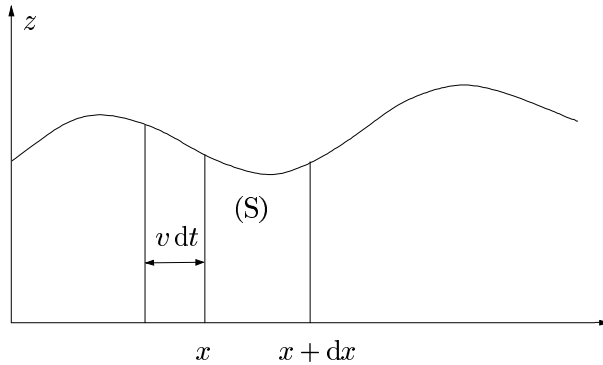


I. MODÈLE DE SAINT-VENANT

I.A.1 L'eau de masse $\delta^2 m_x$ qui entre algébriquement dans (S) entre les instants t et $t + dt$ par le plan d'abscisse x est située entre les plans d'abscisse x et $x - v dt$. On a donc

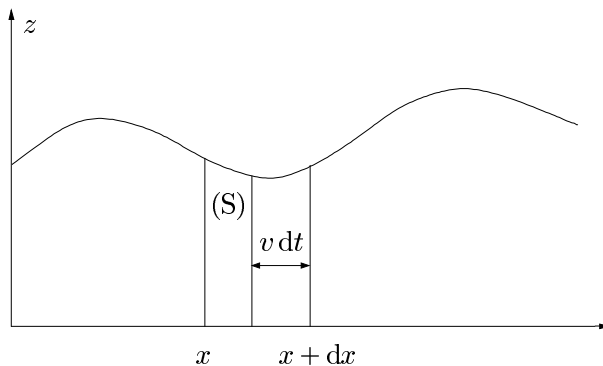
$$\delta^2 m_x = \mu L h(x, t) v(x, t) dt$$



On ne considère pas les variations spatiales de v et h entre x et $x + dx$ parce que l'on multiplie ces grandeurs par des termes infiniment petits et que l'on se limite à l'ordre 1 en dx .

I.A.2 Cette fois, le sens de l'écoulement implique que de l'eau sort de (S) à l'abscisse $x + dx$ (d'où un signe négatif dans l'expression algébrique de la masse entrante). L'eau sortant de (S) entre t et $t + dt$ est située entre les plans $x + dx$ et $x + dx - v dt$. On a alors

$$\delta^2 m_{x+dx} = -\mu L h(x + dx, t) v(x + dx, t) dt$$



I.A.3 La masse $\delta^2 m$ entrant algébriquement dans (S) entre t et $t + dt$ est donc

$$\begin{aligned} \delta^2 m &= \delta^2 m_x + \delta^2 m_{x+dx} \\ &= \mu L (h(x, t) v(x, t) - h(x + dx, t) v(x + dx, t)) dt \end{aligned}$$

Finalement

$$\delta^2 m = -\mu L \frac{\partial(hv)}{\partial x} dx dt$$

I.A.4 Calculons la variation de la masse d'eau entre t et $t + dt$ dans le système (S)

$$\begin{aligned} d^2m &= \mu L dx h(x, t + dt) - \mu L dx h(x, t) \\ &= \mu L \frac{\partial h}{\partial t} dx dt \end{aligned}$$

Ce renouvellement temporel d'eau est dû, en l'absence de puits et de source dans (S) à l'apport d'eau venant de la non uniformité de l'écoulement. On a donc

$$\delta^2m = d^2m$$

soit, en simplifiant,

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = 0} \quad (1)$$

I.B.1 L'équation d'Euler s'écrit

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} p + \mu \vec{g}$$

En projetant sur la coordonnée z , les termes du membre de gauche sont annulés car $\vec{v} = v(x, t) \vec{u}_x$ et il vient

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\mu g$$

En intégrant cette équation entre $h(x, t)$ et z , on obtient

$$\boxed{p(z, x, t) = p_0 + \mu g (h(x, t) - z)}$$

I.B.2 La force volumique de pression et de gravité projetée selon x est, en tenant compte de $\sin \alpha = \alpha$,

$$f_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu g \alpha$$

En dérivant l'équation obtenue à la question I.B.1, il vient

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu g \frac{\partial h}{\partial x}$$

On a alors

$$f_x = \mu g \left(\alpha - \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

La force dF_x s'appliquant au système (S) de volume infinitésimal dV est donc

$$dF_x = f_x dV$$

On obtient finalement

$$\boxed{dF_x = \mu g \left(\alpha - \frac{\partial h}{\partial x} \right) h(x, t) L dx}$$

I.C.1 Le système (S*) peut se décomposer en deux sous-systèmes : le système (S) de masse $\delta m(t)$ et celui constitué par la masse $\delta^2 m_x$ qui entre dans (S) entre t et $t + dt$. Rappelons que la quantité de mouvement est une grandeur extensive d'où

$$P^*(t) = \delta m(t) v(x, t) + \delta^2 m_x v(x, t)$$

En utilisant la question I.A.1, on trouve

$$\delta^2 m_x = \mu L h(x, t) v(x, t) dt$$

Il vient

$$\boxed{P^*(t) = \mu L h(x, t) v(x, t) (dx + v(x, t) dt)}$$

I.C.2 On a de même, à $t + dt$,

$$P^*(t + dt) = \delta m(t + dt) v(x, t + dt) - \delta^2 m_{x+dx} v(x + dx, t)$$

Notons que $\delta^2 m_{x+dx}$ est une quantité négative (définie comme la masse entrant dans le système (S)). Il faut donc mettre un signe négatif devant le terme correspondant pour calculer la quantité de mouvement du système (S*). Or, d'après la question I.A.2,

$$\delta^2 m_{x+dx} = -\mu L h(x + dx, t) v(x + dx, t) dt$$

Il vient alors

$$P^*(t + dt) = \mu L [h(x, t + dt) v(x, t + dt) dx + h(x + dx, t) v^2(x + dx, t) dt]$$

I.C.3 La variation de quantité de mouvement de (S*) est donc

$$P^*(t + dt) - P^*(t) = \mu L [dt (h(x, t) v^2(x + dx, t) - h(x, t) v^2(x, t)) \\ + dx (h(x, t + dt) v(x, t + dt) - h(x, t) v(x, t))]$$

soit

$$P^*(t + dt) - P^*(t) = \mu L dt dx \left(\frac{\partial h v^2}{\partial x} + \frac{\partial h v}{\partial t} \right)$$

I.D.1 Si l'on multiplie l'équation (2) par Ldx , on retrouve dans le membre de gauche la grandeur $\frac{dP^*}{dt}$ calculée à la question I.C.3. Or, le théorème de la quantité de mouvement appliqué au système S* donne

$$\frac{dP^*}{dt} = dF_x + dF_v$$

Si l'on omet le terme phénoménologique représentant les forces de viscosité qui correspond à dF_v , on reconnaît dans le membre de droite de l'équation (2) la grandeur $dF_x = -\mu g \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \alpha \right) h L dx$ calculée à la question I.B.2. On retrouve donc, en utilisant le théorème de la quantité de mouvement, les résultats établis aux questions I.B.2 et I.C.3.

