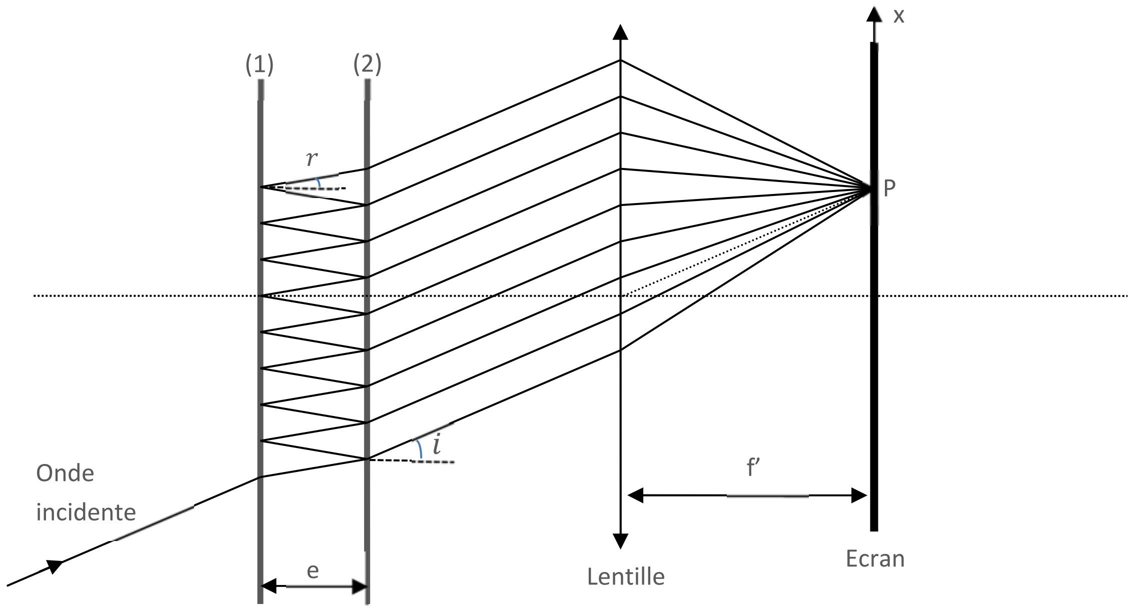
FABRY PEROT.

Corrigé



1.

Déphasage :

- ✓ La différence de marche entre les deux rayons étant $\delta = 2e\cos r$, le déphasage vaut : $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi e}{\lambda}\cos r$.
- ✓ Les franges d'interférences sont des franges circulaires de centre F' le foyer image de la lentille.

Calcul de l'intensité :

- ✓ Méthode complexe (la méthode de Fresnel n'est pas envisageable car les vibrations n'ont pas même intensité) :
- ✓ Coefficient de réflexion interface air → verre : $r = r_{av} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1-n}{1+n} \Rightarrow R_{av} = r_{av}^2 = r^2 = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} = R$

  (On ne considère que les réflexions air → verre)
- ✓ Coefficient de transmission interface air → verre : $t_{av} = \frac{2n_1}{n_1+n_2} = \frac{2}{1+n} \Rightarrow T_{av} = \frac{n_2}{n_1} t_{av}^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}$
- ✓ Coefficient de transmission interface verre → air : $t_{va} = \frac{2n_2}{n_1+n_2} = \frac{2n}{n+1} \Rightarrow T_{va} = \frac{4n}{(n+1)^2} = T_{av}$
- ✓ Coefficient de transmission total à travers une lame : $t^2 = t_{av}t_{va} = \frac{4n}{(n+1)^2} = T_{av} = T_{va}$

Notons que l'on a bien : $t^2 + r^2 = 1$

- ✓ Vibrations lumineuses arrivant en M (les s_i sont comptés de bas en haut, convention : retard de phase)

$$\underline{s_1} = s_0 t^2 e^{j\phi_1}$$

$$\underline{s_2} = s_0 t^2 r^2 e^{j(\phi_1+\phi)}$$

$$\underline{s_3} = s_0 t^2 r^{2\times2} e^{j(\phi_1+2\times\phi)}$$

$$\underline{s_4} = s_0 t^2 r^{2\times3} e^{j(\phi_1+3\times\phi)}$$

$$\underline{s_i} = s_0 t^2 r^{2\times(i-1)} e^{j(\phi_1+(i-1)\times\phi)} = s_0 t^2 R^{(i-1)} e^{j(\phi_1+(i-1)\times\phi)}$$

