos \frac{\pi L \Delta\nu}{c} + \sin \frac{\pi L \Delta\nu}{c} \cos \frac{\pi L \nu_0}{c}$. Comme $\sin \frac{\pi L \nu_0}{c} = \sin N_0 \pi = 0$, $\cos \frac{\pi L \nu_0}{c} =$

$\cos N_0\pi = \pm 1$ et que $\frac{\pi L\Delta\nu}{c} \ll 1$, on peut dire que $\cos \frac{\pi L\Delta\nu}{c} \simeq 1$ et $\sin \frac{\pi L\Delta\nu}{c} \simeq \frac{\pi L\Delta\nu}{c}$. On peut donc écrire que $\sin \frac{\pi L\nu}{c} = \pm \frac{\pi L}{c}\Delta\nu = \pm \frac{\pi L}{c}(\nu - \nu_0)$. On considère, de la même façon, $\cos \frac{\pi L\nu}{c} \simeq \cos N_0\pi = \pm 1$. Enfin, pour le dénominateur, on a $1 + \sin^2 \frac{\pi L\nu}{c} \simeq 1$. Le calcul approché de la dérivée permet d'écrire que $\frac{d\theta}{d\nu} = -2ab \frac{\pi^2 L^2}{c^2}(\nu - \nu_0)$. En prenant en compte les expressions de a et de b , on arrive à l'expression de U_e autour de la condition de résonance : $U_e = -K \frac{8T\sqrt{RR'}}{(1-\sqrt{RR'})^4} \frac{\pi^2 L^2}{c^2}(\nu - \nu_0)$. On peut évaluer numériquement le facteur $2ab \frac{\pi^2 L^2}{c^2} = 0,5 \text{ ns}$.

25. En régime harmonique, on ignore la consigne statique. En boucle ouverte, le calcul conduit à l'expression $F_O(j\Omega) = \frac{S(j\Omega)}{Q(j\omega)} = H(j\Omega)$. En boucle fermée : $H(j\Omega)(Q(j\Omega) - C(j\Omega)K(j\Omega)S(j\Omega)) = S(j\Omega)$. On a donc : $F(j\Omega) = \frac{H(j\Omega)}{1+K(j\Omega)C(j\Omega)H(j\Omega)}$. Tout se passe comme si on faisait une boucle $K(j\Omega)C(j\Omega)$. Pour amortir le bruit, il faut que $K(j\Omega)C(j\Omega)H(j\Omega) \gg 1$ et en même temps que $K(j\Omega)C(j\Omega) \gg 1$.

26. Les correcteurs sont :

- Correcteur proportionnel : il améliore la précision sans garantir la stabilité.
- Correcteur intégral : il annule l'erreur statique mais détériore la stabilité.
- Correcteur proportionnel-intégral : il améliore le comportement statique et dynamique.
- Dérivateur idéal : il est trop sensible aux hautes fréquences, c'est un correcteur théorique inutilisable en pratique.
- Dérivateur réel : il dégrade la précision.
- Proportionnel dérivateur : il a pour effet d'améliorer la stabilité sans détériorer la précision.

Pour être sensible à $\frac{d\theta}{d\nu}$, on devra choisir le correcteur proportionnel dérivateur. Sa forme est donnée par : $C(p) = p(1 + \tau_d p)$ où τ_d est un temps qui le caractérise.