I.D.2 gh a la dimension d'une vitesse au carré tout comme fv/h (puisqu'on les additionne dans l'équation (2)). On en déduit que la dimension de f est celle d'une vitesse multipliée par une longueur, c'est-à-dire $L^2.T^{-1}$. On peut identifier intuitivement cette grandeur à la viscosité cinématique de l'eau qui a la même dimension.

I.E.1 Recherchons les solutions uniformes (dérivées spatiales nulles) et stationnaires (dérivées temporelles nulles). Pour ces solutions, tous les termes de l'équation (2) contenant une dérivée partielle sont nuls. Il vient

$$\alpha g h_0 = f \frac{v_0}{h_0}$$

soit

$$v_0 = \frac{\alpha g h_0^2}{f}$$

I.E.2 La question précédente implique

$$f = \frac{\alpha g h_0^2}{v_0} = 0,036 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

La viscosité cinématique de l'eau est d'environ $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui est effectivement nettement inférieur (de quatre ordres de grandeur) à la valeur calculée. Comme indiqué dans l'énoncé, cette grandeur phénoménologique prend aussi en compte la rugosité du fond qui favorise la turbulence.

I.F En dérivant l'expression $h(x, t) = h_0 + \varepsilon(x, t)$, on obtient

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

Or
$$\frac{\partial(hv)}{\partial x} = h \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial x}$$

De plus
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

En limitant les calculs à l'ordre 1, on a alors

$$\frac{\partial(hv)}{\partial x} = h_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

L'équation (1) devient donc

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

II. CRUE D'UNE RIVIÈRE

II.A.1 Si l'on dérive l'équation (4) par rapport à x , en négligeant les termes inertiels, on obtient

$$g h_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{f}{h_0} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2 f v_0}{h_0^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

soit, en multipliant cette équation par h_0^2/f

$$\frac{g h_0^3}{f} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 2 v_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

Or, l'équation (3) implique

$$h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - v_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

En utilisant le fait que $\frac{g h_0^2}{f} = \frac{v_0}{\alpha}$ (voir la question I.E.1), on trouve alors

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + 3 v_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{h_0 v_0}{\alpha} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \quad (5)$$

II.A.2 On peut remarquer que le membre de gauche de l'équation (5) est la dérivée particulaire de ε dans un écoulement de vitesse $3v_0$. Le terme $3v_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ représente la variation spatiale de ε vue par une particule fluide qui se déplace à la vitesse $3v_0$. Dans le référentiel (R'), cette particule ne bouge pas et ne voit donc pas les variations spatiales de ε . Dans (R'), l'équation d'onde s'écrit donc

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{h_0 v_0}{\alpha} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x'^2} \quad (6)$$

II.A.3 Cette équation est une équation de diffusion. Une équation analogue est celle de la diffusion de particules

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

D est le coefficient de diffusion, analogue à $h_0 v_0 / \alpha$, et n la concentration en particules. L'équation de la chaleur est aussi analogue à l'équation (6) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

K est la diffusivité thermique, également analogue à $\frac{h_0 v_0}{\alpha}$ et T est la température.

Rappelons que cette équation de diffusion est obtenue en combinant deux équations.

- Une équation de conservation (quantité de matière, énergie) telle que, dans le cas de la diffusion de particules :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

où n est la densité et j la densité de flux.

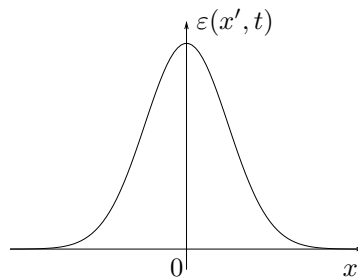
- Une équation phénoménologique traduisant la réponse linéaire du système à une perturbation extérieure ; un gradient de densité produit une densité de flux qui lui est proportionnelle. C'est la loi de Fick :

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

Contrairement à l'équation de conservation, cette loi n'est pas universelle mais empirique, valable pour des perturbations peu importantes et ne dépendant que du gaz considéré (par l'intermédiaire du coefficient D).

En combinant ces deux équations, il est aisé de retrouver l'équation de diffusion.

II.B.1 L'équation d'onde impose que la fonction $\varepsilon(x', t)$ soit paire en x' . Or, à un instant t_1 donné, le graphe de $\varepsilon(x, t)$ se déduit de celui de $\varepsilon(x', t)$ par une translation de $3v_0 t$. On peut conclure que l'allure de $\varepsilon(x', t)$ est :



Supposons que le problème possède une échelle de longueur caractéristique L ; cherchons à obtenir une échelle de temps caractéristique τ en opérant le changement de variable $x^* = x/L$ et $t^* = t/\tau$. On a alors

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^{*2}}$$

et

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t^*}$$

On obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^{*2}} = \frac{L^2 \alpha}{h_0 v_0 \tau} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t^*}$$

On suppose que les échelles spatiale L et temporelle τ choisies sont adaptées lorsque les poids relatifs de ces deux membres sont analogues, ce qui revient à prendre

$$\frac{L^2 \alpha}{h_0 v_0 \tau} \approx 1$$

L'échelle spatiale caractéristique au bout d'un temps t peut être $d_{1/2}$ et l'on a

$$d_{1/2} \approx \left(\frac{h_0 v_0 t}{\alpha} \right)^{1/2}$$

d'où

$$p = \frac{1}{2}$$

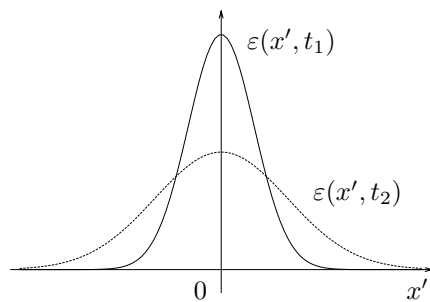
II.B.2 Après la crue, la quantité d'eau est conservée. L'aire définie par la courbe $\varepsilon(x)$ est donc constante au cours du temps. Cette aire vaut, en ordre de grandeur $\varepsilon_M d_{1/2}$. On en déduit que ε_M varie comme $t^{-1/2}$. On a alors

$$q = -\frac{1}{2}$$

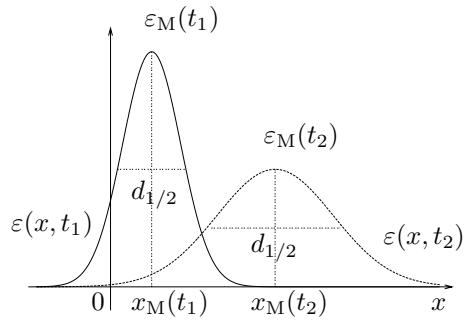
II.B.3 D'après les questions précédentes, on a

$$\varepsilon_M(t_1) = 2 \varepsilon_M(t_2) \quad \text{et} \quad d_{1/2}(t_2) = 2 d_{1/2}(t_1)$$

On en déduit donc le graphique suivant



$\varepsilon(x, t)$ se déduit de $\varepsilon(x', t)$ par une translation de $3 v_0 t$; on a donc :



II.B.4 On peut considérer que la crue est terminée en $x = 0$ quand $x_M(t) \approx d_{1/2}(t)$. Il faut pour cela que

$$3 v_0 t \approx \left(\frac{h_0 v_0 t}{\alpha} \right)^{1/2}$$

c'est-à-dire

$$t \approx \frac{h_0}{9\alpha v_0}$$

L'application numérique donne :

- pour l'Ohio

$$t \approx 6\,670 \text{ s} \approx 1,85 \text{ h}$$

- pour la Somme

$$t \approx 667\,000 \text{ s} \approx 7,7 \text{ jours}$$

On constate que l'échelle des temps est très différente pour ces deux rivières : la crue d'une rivière pour laquelle la vitesse de l'écoulement est lente (comme la Somme) est beaucoup plus longue que celle d'une rivière à vitesse d'écoulement importante (comme l'Ohio).