- ✓ Vibration totale :

$$\underline{s}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{s_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{s_i} = s_0 t^2 e^{j\phi_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(Re^{j\phi}\right)^{i-1} = \frac{s_0 t^2 e^{j\phi_1}}{1 - Re^{j\phi}}$$

- ✓ Intensité :

$$I(M) = \frac{1}{2}\underline{ss^*} = \frac{s_0^2 t^4}{(1 - R\cos\phi)^2 + (R\sin\phi)^2} = \frac{s_0^2(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R\cos\phi} = \frac{s_0^2(1-R)^2}{(1-R)^2 + 2R(1-\cos\phi)} = \frac{s_0^2(1-R)^2}{(1-R)^2 + 2R \times 2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

D'où :

$$I(M) = \frac{s_0^2}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{I_{max}}{1 + M\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

Notons que si l'on tient compte de la double réflexion possible au niveau de chaque lame, et en négligeant l'épaisseur de ces lames (pour chaque réflexion, on aurait deux rayons lumineux qui se superposent), il faut remplacer r_{av} par $r_{av}(1 + t^2 r_{va}) \Rightarrow$ le terme$(1 + t^2 r_{va})$ étant présent dans toutes les vibrations, il se met en facteur et est « caché » dans I_{max}.
Si l'on tient compte de l'épaisseur des lames, cela ne change rien non plus à l'expression de $I(M)$.

2. Calcul de R.

$$R = 0.9 \rightarrow M = 360 \gg 1$$
$$R = 0.99 \rightarrow M = 39600 \gg 1$$

3. Largeur des pics (franges circulaires brillantes).

Les franges brillantes vérifient : $\sin^2\frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \varphi = 2k\pi$

$\Rightarrow$ A mi-hauteur : $I = \frac{I_{max}}{1+M\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{I_{max}}{2} \Rightarrow \mathrm{M}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \varphi = \pm 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{M}} \approx \pm\frac{2}{\sqrt{M}}$ soit $\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{M}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$

<u>La largeur à mi-hauteur tend bien vers zéro quand R tend vers 1</u>

4. On sépare les deux modes si la distance entre deux pics principaux, correspondant aux deux longueurs d'ondes, est supérieure à la demi-largeur d'un pic (critère de Rayleigh).

- ✓ Odg :

$$\lambda = \lambda_m = 632.8\text{ nm et }\Delta\nu = 150\ MHz \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu = 2\times 10^{-4} nm \ll \lambda_m$$

- ✓ Longueurs d'ondes :

$$\lambda_1 = \lambda_m - \frac{\Delta\lambda}{2}$$
$$\lambda_2 = \lambda_m + \frac{\Delta\lambda}{2}$$

- Rayon d'un anneau brillant sur l'écran (pour une longueur d'onde λ donnée) :

$$\phi = 2k\pi = \frac{4\pi e}{\lambda}\cos i_k = \frac{4\pi e}{\lambda}\left(1-\frac{r_k^2}{2f'^2}\right) \Rightarrow r_k^2 = 2f'^2\left(1-\frac{\lambda k}{2e}\right)$$

- Distance entre deux pics d'ordre k correspondant aux deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 :

$$r_{1k}^2 = 2f'^2\left(1-\frac{\lambda_1 k}{2e}\right)$$

$$r_{2k}^2 = 2f'^2\left(1-\frac{\lambda_2 k}{2e}\right)$$

$$r_{2k}^2 - r_{1k}^2 = (r_{2k}-r_{1k})(r_{2k}+r_{1k}) = 2r_{mk}(r_{2k}-r_{1k}) = \frac{f'^2 k}{e}\Delta\lambda$$

$$Avec:\ r_{mk} = \frac{r_{2k}+r_{1k}}{2} = f'\sqrt{1-\frac{\lambda_m k}{2e}}$$

D'où :

$$r_{2k}-r_{1k} = \frac{f'k}{2e\sqrt{1-\frac{\lambda_m k}{2e}}}\Delta\lambda$$

- Distance entre un maximum principal et la demi-largeur à mi-hauteur (pour λ_m), pour simplifier on de place au centre :

$$r_m = 0 \Rightarrow k = \frac{2e}{\lambda_m}\ (ordre\ au\ centre)$$

$$Largeur\ à\ mi-hauteur:\ \phi = \frac{4\pi e}{\lambda_m}\left(1-\frac{r_{m0}^2}{2f'^2}\right) = \frac{4\pi e}{\lambda_m} - \frac{2}{\sqrt{M}} \Rightarrow r_{m0} = f'\sqrt{\frac{\lambda_m}{\pi e\sqrt{M}}}$$

