

# 1 Ondes

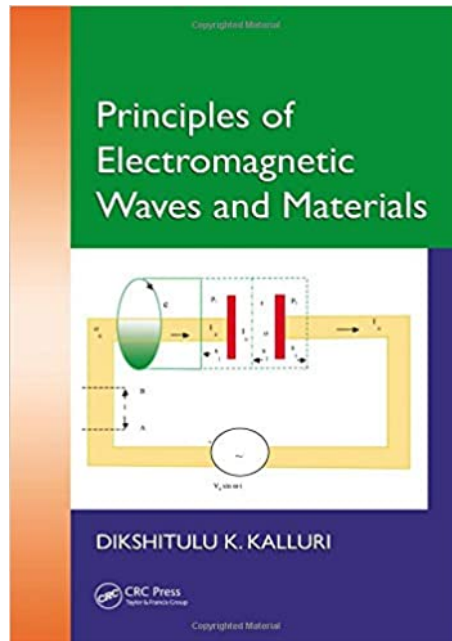


Figure 1 – La bible des OEM

On note  $\mathcal{L}$  les constantes (indépendantes du temps et de l'espace).

## 1.1 Solutions de l'équation de d'Alembert (1D)

SVF

Vérifier que :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

et

$$s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

sont solutions de l'équation de d'Alembert (1D)

✘ L'équation de d'Alembert (1D), s'écrit :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

✘ si  $s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$  alors, en notant  $u = t - x/c$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{df}{du} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \frac{d^2 f}{du^2} \\ \frac{\partial s}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{df}{du} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{du^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow s(x, t)$  vérifie bien l'équation de d'Alembert.

✘ si  $s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$  alors, en notant  $u = t + x/c$  :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{dg}{du}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{d^2 g}{du^2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{dg}{du}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 g}{du^2}$$

$\Rightarrow s(x, t)$  vérifie bien l'équation de d'Alembert.

Notons que par linéarité, les solutions de l'équation de d'Alembert sont de la forme :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

## 1.2 Solutions de l'équation de d'Alembert (sphérique)

SVF

Sachant que le laplacien d'un champ de la forme  $s(r, t)$ , en coordonnées sphériques, est :

$$\Delta s = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rs)}{\partial r^2}$$

Montrer que :

$$s(r, t) = \frac{1}{r} \left( f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \right)$$

est solution de l'équation de d'Alembert.

✘ En coordonnées sphériques, l'équation de d'Alembert vérifiée par  $s(r, t)$  s'écrit :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \Delta s = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rs)}{\partial r^2}$$

On a donc :

$$\frac{\partial^2 rs}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2(rs)}{\partial r^2}$$

$\Rightarrow$  La grandeur  $r \times s(r, t)$  admet donc comme solutions :

$$rs(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

Et donc :

$$s(r, t) = \frac{1}{r} \left( f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \right)$$

### 1.3 Onde stationnaire

SVF

Soit une onde stationnaire (1D). Montrer que :

- ✗ Les solutions sont de la forme :

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t + \psi) \cos(kx + \phi)$$

où  $\omega = kc$ .

- ✗ La distance entre deux nœuds consécutifs est  $\lambda/2$ .
- ✗ La distance entre deux ventres consécutifs est  $\lambda/2$ .
- ✗ La distance entre un nœud et le ventre voisin est  $\lambda/4$ .

#### ✗ Solutions stationnaires de l'équation de d'Alembert (1D)

- ☛  $s(x, t)$  vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

- ☛ Les ondes stationnaires étant des solutions à variables séparées, on cherche  $s(x, t)$  sous la forme :  $s(x, t) = f(x)g(t)$  :

$$\frac{d^2 g}{dt^2} f(x) = c^2 \frac{d^2 f}{dx^2} g(t)$$

Soit :

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{g(t)}{f(x)}$$

Cette égalité étant vérifiée quelque soit  $x$  et  $t$ , chaque terme est égal à une constante  $\mathcal{C}$ .

- ☛ On a donc, en ne gardant que les solutions périodiques :

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = \mathcal{C} = -\omega^2 < 0$$

Soit :

$$g(t) = G_0 \cos(\omega t + \psi)$$

- ☛ De même on a :

$$c^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = -\omega^2 f(x)$$

Soit, en posant  $\omega = kc$  :

$$f(x) = S_0 \cos(kx + \phi)$$

- ☛ En posant  $S_0 = F_0 G_0$  on retrouve l'expression demandée.