III. APPARITION D'IRRÉGULARITÉS À LA SURFACE

III.A.1 Si $k = 0$, le membre de gauche de l'équation (7) est nul. Il vient alors

$$c_0 = 3v_0$$

III.A.2 En remplaçant c par c_0 dans le membre de gauche de l'équation (7),

$$k(4v_0^2 - gh_0) \frac{h_0^2}{jf} = 3v_0 - c$$

On en déduit

$$c = 3v_0 + j \frac{k h_0^2}{f} (4v_0^2 - gh_0)$$

On a $c = c' + j c''$ avec

$$\begin{cases} c' = 3v_0 \\ c'' = \frac{k h_0^2}{f} (4v_0^2 - gh_0) \end{cases}$$

On peut remarquer que c'' est effectivement du signe de $4v_0^2 - gh_0$.

On s'intéresse ici au cas où k tend vers 0. Dans ce cas, c tend vers c_0 . On comprend alors que l'on puisse considérer que c vaut c_0 dans le membre de gauche de l'équation (7) car la différence $c - c_0$ est négligeable devant le terme ajouté. En revanche, on retrouve cette différence dans le membre de droite et l'on ne peut la négliger.

Notons aussi qu'il n'est pas surprenant de retrouver dans l'équation (7) le terme imaginaire proportionnel au terme lié à la dissipation f . Ce lien existe dans bien d'autres équations de dispersion que l'on peut trouver en physique : équation de diffusion, équation d'onde dans un conducteur ohmique...

III.A.3 Une petite perturbation est amplifiée exponentiellement si l'on peut écrire

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_M e^{\sigma t} e^{jk(x-c't)} \quad \text{avec } \sigma > 0$$

La condition est que $4v_0^2 > gh_0$ puisque $\sigma = kc''$. Il faut donc que $F > 1/4$. La perturbation est due au fait que l'écoulement est trop rapide (v_0 grand). Une instabilité se développe alors sous forme d'ondulations de la surface libre (rouleaux). Cette perturbation est en compétition avec la gravité qui tend à stabiliser la surface libre. Un nombre sans dimension qui quantifie cette compétition est le nombre de Froude qui compare l'énergie cinétique en v_0^2 et l'énergie potentielle de pesanteur en gh_0 .

$$F = \frac{v_0^2}{gh_0}$$

La vitesse de l'écoulement est suffisante pour provoquer l'instabilité quand le nombre de Froude est supérieur à une valeur critique de $1/4$. Dans le cas de la rivière Ohio,

$$F_{\text{Ohio}} = \frac{1}{60} < \frac{1}{4}$$

L'instabilité ne peut donc pas apparaître dans le cas de cette rivière.

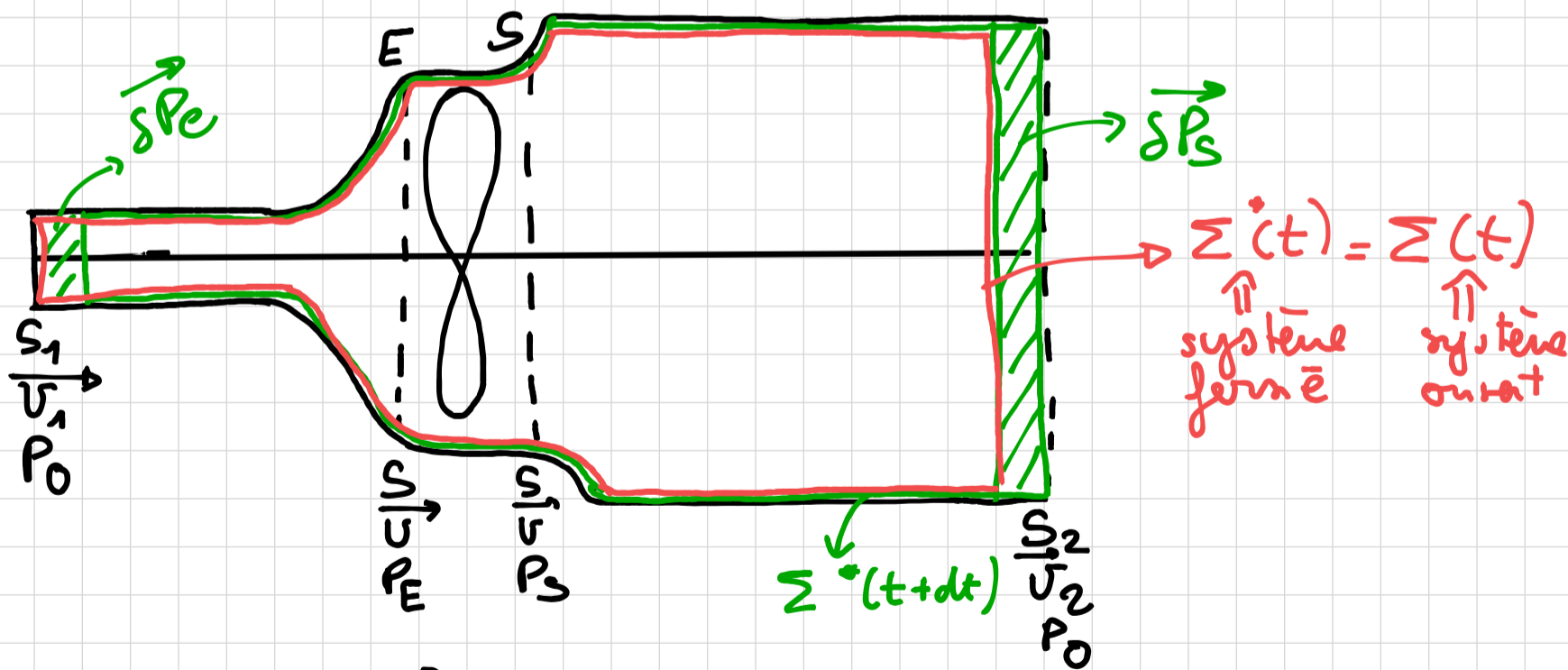
Correction DS3 - ENS(L) - 2016

Citer explicitement le th. de Venturi ou évoquer la conservation de D_V

① Le vent cède une partie de son énergie cinétique à l'éolienne donc sa vitesse diminue: $v_2 < v_1$
 Or, l'écoulement est incompressible donc son débit volumique se conserve: $S_1 v_1 = S_2 v_2 = D_V$
 D'où $S_2 > S_1 \Rightarrow$ Le tdc s'évase.