- En utilisant le critère de Rayleigh, Il y a résolution du doublet si :

$$r_{2k}-r_{1k} > r_{m0}$$

$$\frac{f'k}{2e\sqrt{1-\frac{\lambda_m k}{2e}}}\Delta\lambda > f'\sqrt{\frac{\lambda_m}{\pi e\sqrt{M}}}$$

$$\frac{f'^2k^2}{4e^2\left(1-\frac{\lambda_m k}{2e}\right)}(\Delta\lambda)^2 > f'^2\frac{\lambda_m}{\pi e\sqrt{M}}$$

$$\frac{k^2}{4e\left(1-\frac{\lambda_m k}{2e}\right)}(\Delta\lambda)^2 > \frac{\lambda_m}{\pi\sqrt{M}}$$

$$\pi\sqrt{M}\frac{k^2}{4\lambda_m}(\Delta\lambda)^2 > \left(e-\frac{\lambda_m k}{2}\right)$$

Sachant que le $m^{ième}$ anneau brillant d'ordre k vérifie :

$$k = k_0 - m = \frac{2e}{\lambda_m} - \varepsilon - m$$

On obtient :

$$\pi\sqrt{M}\frac{\left(\frac{2e}{\lambda_m}-\varepsilon-m\right)^2}{4\lambda_m}(\Delta\lambda)^2 > \left(\frac{\lambda_m(\varepsilon+m)}{2}\right)$$

$$e > e_{min} = \frac{\lambda_m}{2}\left((\varepsilon + m) + \sqrt{\frac{2(m+\varepsilon)}{\pi\sqrt{M}}\frac{\lambda_m^2}{(\Delta\lambda)^2}}\right)$$

Pour l'application numérique, on prendra $\varepsilon = 0$

R	M	e_{min} pour $m = 1$	e_{min} pour $m = 2$	e_{min} pour $m = 3$
90%	360	18.3 cm	25.9 cm	31.8 cm
99%	39600	5.66 cm	8,01 cm	9.81 cm

Question supplémentaire :

On souhaite utiliser l'interféromètre comme FILTRE INTERFERENTIEL :

Une source de lumière blanche est placée au foyer objet d'une lentille convergente de même axe optique que la lentille de projection.

Montrer qu'en choisissant une distance $e = 290$ nm entre les lames, une seule raie spectrale du spectre visible est transmise par la cavité.

Pour $R = 90\%$ et $R = 99\%$, calculer la largeur spectrale de la raie sélectionnée et la longueur de cohérence temporelle correspondante.

La source étant placée au foyer objet de la lentille, l'éclairement sur l'écran sera nul en tout point de l'écran sauf en F'.

$\Rightarrow$ En F', seules les longueurs d'onde vérifiant $\lambda = \frac{2e}{m}$ où m est un entier auront un éclairement significatif.

$\Rightarrow$ Le choix $e = 290$ nm est interressant car la cavité ne sélectionne alors qu'une raie spectrale dans le visible :

$\lambda_o = 2e = 580$ nm (couleur orangée) correspondant à $m = 1$ et $\varphi = 2\pi$.

Pour déterminer la largeur de la raie sélectionnée, on utilise l'expression de $\Delta\varphi$:

$\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$ et donc : $\Delta\lambda = \frac{\lambda_o \Delta\varphi}{\varphi} = \frac{2\lambda_o}{\pi\sqrt{M}} = \frac{\lambda_o}{2\pi}\frac{1-R}{\sqrt{R}}$

Longueur de cohérence : $L_c = c.\tau_c \approx \frac{c}{\Delta\nu}$ avec $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda}$ d'où : $L_c = \frac{\lambda_o^2}{\Delta\lambda}$

D'où le tableau suivant :

R	$\frac{1-R}{\sqrt{R}}$	$\Delta\lambda$	L_c	F
90%	0,11	9,7 nm	35 µm	28.5
99%	0,01	0,93 nm	0,36 mm	314

Notons que la finesse d'un interféromètre est définie par :

$$F = \frac{\lambda_0}{\delta\lambda}$$

Où $\delta\lambda$ est la largeur d'un pic ($2\Delta\lambda$) . Elle vaut donc ici :

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

(Elle est égale à 2 pour un interféromètre de Michelson)