#### ✗ Position des nœuds et des ventres

- ☛ On étudie une onde stationnaire de la forme :

$$s(x, t) = S_0 \cos(\omega t + \psi) \cos(kx + \phi)$$

- La position  $x_p^N$  d'un nœud vérifie :

$$\cos(kx_p^N + \phi) = 0 \Rightarrow x_p^N = \frac{1}{k} \left( \frac{\pi}{2} + p\pi - \phi \right) = \frac{\lambda}{4} + p\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda\phi}{2\pi}$$

Où  $p$  est un entier relatif.

La distance entre deux nœuds successifs est donc :

$$\Delta x^N = x_{p+1}^N - x_p^N = \frac{\lambda}{2}$$

- La position  $x_p^V$  d'un ventre vérifie :

$$\cos(kx_p^V + \phi) = \pm 1 \Rightarrow x_p^V = \frac{1}{k} (p\pi - \phi) = p\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda\phi}{2\pi}$$

Où  $p$  est un entier relatif.

La distance entre deux ventres successifs est donc :

$$\Delta x^V = x_{p+1}^V - x_p^V = \frac{\lambda}{2}$$

- La distance entre un nœud et un ventre voisin est donc :

$$\Delta x = x_p^N - x_p^V = \frac{\lambda}{4}$$

## 1.4 Équation de propagation dans les solides : chaîne d'oscillateurs

SVF

- ✘ Établir l'équation de propagation dans les solides en utilisant le modèle de la chaîne d'oscillateurs et en vous plaçant dans l'approximation des milieux continus.
- ✘ En considérant une OPPM(+), de pulsation  $\omega$ , se propageant le long de la chaîne de ressorts, exprimer la condition pour que l'approximation des milieux continus soit vérifiée.
- ✘ Soit deux chaînes d'oscillateurs, caractérisées par une même distance entre les atomes à l'équilibre, notée  $a$ , atomes de même masse  $m$ , mais dont les ressorts ont des raideurs différentes  $(K_1, K_2)$ . Sachant que les deux chaînes sont reliées en  $x = 0$  (discontinuité sans masse), déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en puissance en  $x = 0$ .
- ✘ Montrer que les modes propres d'un ressort massique (masse linéique  $\mu$ , longueur totale à vide  $L$ , raideur totale statique  $K$ ), fixé à une extrémité et dont l'autre extrémité est fixée à une masse  $M$ , vérifient :

$$\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{KL}{Mc\omega}$$

Où  $c^2 = \frac{KL}{\mu}$ .

Déterminer les modes propres par une méthode graphique. Proposer des cas particuliers simples.

## ✗ Équation de propagation dans les solides

### ☛ Équation de propagation (en passant par le modèle discret)

- ✓ Dans le modèle discret, le solide peut être représenté comme une chaîne d'oscillateurs discrets comme représenté figure 2.

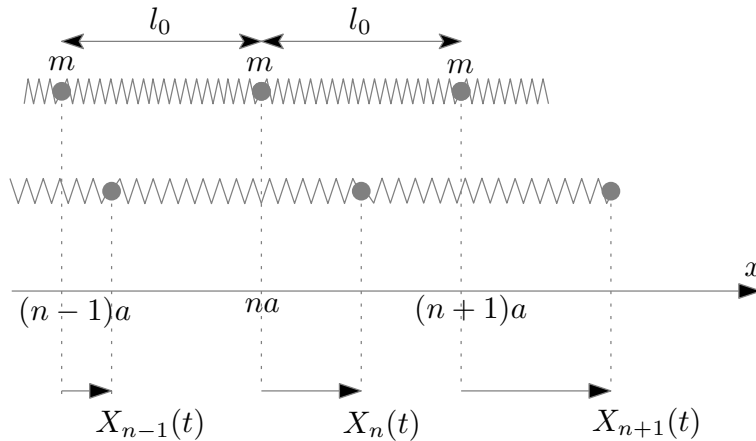


Figure 2 – Chaîne d'oscillateurs

- ✓ Le PFD appliqué à la masse  $m$ , située en  $x = na$  au repos donne :

$$m \frac{d^2 X_n}{dt^2} = -K (X_n(t) - X_{n-1}(t)) - K (X_n(t) - X_{n+1}(t))$$

Soit, en posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  :

$$\frac{d^2 X_n}{dt^2} + 2\omega_0^2 X_n(t) = \omega_0^2 (X_{n-1}(t) + X_{n+1}(t))$$

Avec :  $X_n(t) = X(na, t)$ .