② $q_m = \underbrace{\int_S}_{e=st} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho D_V = \rho S_1 v_1 = \rho S v = \rho S_2 v_2$

③ a Bilan de qmvt sur la totalité du tdc [1, 2]



$\left\{ \begin{array}{l} \text{à l'instant } t: \vec{P}^*(t) = \vec{P}(t) \\ \text{à l'instant } t+dt: \vec{P}^*(t+dt) = \vec{P}(t+dt) - \delta P_e + \delta P_s \end{array} \right.$
 $\Rightarrow \frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{\delta m s}{dt} \vec{v}_2 - \frac{\delta m e}{dt} \vec{v}_1 \quad (\vec{v}_s = \vec{v}_2 \text{ et } \vec{v}_e = \vec{v}_1)$

HYP : Ecoulement incompressible - statio

$$\Rightarrow \begin{cases} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \\ \times \rho_m = \rho = \frac{\delta m}{\delta V} = \frac{\delta m}{\delta t} \end{cases}$$

D'où $\boxed{\frac{D\vec{P}}{Dt} = \rho_m (v_2 - v_1) \vec{e}_x}$

BAM agissant sur (S')

- Résultante des forces de pression exercées par l'air extérieur à (S') : (S') étant plongé ds P_0 , cette résultante est nulle.
- Le poids : négligé
- Force exercée par l'hélice sur l'écoulement d'air.

⇒ On en déduit : $\boxed{\rho_m (v_2 - v_1) = \vec{F}_{h/a}}$

b HYP : Ecoulement incompressible - homogène, parfait

|| rappeler systématiquement les hypothèses stationnaire sur les zones $[1, E]$ et $[S, 2]$

⇒ On applique le théorème de Bernoulli entre (1) et (E) puis entre (S) et (2).

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho v_1^2 + P_0 = \frac{1}{2} \rho v^2 + P_E \Rightarrow P_E = P_0 + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v^2) \\ \frac{1}{2} \rho v_2^2 + P_0 = \frac{1}{2} \rho v^2 + P_S \Rightarrow P_S = P_0 + \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v^2) \end{cases}$$

c • On effectue un bilan de quantité de mouvement ds la zone $[E, S]$

⇒ Comme précédemment, on trouve :

$$\rho_m (v_2 - v_1) = \sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$$

- BAM
 - x Force de pression en entrée:

$$\vec{F}_1 = P_E S \vec{e}_x$$
 - x Force de pression en sortie:

$$\vec{F}_2 = -P_S S \vec{e}_x$$
 - x Force de pression latérale exercée par l'air extérieur: cette force de pression est nulle car la section du tdc est constante. (Penser à le justifier!)
 - x Force exercée par l'hélice sur l'écoulement

⇒ on en déduit:

$$\vec{O}' = (P_E - P_S) S \vec{e}_x + \vec{F}_{r/a}$$

$$\vec{F}_{r/a} = (P_S - P_E) S \vec{e}_x$$

- En remplaçant, P_E et P_S par leurs expressions, on obtient:

$$\vec{F}_{r/a} = \frac{\rho}{2} S (v_2^2 - v_1^2) \vec{e}_x$$

d On a donc obtenu:

$$\vec{F}_{r/a} = q_m (2 - v_1) \vec{e}_x = \frac{\rho S}{2} (v_2^2 - v_1^2) \vec{e}_x \quad \text{ou} \quad q_m = \rho v S$$

⇒ on a donc:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

- ④ a • Bilan d'énergie mécanique sur le système [1, 2]

$$E_m^*(t) = E_m(t)$$

$$E_m^*(t+dt) = E_m(t+dt) - \delta E_m^e + \delta E_m^s$$

$$\Rightarrow \frac{DE_m}{Dt} = \frac{dE_m}{dt} - \frac{\delta E_m^e}{dt} + \frac{\delta E_m^s}{dt} = \frac{dE_m}{dt} + D_{ms} E_{ms} - D_{me} E_{me}$$

- HYP: RS $\Rightarrow \begin{cases} \frac{dE_m}{dt} = 0 \\ D_{ms} = D_{me} = q_m \end{cases}$

- D'où:

$$\begin{aligned} \frac{DE_m}{Dt} &= q_m (e_{ms} - e_{me}) = q_m (e_{ps} + e_{cs} - e_{pe} - e_{ce}) \\ &= \frac{q_m}{2} (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

- TEM: $\frac{DE_m}{Dt} = \underbrace{\mathcal{P}_{NC}^{int}}_0 + \mathcal{P}_{NC}^{ext}$
car écoulement parfait incompressible

- Bilan des puissances extérieures appliquées:

- Puissance reçue de l'hélice: $\mathcal{P}_{r \rightarrow a}$

- Puissance des forces de pression en entrée:

$$\mathcal{P}_1 = P_0 S_1 v_1$$

- Puissance des forces de pression en sortie:

$$\mathcal{P}_2 = -P_0 S_2 v_2$$

- Puissance des forces de pression latérale:

$$\mathcal{P} = \iint_{S_L} (P_0 d\vec{S}_L) \cdot \vec{v} = 0 \text{ car } d\vec{S}_L \perp \vec{v}$$

\Rightarrow La somme des puissances $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_L$ est donc nulle. Ce résultat a déjà été utilisé en cours: La puissance des forces de pression exercées sur système fermé plongé dans $P_{ext} = cste$ est nulle (HYP: écoulement incompressible)

l'écoulement étant incompressible, on a:
 $S_1 v_1 = S_2 v_2$
 $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = 0$

A lire:

Pourquoi: \rightarrow cte

$$\oint_{\Sigma} P_n d\vec{S}_n = 0$$

Entraine:

$$\oint_{\Sigma} P_n \vec{v}_n \cdot d\vec{S}_n = 0$$

\Rightarrow On en déduit: $\frac{q_m}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \mathcal{P}_{r \rightarrow a}$

$\Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}_{a \rightarrow r} = -\mathcal{P}_{r \rightarrow a}$

Attention aux signes

$$\boxed{b} \quad \mathcal{P}^* = \frac{1}{2} e S v_1^3 = \underbrace{e S v_1}_{\frac{\delta m}{dt}} \left(\frac{1}{2} v_1^2 \right) = \frac{1/2 \delta m v_1^2}{dt}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}^* = \frac{dE_c}{dt}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}^*$ est la puissance cinétique incidente
(sur la surface S de l'hélice)

