MECANIQUE DU SOLIDE

CINETIQUE DU SOLIDE

Masse d'un solide (ou système de points)	$M=\sum_i m_i$ et $M=\iiint_{(S)}\mu(P)d\tau_p$
Barycentre d'un solide (ou système de points)	$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{M}\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}$ et $\sum_i m_i\overrightarrow{GM_i}=\vec{0}$ $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{M}\iiint_{(S)}\mu(P)\overrightarrow{OP}\cdot d\tau_p$ et $\iiint_{(S)}\mu(P)\overrightarrow{GP}d\tau_p=\vec{0}$
Référentiel barycentrique. A quelle condition est-il galiléen ?	Référentiel dans lequel G est fixe qui est en translation dans le référentiel d'étude. Galiléen si le système est isolé.
Résultante cinétique d'un solide (ou système de points)	$\vec{P}(S)_R=\sum_i m_i\vec{V}(M_i)_R$ et $\vec{P}(S)_R=\iiint_{(S)}\mu(P)\vec{V}(P)_R d\tau_p$ $\vec{P}(S)_R=M\vec{V}(G)_R$ Csq : $\vec{P}^*=\vec{0}$
Moment cinétique d'un solide (ou système de points)	$\vec{L}_A(S)_R=\sum_i \overrightarrow{AM_i}\wedge m_i\vec{V}(M_i)_R$ $\vec{L}_A(S)_R=\iiint_{(S)}\overrightarrow{AP}\wedge\mu(P)\vec{V}(P)\cdot d\tau_p$ Relation de transport : $\vec{L}_B(S)_R=\vec{L}_A(S)_R+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{P}(S)_R$ Csq : $\vec{L}_B^*=\vec{L}_A^*=\vec{L}^*$
Théorème de Koenig pour le moment cinétique (HP)	$\vec{L}_A(S)_R=\vec{L}^*+\overrightarrow{AG}\wedge\vec{P}(S)_R$ Csq : $\vec{L}_G(S)_R=\vec{L}^*$
Energie cinétique	$E_c(S)_R=\sum_i\frac{1}{2}m_iV^2(M_i)_R$ $E_c(S)_R=\iiint_V\frac{1}{2}\mu(P)V^2(P)d\tau_p$
Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique (HP)	$E_c(S)_R=E_c^*+\frac{1}{2}MV^2(G)_R$

CINEMATIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE (Σ)

Solide indéformable	Σ est un solide indéformable, si la distance entre deux points A et B liés au solide reste constante au cours du temps
Vecteur rotation instantané	Soit $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ une base liée à (Σ) Le vecteur rotation instantané de (Σ) par rapport au référentiel R est le vecteur $\vec{\Omega}_{\Sigma/R}$ unique tel que : $\left.\frac{d\vec{e}_i}{dt}\right)_R=\vec{\Omega}_{\Sigma/R}\wedge\vec{e}_i\quad\forall\vec{e}_i$
Dérivée vectorielle	Soit $\vec{Q}(t)$ un vecteur quelconque, alors les dérivées de $\vec{Q}(t)$ dans le référentiel R et par rapport à Σ sont liées : $\left.\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R=\left.\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_\Sigma+\vec{\Omega}_{\Sigma/R}\wedge\vec{Q}(t)$ Csq : pour deux points A et B liés à Σ, on a : $\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_R=\vec{\Omega}_{\Sigma/R}\wedge\overrightarrow{AB}(t)$
Formule de Varignon	$\vec{V}_B=\vec{V}_A+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{\Omega}_{\Sigma/R}$ Attention ! $A,B\in(\Sigma)$
Composition de vecteurs rotation	$\vec{\Omega}_{\Sigma/R_1}=\vec{\Omega}_{\Sigma/R_2}+\vec{\Omega}_{R_2/R_1}$ Csq : $\vec{\Omega}_{\Sigma/R}=\vec{\Omega}^*$