- ✓ On se place ensuite dans l'approximation des milieux continus : on considère que la position des masses  $m$  à l'équilibre est une fonction continue de  $x$  : se placer dans l'approximation des milieux continus a pour conséquence directe de ne plus avoir d'entier dans le repérage des masses  $m$ .

	Discret	continu
Position au repos	$na$	$x$
Position en mouvement	$X_n(t) = X(na, t)$	$X(x, t)$
Vitesse	$\frac{dX_n}{dt}$	$\frac{\partial X}{\partial t}$
Accélération	$\frac{d^2 X_n}{dt^2}$	$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$

On obtient donc :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\omega_0^2 X(x, t) = \omega_0^2 (X(x - a, t) + X(x + a, t))$$

- ✓ Cette approximation consiste à considérer que la longueur d'onde de l'onde de compression est très grande devant  $a$  : vu de l'onde le milieu apparaît continu. Mathématiquement, cela nous permet de considérer que  $a \ll \lambda$ . En utilisant le développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{cases} X(x+a, t) = X(x, t) + \frac{\partial X}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} a^2 \\ X(x-a, t) = X(x, t) - \frac{\partial X}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} a^2 \end{cases}$$

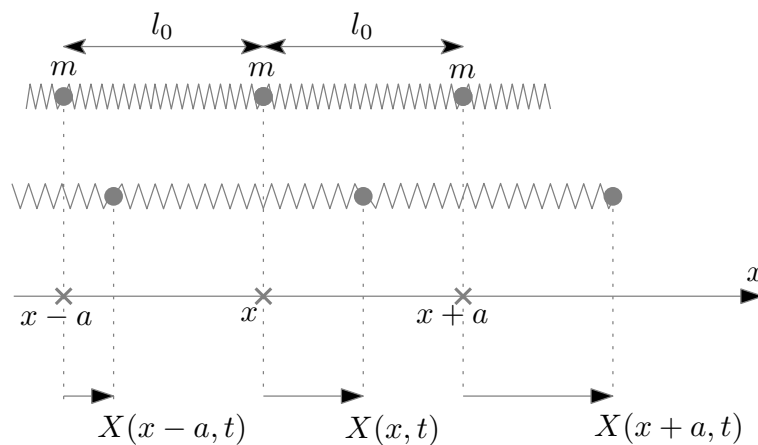
En remplaçant dans l'équation de propagation trouvée précédemment, on obtient bien l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Avec  $c = \omega_0 a$ .

➤ **Équation de propagation en partant directement de l'approximation des milieux continus**

- ✓ On se place directement dans l'approximation des milieux continus en considérant la figure 3.



**Figure 3** – Chaîne de ressorts dans l'approximation des milieux continus

- ✓ Le PDF appliqué à la masse  $m$  située en  $x$  au repos donne :

$$m \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -K (X(x, t) - X(x-a, t)) - K (X(x, t) - X(x+a, t))$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\omega_0^2 X(x, t) = \omega_0^2 (X(x-a, t) + X(x+a, t))$$

Avec :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ .

- ✓ Sachant que  $a \ll x$ , on effectue un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} X(x+a, t) = X(x, t) + \frac{\partial X}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} a^2 \\ X(x-a, t) = X(x, t) - \frac{\partial X}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} a^2 \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de propagation trouvée précédemment, on obtient bien l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Avec  $c = \omega_0 a$ .

☛ **Approximation des milieux continus**

- ✓ On exprime cette condition simplement en considérant que « l'onde ne voit pas l'aspect discontinu » du milieu et donc en posant :  $a \ll \lambda$ . Soit, sachant que pour une OPPM(+) on a  $\omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda}$  :

$$\omega \ll \frac{2\pi c}{a}$$

- ✓ On retrouve cette condition en considérant que dans le développement de Taylor, le terme d'ordre 3 est négligeable devant le terme d'ordre 2 :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} a^2 \gg \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} a^2$$

Soit, sachant que  $X(x, t) = X_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$  :

$$\frac{1}{2} k^2 a^2 \gg \frac{1}{6} k^3 a^3 \Rightarrow ka \ll 3 \Rightarrow \lambda \gg a$$