\boxed{c} • On définit, le rendement : $\eta^* = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}^*}$! signes

$$\Rightarrow \eta^* = \frac{\frac{1}{2} 9m (v_1^2 - v_2^2)}{\frac{1}{2} e S v_1^3} = \frac{e S v (v_1^2 - v_2^2)}{e S v_1^3}$$

$$\eta^* = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) (v_1^2 - v_2^2) \times \frac{1}{v_1^3}$$

$$\eta^* = \frac{1}{2} (1 + r) (1 - r^2) = \frac{1}{2} (1 + r)^2 (1 - r)$$

où $r = v_2 / v_1$

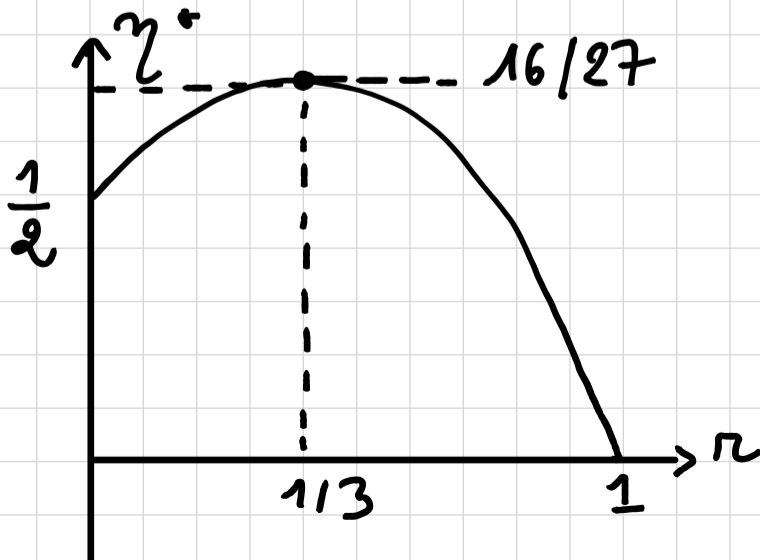
\boxed{d} • r est compris entre 0 et 1

• $\eta^*(0) = 1/2$ et $\eta^*(1) = 0$

• $\frac{d\eta^*}{dr} = \frac{1}{2} (1 - 3r)(1 + r) \Rightarrow \frac{d\eta^*}{dr} = 0$ pour $r = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \eta^*_{\max} = \eta^*\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} \approx 0,6$

• Trace :



! $r > 0$
 $\eta^* > 0$

e) Le rendement maximal est pour $r = \frac{1}{3}$
 et donc pour $v_2 = \frac{v_1}{3}$.

5) a) Il est clair que la vitesse a une composante radiale, sinon la section serait uniforme.

b) x NON car on ne peut pas isoler de l'écoulement stable (stationnaire) ou l'énergie mécanique d'une p.f n'est pas conservée

c) x le rapport $r = \frac{v_1}{v_2}$ est déterminé par la forme des pales et leur nombre et l'angle d'in

6) a) odg : { x vent modéré : $v \sim 10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}$
 x distance caractéristique : $e \sim 10 \text{ cm}$
 x $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$; $\eta = 1,85 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$

prendre la distance la plus faible \Rightarrow épaisseur

$\Rightarrow Re = \frac{LV}{\eta} = 10^5 \Rightarrow$ Écoulement turbulent

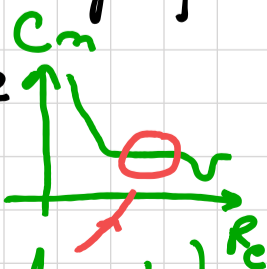
b)
$$\vec{F} = - \underbrace{\frac{1}{2} \rho v^2}_{\rho c, v} \times C_x \times S \times \frac{\vec{v}}{v}$$

\downarrow \downarrow
 Coeff de traînée \downarrow \downarrow
 Païte couple

Formule générale
 ⚠ La formule de Stokes n'est pas la plus générale

Argument : lorsque C_x est coté (indépendant de η), l'écoulement est turbulent, les effets correctifs prédominent et \vec{F} ne dépend pas de η : Le solide "pousse brutalement" les p.f sur sa trajectoire : l'énergie cinétique (volumique) des p.f intervient.

x Odg de $C_x : \approx 1$ (écoulement turbulent)



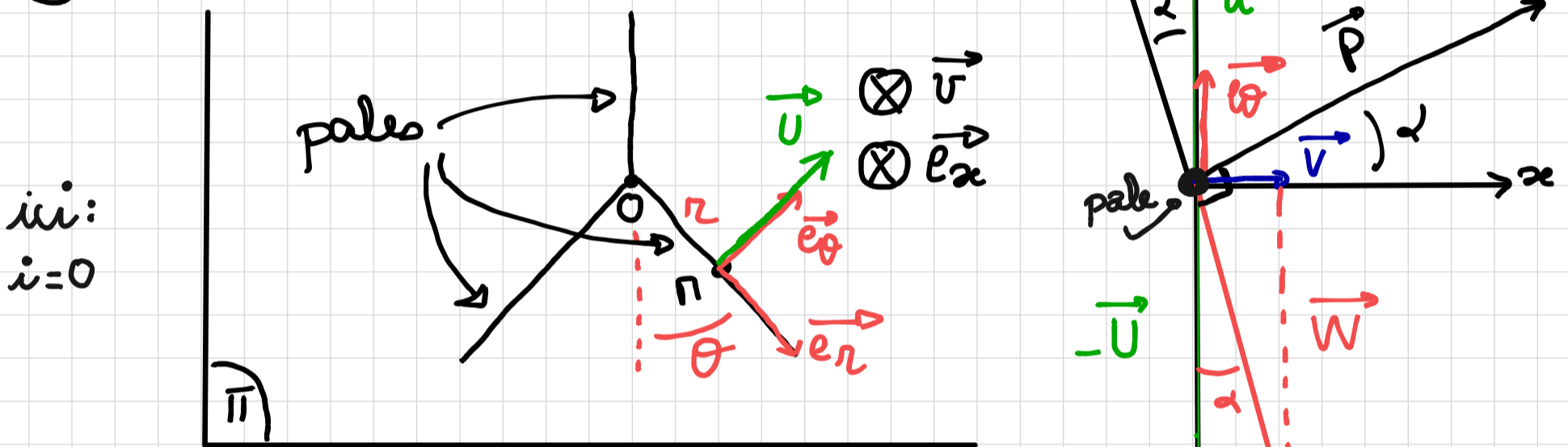
⑦ C_T et C_p sont sans dimensions

preuve :

$$[C_T] = [C_p] = \left[\frac{F}{\rho A W^2} \right] = \left[\frac{m \frac{L}{T^2}}{\frac{m}{L^3} \times L^2 \times \left(\frac{L}{T}\right)^2} \right] = 1$$

types de C_T et C_p dépendent de la forme de l'obstacle (pour l'aile de I) et de l'écoulement turbulent et de l'angle d'incidence i .