Définition d'un axe instantané de rotation (AIR) dans le référentiel d'étude. Condition d'existence de l'AIR.	*Définition de l'AIR:* **Droite passant par I point fixe dans R et portée par le vecteur $\vec{\Omega}_{\Sigma/R}$** *Condition d'existence de l'AIR* : Il existe un point $I \in (\Sigma)$ de vitesse nulle. NB : Si $\nexists$ AIR dans R, on peut travailler dans R^* où l'axe $(G,\vec{\Omega}^*)$ est un AIR
Moment d'inertie par rapport à un axe Δ quelconque	$J_\Delta = \iiint_V \mu(P) r_p^2 d\tau_p$ où r_p est la distance du point $P \in \Sigma$ à l'axe Δ.
Moment cinétique scalaire par rapport à un axe Δ quelconque (tel que $\vec{u}_\Delta = \frac{\vec{\Omega}_{\Sigma/R}}{\Omega_{\Sigma/R}}$)	$L_\Delta = \vec{L}_O(S)_R \cdot \vec{u}_\Delta = J_\Delta \Omega_{\Sigma/R}$ Où : $O \in \Delta$ et $\vec{u}_\Delta = \frac{\vec{\Omega}_{\Sigma/R}}{\Omega_{\Sigma/R}}$ **Attention : Si Δ n'est pas fixe ou si le solide est déformable J_Δ dépend du temps.**
Moment cinétique scalaire d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ)	$L_\Delta = J_\Delta \Omega_{\Sigma/R}$ Avec $J_\Delta = cste$
Moment cinétique scalaire d'un solide en rotation autour d'une direction fixe ($\exists AIR$ *noté* Δ_I)	$L_{\Delta_I} = J_{\Delta_I} \Omega_{\Sigma/R}$ Avec $J_{\Delta_I} = cste$
Moment cinétique scalaire d'un solide en rotation autour d'une direction fixe ($\nexists AIR$)	On travaille dans R^* où l'axe $(G,\vec{\Omega}^*)$ est un AIR : $L^* = L_{\Delta_G} = J_{\Delta_G} \Omega_{\Sigma/R}$ Avec $J_{\Delta_G} = cste$ NB : On peut ensuite revenir au référentiel R en utilisant le théorème de Koenig.
Théorème de Huygens	$J_\Delta = J_{\Delta G} + md^2$ (d est la distance entre les deux droites parallèles)
Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ)	$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$
Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'une direction fixe ($\exists AIR$ *noté* Δ_I)	$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta_I} \Omega^2$
Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'une direction fixe sans que l'on puisse définir un AIR.	On peut travailler dans R^* où l'axe $(G,\vec{\Omega}^*)$ est un AIR : $E_c^* = \frac{1}{2} J_{\Delta_G} \Omega^2$ NB : On peut ensuite revenir au référentiel R en utilisant le théorème de Koenig.

ACTIONS MECANIQUES

Action mécanique	$\{\vec{F}, \vec{M}_A\}$ où $\vec{F}$ est la résultante de l'action mécanique et où $\vec{M}_A$ est le moment de l'action calculé en A. Exemples : 1. Forces appliquées en un point (P) du solide $\vec{F}, \vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}$ Ex : tension d'un fil, force de rappel d'un ressort, force de contact entre deux solides dans le cas d'un contact ponctuel. 2. Forces de surface. $\vec{F} = \iint_S \overrightarrow{dF_S} = \iint_S \vec{f}_S(P) dS_P$ $\vec{M}_A = \iint_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}_S(P) dS_P$ Ex : Forces de pression, forces de viscosité, forces de contact entre deux solides dans le cas d'un contact non ponctuel.