✗ **Réflexion sur une discontinuité**

☛ **Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude**

- ✓ On considère une OPPM(+) venant de  $-\infty$  se propageant dans le milieu de constante de raideur  $K_1$  :

$$\underline{X}_i(x, t) = X_0 \exp j(\omega t - k_1 x)$$

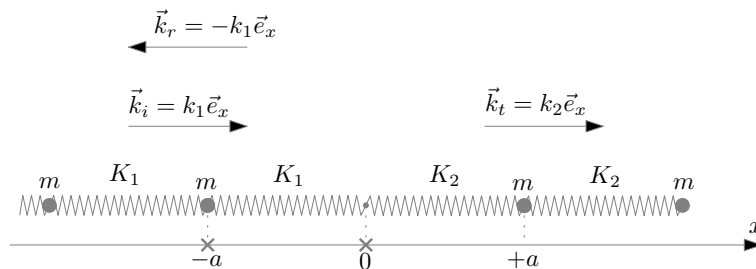
Avec :  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$  et  $c_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}} a$

- ✓ Au niveau de la discontinuité, en  $x = 0$ , l'onde se réfléchit en partie et est transmise en partie :

$$\underline{X}_r(x, t) = X_{0r} \exp j(\omega t + k_1 x)$$

$$\underline{X}_t(x, t) = X_{0t} \exp j(\omega t - k_2 x)$$

Avec :  $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$  et  $c_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m}} a$



**Figure 4** – Réflexion et transmission au niveau de la discontinuité

- ✓ Pour la suite, on note :

$$\underline{X}_1(x, t) = \underline{X}_i(x, t) + \underline{X}_r(x, t)$$

$$\underline{X}_2(x, t) = \underline{X}_t(x, t)$$

- ✓ La continuité du déplacement en  $x = 0$  se traduit par :

$$\underline{X}_1(0, t) = \underline{X}_2(0, t)$$

$$\underline{X}_i(0, t) + \underline{X}_r(0, t) = \underline{X}_t(0, t)$$

Soit :

$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

- ✓ Le PFD appliqué à la discontinuité en  $x = 0$  donne :

$$0 \times \left. \frac{d^2 \underline{X}_1}{dt^2} \right)_{(x=0,t)} = 0 \times \left. \frac{d^2 \underline{X}_2}{dt^2} \right)_{(x=0,t)} = -K_1 (\underline{X}_1(0, t) - \underline{X}_1(x - a, t)) - K_2 (\underline{X}_2(0, t) - \underline{X}_2(x + a, t))$$

Soit, en développant  $\underline{X}_1(x - a, t)$  et  $\underline{X}_2(x + a, t)$  à l'ordre 1 :

$$0 = -K_1 a \left. \frac{\partial \underline{X}_1}{\partial x} \right)_{(x=0,t)} + K_2 a \left. \frac{\partial \underline{X}_2}{\partial x} \right)_{(x=0,t)}$$

D'où :

$$K_1 a j k_1 - \underline{r} j k_1 = K_2 j k_2 \underline{t}$$

Soit :

$$K_1 k_1 (1 - \underline{r}) = K_2 k_2 \underline{t}$$

- ✓ En combinant les deux équations données par les continuités, on obtient :

$$\underline{r} = \frac{K_1 k_1 - K_2 k_2}{K_1 k_1 + K_2 k_2} = \frac{\sqrt{K_1} - \sqrt{K_2}}{\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2}}$$

$$\underline{t} = \frac{2K_1 k_1}{K_1 k_1 + K_2 k_2} = \frac{2\sqrt{K_1}}{\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2}}$$

### • Coefficients de réflexion et de transmission en puissance

- ✓ La puissance transportée par une OPPM ( $\underline{X} = X_0 \exp j(\omega t - kx)$ ) dans la chaîne de ressorts, en  $x$  à l'instant  $t$ , s'exprime comme suit :

$$P(x, t) = \vec{V}(x, t) \cdot \vec{T}_g(x, t)$$

où  $\vec{T}_g(x, t) = -K(X(x, t) - X(x - a, t)) \vec{e}_x = -Ka \frac{\partial X}{\partial x} \vec{e}_x$  et  $\vec{V}(x, t) = \frac{\partial X}{\partial t} \vec{e}_x$ .