⑧ • plan des pales :



iii:
 $i=0$

• $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$

Penser à la composition des vitesses

- ⑨
- \vec{T} est opposée à \vec{W}
 - \vec{n} est \perp à \vec{W} (de l'intrados vers l'extrados)

$$\begin{aligned} U &= W \cos \alpha \\ V &= W \sin \alpha \end{aligned}$$

⑩ La face qui participe à l'entraînement des pales est de la forme :

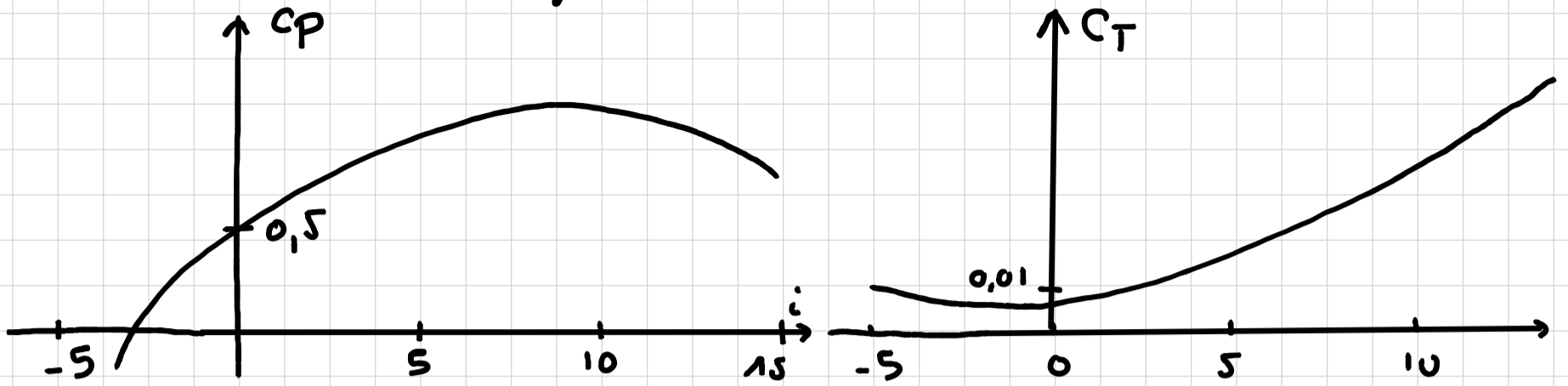
$$\vec{F}_u = F_u \vec{e}_\theta \text{ où } F_u = (\vec{T} + \vec{P}) \cdot \vec{e}_\theta$$

avec $F_u = f_u \times A$

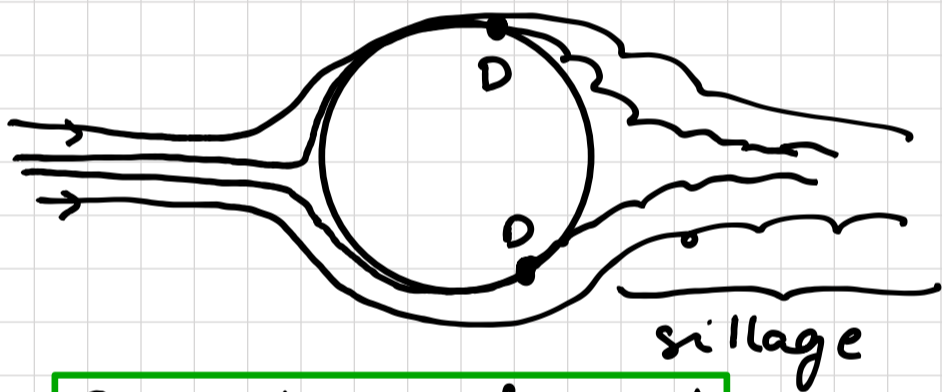
$$\Rightarrow f_u = \frac{1}{A} (T \cos \alpha + P \sin \alpha) = \frac{1}{2} \rho W^2 (C_T \cos \alpha + C_p \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{f_u = \frac{1}{2} \rho W (C_T U + C_p V)}$$

(M) a Allure des graphes :



b) \times Ecoulement autour d'une sphère : sur l'aval de la sphère, on observe un décollement de la couche limite. Au delà du point de décollement, on observe des tourbillons instables : c'est le sillage.



$D = \text{pt de décollement}$

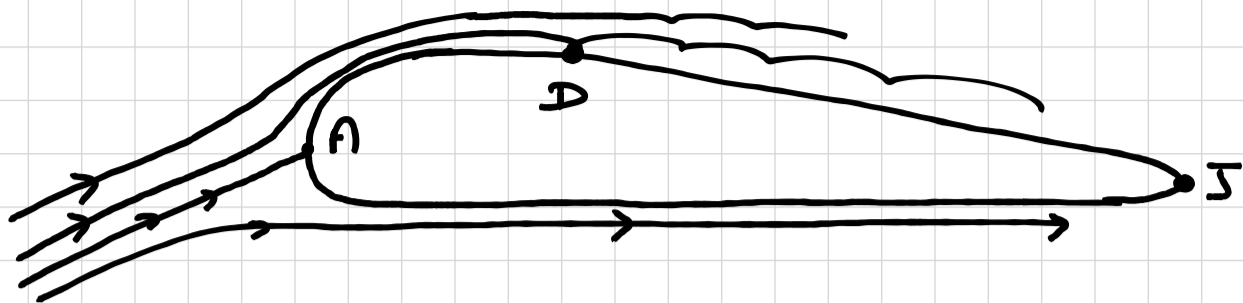
Plus $Re \uparrow$, plus le pt de décollement se situe sur l'amont de la sphère et plus le sillage est grand.

\times il se passe la même chose sur l'extrados d'une pale puisque l'origine du décollement est un champ de pression défavorable ($P \downarrow$ le long de la corde une fois passée le col).

Angle nul:



Angle non nul:



lorsque $i \uparrow$, le pt de décollement se déplace en amont de la pale

OR, d'après le théorème de Kutta-Joukowski la portance de la pale est proportionnelle à la circulation du champ des vitesses autour de l'aile. Cette circulation s'annule sur la portion (DS) où la couche limite n'adhère pas à la pale : plus la longueur (DS) est importante plus la portance diminue

Ainsi, lorsque $i \uparrow$, le pt D progresse sur l'amont de la pale, la longueur (DS) augmente et donc la portance diminue.

- c** • $\frac{C_p}{C_T}$ est la pente de la droite $C_p = \left(\frac{C_p}{C_T}\right) C_T$ qui passe par 0 et par le pt qui nous intéresse
 \Rightarrow Il faut donc trouver le pt correspondant à la droite la + pentue.
 \Rightarrow Pour $i^* = 2^\circ$, on a une pente maximale qui vaut $\frac{2}{0,025} = 80$

- d** $u = r\Omega$ où Ω est la vitesse angulaire du rotor et r la distance à l'axe du pt étudié

$$\Rightarrow \vec{W} = \vec{U} - r\Omega \vec{e}_x$$

\Rightarrow Plus $r \uparrow$, plus $v = r\Omega \uparrow$ et plus \vec{W} est inclinée par rapport au plan des pales (π) et de plus $\alpha \uparrow$

\Rightarrow pour garder le même angle i^* , il faut donc augmenter l'inclinaison de la pale par rapport au vent au fur et à mesure que $r \uparrow$

(12)

$$* \mathcal{M} = \int \frac{dM}{dr} dr = \text{aire sous la courbe de la courbe } \frac{dM}{dr} = f(r).$$

\Rightarrow on compte les carreaux entiers (33) puis on regroupe les morceaux de carreaux pour en faire des entiers (11)