	3. Forces de volume. $$\vec{F} = \iiint_V \overrightarrow{dF_V} = \iiint_V \vec{f_V}(P)d\tau_P$$ $$\vec{M}_A = \iiint_V \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f_V}(P)d\tau_P$$ Ex : Le poids, La force de Lorentz, les forces d'inertie
Glisseur	Un glisseur est une action mécanique équivalente à une force unique $\vec{F}$ appliquée en un point $P_1 \Rightarrow \{\vec{F}, \vec{M}_{P_1} = \vec{0}\}$ On appelle droite d'action d'un glisseur, la droite passant par le point d'application du glisseur (P_1) et portée par la résultante $\vec{F}$. Exemples : 1. Le poids est un glisseur ($\vec{P} = M\vec{g}$) appliqué en G. 2. La force d'inertie d'entraînement, dans le cas où Σ est en translation pure dans R est un glisseur ($\vec{F}_{ie} = -M\vec{a}_e$) appliqué en G. 3. La poussée d'Archimède est un glisseur ($\vec{\Pi} = -M^*\vec{g}$) appliqué au centre de poussé. 4. L'action de contact entre deux solides, dans le cas d'un contact ponctuel est un glisseur appliqué au point de contact.
Couple	Un couple est une action mécanique dont la résultante est nulle et donc dont le moment ne dépend pas du point d'application : $\{\vec{F} = \vec{0}, \vec{\Gamma}\}$ Exemples : 1. Système de deux forces opposées. 2. Couple de torsion : $\vec{\Gamma} = -C(\theta - \theta_o)\vec{u}_\Delta$ 3. Moment de forces de Laplace agissant sur un circuit fermé plongé dans $\vec{B}$ uniforme.
Actions intérieures agissant sur un solide	Les actions intérieures agissant sur un solide ont une résultante $\vec{F}$ et un moment $\vec{M}_A$ toujours nuls.
Moment d'une action mécanique par rapport à un axe Δ	$$M_\Delta = \vec{M}_A.\vec{u}_\Delta$$ Où $\Delta = (A, \vec{u}_\Delta)$
Notion de bras de levier pour un glisseur	Le moment d'un glisseur $\vec{F}$ par rapport à $\Delta = (A, \vec{u}_\Delta)$ vaut : $$M_\Delta = \pm d\lVert\vec{F}\rVert$$ Où : d est la distance de A à la droite d'action du glisseur. Le signe moins est déterminer à partir de la figure : On choisit le signe plus si la force tend à faire tourner le solide dans le sens positif autour de Δ

THEOREMES DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE

TRC et TMC (en A quelconque) dans R_g	1. TRC : $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$ 2. TMC : $\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{V}_A \wedge \vec{P} = \sum \vec{M}_{A_{ext}}$ si A est mobile $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_{A_{ext}}$ si A est fixe dans R
TMC en G dans R_g	$$\vec{\Delta}_G = \left.\frac{d\vec{L}_G}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\vec{L}^*}{dt}\right)_R = \sum \vec{M}_{G\,ext}$$
TMC en G dans R^*	$$\vec{\Delta}^*_G = \left.\frac{d\vec{L}^*}{dt}\right)_{R^*} = \sum \vec{M}_{G\,ext}$$

	Noter que les forces d'inertie n'interviennent pas même si R^* n'est pas galiléen.
TMC scalaire pour un solide en rotation autour d'un axe fixe	$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum M_{\Delta ext}$
TMC scalaire pour un solide en rotation autour d'une direction fixe (cas où l'AIR est défini (Δ_I))	$\frac{dL_{\Delta_I}}{dt} = \sum M_{\Delta_I ext}$
TMC scalaire pour un solide en rotation autour d'une direction fixe (cas l'AIR n'est pas défini)	$\frac{dL^*}{dt} = \sum M_{\Delta_G ext}$

Puissance d'une action mecanique

Puissance d'une action mécanique quelconque	$P = \vec{F}\cdot\vec{V}_A + \vec{\Omega}\cdot\vec{M}_A$ Formule indépendante de A
Puissance d'un glisseur	Pour un torseur $\vec{F}$ appliqué en P_1 : $P = \vec{F}\cdot\vec{V}_{P_1}$
Puissance d'un couple	Pour un couple $\vec{\Gamma}$: $P = \vec{\Omega}\cdot\vec{\Gamma}$
Puissance d'une action mécanique dans le cas d'un solide en translation pure dans le référentiel d'étude	$P = \vec{F}\cdot\vec{V}_{\Sigma/R}$
Puissance d'une action mécanique dans le cas d'un solide en rotation pure dans le référentiel d'étude	$P = \Omega M_\Delta$
Puissance des actions intérieures	Pour un solide indéformable : $P = 0$ Pour un solide déformable : $P \neq 0$, notons que cette puissance est indépendante du référentiel d'étude.
Puissance d'une action conservative	$P = -\frac{dE_p}{dt}$
Energie potentielle du poids	$E_p = Mgz_G$ Où z_G est l'altitude du centre d'inertie

Energetique du solide indeformable

Energie mécanique d'un solide	$E_m = E_p + E_c$
TPC	$\frac{dE_c}{dt} = P^{int} + P^{ext}$ Noter que le TPC s'écrit dans R^* sans faire intervenir les forces d'inertie.
TEC	$\Delta E_c = W^{int} + W^{ext}$ Noter que le TEC s'écrit dans R^* sans faire intervenir les forces d'inertie.
TPM	$\frac{dE_m}{dt} = P_{NC}^{int} + P_{NC}^{est}$ Noter que le TPM s'écrit dans R^* sans faire intervenir les forces d'inertie.
TEM	$\Delta E_m = W_{NC}^{int} + W_{NC}^{ext}$ Noter que le TEM s'écrit dans R^* sans faire intervenir les forces d'inertie.