D'où :

$$P(x, t) = -Ka \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial t}$$

- ✓ La valeur moyenne de cette puissance s'obtient très facilement en représentation complexe :

$$\langle P \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \vec{V}(x, t) \cdot \vec{T}_g^*(x, t) \right\} = -\frac{1}{2} Ka \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X^*}{\partial t} = \frac{1}{2} K a k w |X_0|^2$$

En appliquant ce résultat aux trois ondes, incidente, réfléchie et transmise, on obtient :

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} K_1 a k_1 w |X_0|^2$$

$$\langle P_r \rangle = -\frac{1}{2} K_1 a k_1 w |\underline{r}|^2 |X_0|^2$$

$$\langle P_t \rangle = \frac{1}{2} K_2 a k_2 w |\underline{t}|^2 |X_0|^2$$



- ✓ Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance s'expriment comme suit :

$$R = \left| \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| = |r|^2$$

$$T = \left| \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| = \frac{K_2 k_2}{K_1 k_1} |t|^2 = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} |t|^2$$

### ✗ Modes propres

- ☛ Dans l'approximation de milieux continus, on décompose le ressort massif en une chaîne de  $N$  ressorts non massifs, de longueur à vide  $a$ , de raideur  $K_1$ , reliés entre eux par des masses identiques  $m$ . On a alors les relations :

$$L = Na; K = \frac{K_1}{N}; \mu L = Nm$$

- ☛ On a alors le dispositif équivalent donné par la figure 5

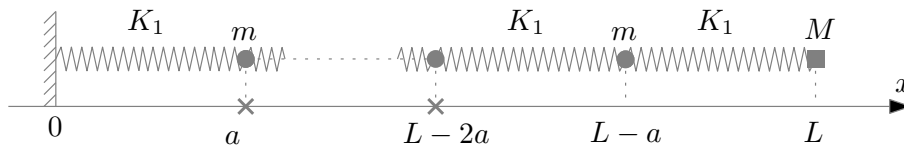


Figure 5 – Modélisation d'un ressort massif

- ☛ L'onde se propageant dans le ressort vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Avec  $c = \omega_0 a = \sqrt{\frac{K_1}{m}} a = \sqrt{\frac{KL}{\mu}}$ .

- ☛ On cherche des solutions stationnaires sous la forme :

$$X(x, t) = X_0 \cos(\omega t + \psi) \cos(kx + \phi) = (A \cos(kx) + B \sin(kx)) \cos(\omega t + \psi)$$

- ☛ Condition limite en  $x = 0$  :

$$X(0, t) = 0 \Rightarrow A = 0$$

- ☛ Condition limite en  $x = L$  : on applique le PDF à la masse  $M$

$$M \left. \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right|_{(x=L,t)} = -K_1 (X(L, t) - X(L - a, t)) = -K_1 a \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{(L,t)}$$

Soit :

$$-M\omega^2 B \sin(kL) = -K_1 a B k \cos(kL)$$

Et donc :

$$\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{KL}{M c \omega}$$

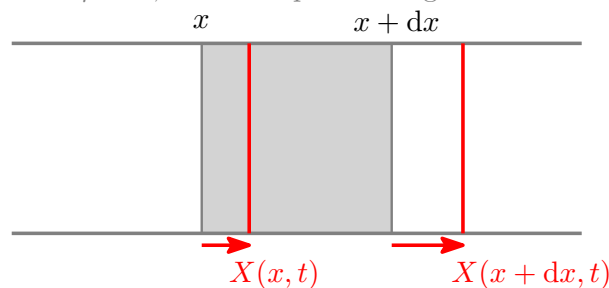
## 1.5 Équation de propagation dans les solides : approche mésoscopique

SVF

- ✘ Établir l'équation de propagation dans les solides en utilisant une approche mésoscopique (loi de Hooke)
- ✘ On considère la propagation d'ondes de compression dans deux tiges caractérisées par leurs modules de Young ( $E_1, E_2$ ) et leurs masses volumiques ( $\rho_1, \rho_2$ ), au contact en  $x = 0$  (contact sans masse). Déterminer les coefficients de réflexion et transmission en amplitude et en puissance en  $x = 0$ .

### ✘ Équation de propagation dans les solides

- ☛ On considère un tige solide de section  $S$  et de longueur  $L$ . Pour étudier la propagation des ondes de compression le long de la tige, on considère une méso-tranche de longueur  $dx$  au repos, de masse  $dm = \mu S dx$ , comme représenté figure 6.