\Rightarrow on compte 44 carreaux (de côtés $20\text{ kN} \times 10\text{ m}$)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{M} = 8,8 \times 10^6 \text{ N.m}}}$$

$$* \mathcal{P} = \text{puissance fournie par l'air aux pales} \\ = \mathcal{M}\Omega \quad (\text{où } \Omega = \frac{2\pi}{f} = 0,9 \text{ rad/s})$$

$$\underline{\underline{\text{AN } \mathcal{P} = 8 \text{ MW}}}$$

(13)

$$\eta_{\text{conv}} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}^*}$$

où \mathcal{P}^* est la puissance cinétique in : dente = $\frac{1}{2} \rho S v_1^3$

$$\underline{\underline{\text{AN } \mathcal{P}^* = 30 \text{ MW}}}$$

$$\underline{\underline{\eta_{\text{conv}} = 0,27}}$$

où $\begin{cases} v_1 = 13 \text{ m/s} \\ S = \pi r^2 \quad (\text{graphe } r = 90 \text{ m}) \end{cases}$

14

$A_f =$ aire sous la courbe

$$= \int_{\text{courbe}} f(v) dv = \sum_i \underbrace{v_i}_{\text{diénet}} \underbrace{\Delta v_i}_{1 \text{ m/s}} = \sum_i v_i$$

$$= (2 + 3,8 + 5,5 + 6,8 + 7,8 + 8,3 + 8,5 + 8,3 + 8 + 7,3 + 6,5 + 5,6 + 4,8 + 3,9 + 3,1 + 2,5 + 1,9 + 1,5 + 1 + 0,7 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) \times \frac{1}{100} \approx 1$$

\Rightarrow Résultat attendu car $\sum v_i$ correspond à la durée cumulée relative :

$$\sum_i \underbrace{\Delta t_i}_{\text{Durée absolue}} = \underbrace{T}_{1 \text{ an}} \Rightarrow \sum_i \frac{\Delta t_i}{T} = 1 \Rightarrow \sum_i v_i = 1$$

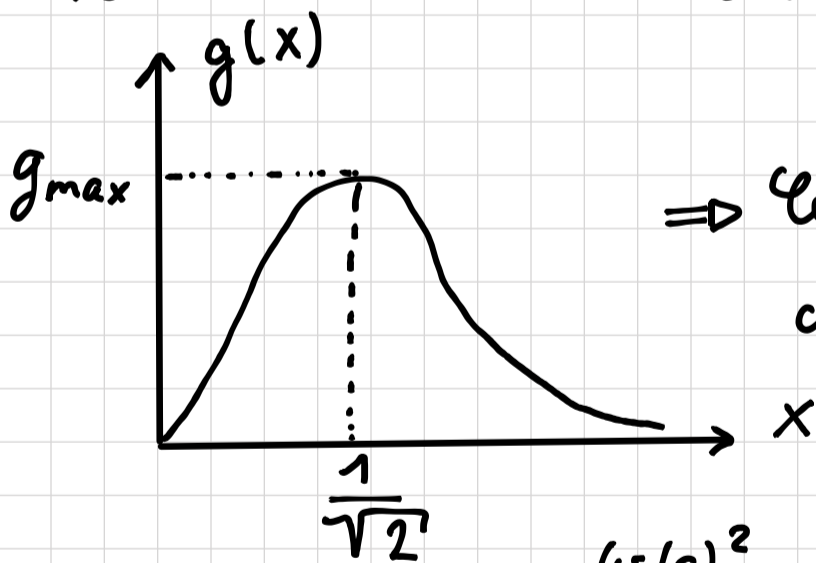
15

a)

$$g(x) = \frac{F(x)}{a} = x e^{-x^2}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} g = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} g = 0; \frac{dg}{dx} = e^{-x^2} [1 - 2x^2] = 0 \text{ pour } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$(g_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2})$$

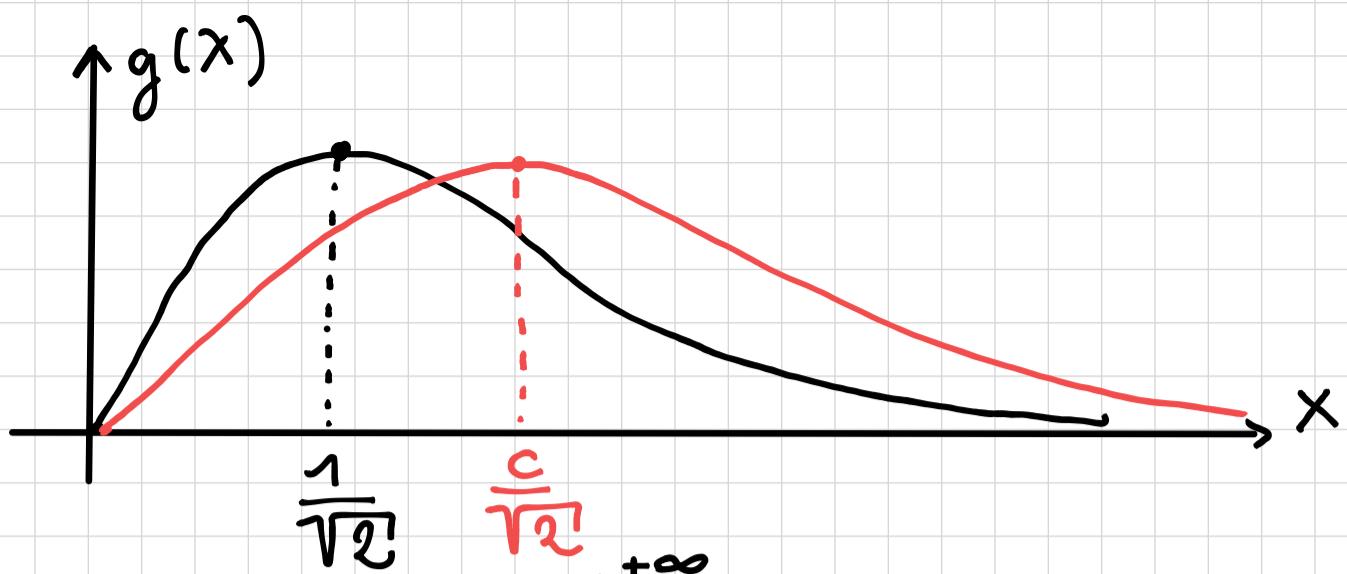


\Rightarrow Cela correspond bien à la courbe précédente.

$$b) \frac{f}{a}(v) = \frac{F(v)}{a \cdot c} = \frac{v}{c} e^{-(v/c)^2} \quad \left(\frac{f}{a} \right)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$$

$\Rightarrow \frac{f}{a}$ est donc maximale pour $v = \frac{c}{\sqrt{2}}$

\Rightarrow On passe du graphe de $g(x)$ à celui de $\frac{f(v)}{c}$ par une homothétie de facteur c .



c) d'après a), on a : $\int_0^{+\infty} f(v) dv = 1$

d'après les compléments mathématiques, on a :