Systeme conservatif a un degres de liberte (q)

Intégrale 1ère du mouvement	$E_m(q,\dot{q}) = E_p(q) + E_c(q,\dot{q}) = cste$
Equation différentielle du mouvement	$\frac{dE_m}{dt} = 0$
Ensembles des positions accessibles	$E_m \geq E_p$
Etats liés/Etats de diffusion	1. Si q est borné, on a un état lié. 2. Si q n'est pas borné, on a un état de diffusion.

Positions d'équilibre	Position d'équilibre en q_o : $\left.\frac{dE_p}{dq}\right)_{q_o} = 0$ Equilibre stable en q_o : $\left.\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_{q_o} > 0$ Equilibre instable en q_o : $\left.\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_{q_o} < 0$

CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES

Contact ponctuel	Le contact entre les deux solides Σ_1 et Σ_2 est ponctuel quand il se réduit à un point I. On distingue alors 3 points : 1. I : point géométrique correspondant au point de contact. 2. $I_1 = I \in \Sigma_1$: Point coïncidant avec I et appartenant à Σ_1. 3. $I_2 = I \in \Sigma_2$: Point coïncidant avec I et appartenant à Σ_2.
Vitesse de glissement	$\vec{V}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{V}(I \in \Sigma_1)_R - \vec{V}(I \in \Sigma_2)_R$
Action de contact entre deux solides dans le cas d'un contact ponctuel	L'action de contact de Σ_2 sur Σ_1 dans le cas d'un contact ponctuel est un glisseur $\vec{R}_{1\to2}$ appliqué en I qui peut être décomposé en : 1. une résultante perpendiculaire au plan osculateur en I (composante normale notée $\vec{N}_{1\to2}$) 2. Une résultante appartenant au plan osculateur en I (composante tangentielle notée $\vec{T}_{1\to2}$)
Lois de Coulomb	Cas où il y a glissement entre Σ_1 et Σ_2 : 1. $\vec{T}_{2\to1}$ est colinéaire et opposée à la vitesse de glissement. 2. $\Vert\vec{T}_{2\to1}\Vert = f_d\Vert\vec{N}_{2\to1}\Vert$ où f_d est le coefficient de frottement dynamique. Cas où il n'y a pas glissement entre Σ_1 et Σ_2 : 1. $\vec{V}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{0}$ 2. $\Vert\vec{T}_{2\to1}\Vert \leq f_s\Vert\vec{N}_{2\to1}\Vert$ où f_s est le coefficient de frottement statique. **Limite de glissement** : On se place dans le cas du non-glissement, à la limite où le glissement va commencer, on a alors : $\Vert\vec{T}_{2\to1}\Vert = f_s\Vert\vec{N}_{2\to1}\Vert$ où f_s est le coefficient de frottement statique.
Puissance des actions de contact dans le cas d'un contact ponctuel	$P_{1\to2} + P_{2\to1} = \vec{T}_{2\to1} \cdot \vec{V}_g(\Sigma_1/\Sigma_2)$ Cas important où Σ_2 est fixe (support) : $P_{2\to1} = \vec{T}_{2\to1} \cdot \vec{V}_g(\Sigma_1/\Sigma_2)$
Puissance des actions de contact dans le cas d'un contact ponctuel et d'un roulement sans glissement	Σ_1 roule sans glisser sur Σ_2 : $P_{2\to1} = \vec{T}_{2\to1} \cdot \vec{V}_g = 0$
Liaison pivot Liaison pivot parfaite	Liaison pivot : liaison d'un solide Σ avec un support telle qu'il existe un axe fixe (Δ) par rapport à Σ qui est aussi fixe par rapport au support. Liaison pivot parfaite : Le moment de l'action de contact du support sur le solide, par rapport à l'axe Δ est nul. La puissance de cette action de contact est nulle