**Figure 6** – Méso-tranche au passage de l'onde de compression

- ☛ Bilan des actions mécaniques exercées sur la méso-tranche (d'après la loi de Hooke) :

$$\checkmark \vec{F}(x + dx, t) = ES \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{(x+dx, t)} \vec{e}_x$$

$$\checkmark \vec{F}(x, t) = -ES \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{(x, t)} \vec{e}_x$$

- ☛ Le TRC appliqué à la méso-tranche donne :

$$\mu S dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES \left( \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{(x+dx, t)} - \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{(x, t)} \right)$$

D'où :

$$\mu S dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx$$

On retrouve l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Avec :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

### ✘ Réflexion sur une discontinuité

- ☛ On considère une OPPM(+) venant de  $-\infty$  se propageant dans le milieu ( $E_1, \mu_1$ ) :

$$\underline{X}_i(x, t) = X_0 \exp j(\omega t - k_1 x)$$

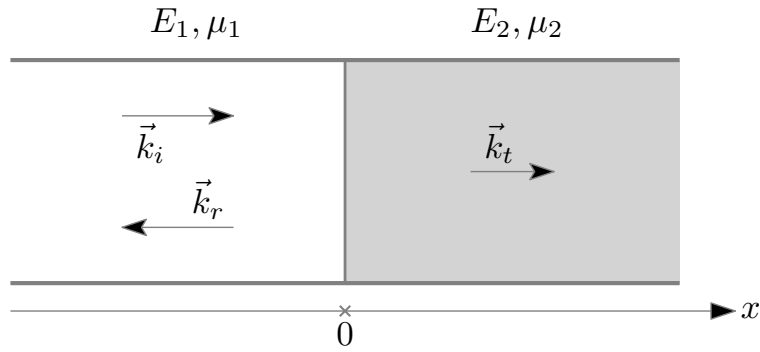
$$\text{Avec : } k_1 = \frac{\omega}{c_1} \text{ et } c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\mu_1}}$$

- Au niveau de la discontinuité, en  $x = 0$ , l'onde se réfléchit en partie et est transmise en partie :

$$\underline{X}_r(x, t) = X_{0r} \exp j(\omega t + k_1 x)$$

$$\underline{X}_t(x, t) = X_{0t} \exp j(\omega t - k_2 x)$$

$$\text{Avec : } k_2 = \frac{\omega}{c_2} \text{ et } c_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\mu_2}}$$



**Figure 7** – Réflexion et transmission au niveau de la discontinuité

- Pour la suite, on note :

$$\underline{X}_1(x, t) = \underline{X}_i(x, t) + \underline{X}_r(x, t)$$

$$\underline{X}_2(x, t) = \underline{X}_t(x, t)$$

- La continuité du déplacement en  $x = 0$  se traduit par :

$$\underline{X}_1(0, t) = \underline{X}_2(0, t)$$

$$\underline{X}_i(0, t) + \underline{X}_r(0, t) = \underline{X}_t(0, t)$$

Soit :

$$1 + r = t$$

- La continuité de la force en  $x = 0$ , donne :

$$E_1 S \left. \frac{\partial \underline{X}_1}{\partial x} \right|_{(0^-, t)} = E_2 S \left. \frac{\partial \underline{X}_2}{\partial x} \right|_{(0^+, t)}$$

D'où :

$$E_1 k_1 (1 - r) = E_2 k_2 t$$

- En combinant les deux équations données par les continuités, on obtient :

$$r = \frac{E_1 k_1 - E_2 k_2}{E_1 k_1 + E_2 k_2} = \frac{\sqrt{E_1 \mu_1} - \sqrt{E_2 \mu_2}}{\sqrt{E_1 \mu_1} + \sqrt{E_2 \mu_2}}$$

$$t = \frac{2E_1 k_1}{E_1 k_1 + E_2 k_2} = \frac{2\sqrt{E_1 \mu_1}}{\sqrt{E_1 \mu_1} + \sqrt{E_2 \mu_2}}$$