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{a}$$

Ainsi : $\underbrace{\int_0^{\infty} f(v) dv}_1 = \int_0^{\infty} F\left(\frac{v}{c}\right) dv = \int_0^{\infty} F\left(\frac{v}{c}\right) d\left(\frac{v}{c}\right) \times c$

$$= c \int_0^{\infty} F(x) dx$$

$$a \int_0^{\infty} g(x) dx = \frac{a}{a}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{ca}{a} \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{a}{c}}$$

d) • Le maximum sur la courbe est pour $v_{\max} = 7 \text{ m/s}$
 et aussi pour $x_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{v_{\max}}{c}$

$$\Rightarrow \text{on en déduit } c = \sqrt{2} v_{\max}$$

AN $c = 10 \text{ m/s}$

• On en déduit $a = \frac{2}{c} = \frac{\sqrt{2}}{v_{\max}}$

AN $a = 0,20 \text{ s/m}$

e) • Sur une année, on mesure la durée Δt_i pdt laquelle le vent souffle à la vitesse v_i .

$$\Rightarrow \text{on en déduit } \begin{cases} z_i = \frac{\Delta t_i}{T} \\ x_i = \frac{v_i}{c} \end{cases} \text{ pour chaque } v_i$$

• Sachant que $f(v) = a g\left(\frac{v}{c}\right)$, on s'attend à la

relation suivante entre les x_i et z_i :

$$z_i = a x_i e^{-x_i^2}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{z_i}{x_i}\right) = \ln a - x_i^2$$

- Ainsi, pour vérifier le modèle, il suffit de tracer
 $\ln\left(\frac{z_i}{x_i}\right)$ en fct de x_i^2
 \Rightarrow on doit obtenir une droite de pente -1 et
d'ordonnée à l'origine $-\ln a$.

(on peut utiliser le coefficient r^2 pour valider la régression).

①⑥ v^* est la vitesse la plus probable $\Rightarrow v^* = v_{\max} = \frac{c}{\sqrt{2}}$

①⑦ si $v^* = 13 \text{ m/s}$, alors $c = v_{\max} \sqrt{2} = 20 \text{ m/s}$

- ①⑧ On peut mesurer la vitesse du vent avec :
- un anémomètre à fil chaud ①
 - un tube de Pitot ③
 - un anémomètre à boules ②



Élément de correction de l'exercice de rattrapage.

1.

Les équipotentielles sont des plans de $x = cte$.

2.

Sur la cathode $V(x) = 0$. À un point x l'énergie électrostatique est

$$U(x) = -eV_x(x)$$

Donc l'énergie cinétique en ce point est $T = \frac{1}{2}mv_x^2$ afin que $T + U = 0$. Nous avons donc que la vitesse de l'électron est donnée par

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = eV_x(x) \quad \text{kg.m}^2.\text{s}^{-2} = \text{C.V}$$

et on obtient la première équation entre v_x et le potentiel :

$$v_x = \sqrt{\frac{2eV_x(x)}{m}} \quad \left[\frac{e}{m}\right] = \text{V}^{-1}.\text{m}^2.\text{s}^{-2} \quad (6)$$

où nous avons mis $v_x(0) = V(0) \equiv V_c = 0$. On obtient la densité de charge à partir de l'équation $j_x = \rho_x v_x = -I/S = cte$, (convention récepteur) donc la deuxième équation est :

$$\rho_x = -\frac{I}{v_x S} = -\sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{I}{S} V_x^{-1/2} \quad [\rho_x] = \text{C.m}^{-3} = \text{m}^{-3}.\text{s.C.s}^{-1} \quad (7)$$

Les signes négatifs apparaissent parce que $\vec{j} = \rho \vec{v}$ est une relation vectorielle, et ρ est négative. La vitesse des charges et le courant sont donc de directions opposées.

3.

La troisième équation vient de l'électromagnétisme. Puisque les grandeurs physiques ne dépendent que de la coordonnée x , l'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{d^2}{dx^2} V_x(x) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8)$$

Mettant l'équation (7) dans l'équation de Poisson (8) on obtient :

$$\frac{d^2}{dx^2} V_x = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{I}{S} V_x^{-1/2} = KV^{-1/2} \quad \text{où} \quad K = \sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{I}{S\epsilon_0} \quad (9)$$

$$2 \frac{dV}{dx} \frac{d^2}{dx^2} V = 2KV^{-1/2} \frac{dV}{dx}$$

Multipliant les deux cotés par $2 \frac{dV}{dx}$ on peut réécrire cette équation dans la forme suivante:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 = 2KV^{-1/2} \left(\frac{dV}{dx} \right) \quad (10)$$

4.

Pour ce type d'équation différentiel, il s'avère que la solution est de la forme :

$$\frac{dV}{dx} = CV^\gamma \quad (11)$$

Insérant cette solution dans l'éq.(10), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (CV^\gamma)^2 &= 2KV^{-1/2}CV^\gamma \\ 2\gamma C^2V^{2\gamma-1}\frac{dV}{dx} &= 2CKV^{\gamma-1/2} \\ \frac{dV}{dx} &= \frac{K}{\gamma C}V^{1/2-\gamma}\end{aligned}\quad (12)$$

Pour que les l'éq.(12) et l'éq.(11) soit consistante, il faut donc :

$$\begin{aligned}1/2 - \gamma = \gamma &\Rightarrow 2\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{4} \\ \frac{K}{\gamma C} = C &\Rightarrow C^2 = 4K \Rightarrow C = 2\sqrt{K}\end{aligned}$$

Donc nous avons réduit l'éq.(10) de deuxième ordre à une équation de premier ordre :

$$\frac{dV}{dx} = 2\sqrt{K}V^{1/4}\quad (13)$$

Ceci est une équation qu'on peut résoudre par intégration :

$$\begin{aligned}\int \frac{dV}{V^{1/4}} &= 2\sqrt{K} \int dx \\ \int V^{-1/4}dV &= \frac{4}{3}V^{3/4} = 2\sqrt{K}x + cte\end{aligned}$$

Puisque $V(x) = 0$, nous avons le résultat final de

$$V_x^{3/4} = \frac{3}{2}\sqrt{K}x = \frac{3}{2}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{I}{S\epsilon_0}}x\quad (14)$$

On peut vérifier que c'est la bonne solution en écrivant explicitement : $V^{3/4} = \frac{3}{2}K^{1/2}x$

$$\begin{aligned}V_x &= \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} K^{4/6}x^{4/3} & V^{-1/2} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-2/3} K^{-2/6}x^{-2/3} \\ \frac{d}{dx}V_x &= \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} K^{4/6}x^{1/3} & \frac{d^2}{dx^2}V_x &= \frac{1}{33}\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} K^{4/6}x^{-2/3}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}V_x &= \frac{4}{3^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2/3} K^{4/6}K^{-2/6}K^{-2/6}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3^2}\left(\frac{3^2}{2^2}\right)K\left(\frac{3}{2}\right)^{-2/3} K^{-2/6}x^{-2/3} \\ &= KV^{-1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U^{3/4} &= \Delta V^{3/4} = \frac{3}{2} \sqrt{KL} = \frac{3}{2} L \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/4} \left(\frac{I}{S\epsilon_0} \right)^{1/2} \\
 U^{3/2} &= \left(\frac{3}{2} \right)^2 L^2 \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/2} \frac{I}{S\epsilon_0} \\
 I &= S\epsilon_0 \left(\frac{2e}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{3L} \right)^2 U^{3/2}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Conclusion : le dipôle est non linéaire (ancêtre de la diode)