### ✗ Coefficients de réflexion et de transmission en puissance

- La puissance transportée par une OPPM ( $\underline{X} = X_0 \exp j(\omega t - kx)$ ) dans la chaîne de ressorts, en  $x$  à l'instant  $t$ , s'exprime comme suit :

$$P(x, t) = \vec{V}(x, t) \cdot \vec{F}_g(x, t)$$

$$\text{où } \vec{F}_g(x, t) = -ES \frac{\partial X}{\partial x} \vec{e}_x \text{ et } \vec{V}(x, t) = \frac{\partial X}{\partial t} \vec{e}_x.$$

D'où :

$$P(x, t) = -ES \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial t}$$

- La valeur moyenne de cette puissance s'obtient très facilement en représentation complexe :

$$\langle P \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \vec{V}(x, t) \cdot \vec{F}_g^*(x, t) \right\} = -\frac{1}{2} ES \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X^*}{\partial t} = \frac{1}{2} ES k w |X_0|^2$$

En appliquant ce résultat aux trois ondes, incidente, réfléchie et transmise, on obtient :

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} E_1 S k_1 w |X_0|^2$$

$$\langle P_r \rangle = -\frac{1}{2} E_1 S k_1 w |r|^2 |X_0|^2$$

$$\langle P_t \rangle = \frac{1}{2} E_2 S k_2 w |t|^2 |X_0|^2$$

- Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance s'expriment comme suit :

$$R = \left| \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| = |r|^2$$

$$T = \left| \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| = \frac{E_2 k_2}{E_1 k_1} |t|^2 = \sqrt{\frac{E_2 \mu_2}{E_1 \mu_1}} |t|^2$$

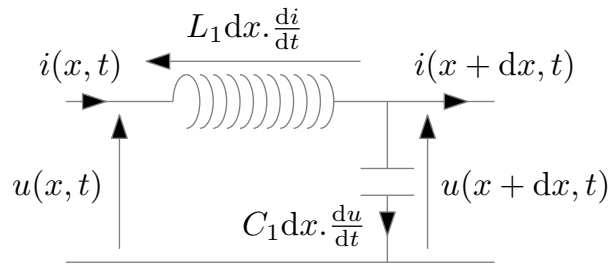
## 1.6 Équation de propagation des ondes de courant et de tension

SVF

- ✘ Établir l'équation de propagation dans les lignes en utilisant le modèle des constantes réparties (ligne sans amortissement).
- ✘ Déterminer l'impédance caractéristique de la ligne.
- ✘ L'extrémité de la ligne est branchée sur une impédance de charge  $\underline{Z}_u$ , en  $x = L$ . Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en tension et en courant puis les coefficient de réflexion et de transmission en puissance.
- ✘ On tient compte de la résistance interne linéique de l'inductance linéique et de la résistance de fuite linéique de la capacité linéique. Déterminer la nouvelle équation de propagation et donner la relation de dispersion. Commenter.

### ✘ Équation de propagation

- On considère un ligne de grande longueur (l'ARQS n'est pas vérifiée le long de la ligne). On décompose la ligne en méso-tranche de longueur  $dx$  dans laquelle l'ARQS est vérifiée. Les effets inductifs et capacitifs sont modélisés par une inductance  $L_1$  par unité de longueur et un capacité  $C_1$  par unité de longueur comme indiqué figure 8.



**Figure 8** – Modèle des constantes réparties pour une ligne idéale

- La loi des nœuds et la loi des mailles donnent :

$$\begin{cases} u(x, t) = L_1 dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + u(x + dx, t) \\ i(x, t) = C_1 dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + i(x + dx, t) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

- Équation de propagation vérifiée par  $u(x, t)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

On retrouve bien l'équation de d'Alembert en posant  $c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ .

- Équation de propagation vérifiée par  $i(x, t)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

On retrouve bien l'équation de d'Alembert en posant  $c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ .

### ✗ Impédance caractéristique d'une ligne

- L'impédance caractéristique est le rapport entre  $u(x, t)$  et  $i(x, t)$  dans le cas d'une OPP(+)

$$Z_c = \left. \frac{u(x, t)}{i(x, t)} \right|_{OPP(+)}$$

☛ Dans le cas d'une OPP(+), on peut écrire :

$$u(x, t) = f(t - x/c) = f(v)$$

Avec  $v = t - x/c$

Alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{L_1 c} \frac{df}{du}$$

D'où :

$$i(x, t) = -\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} f(t - x/c)$$

Et donc :

$$\underline{Z}_c = \frac{u(x, t)}{\underline{i}(x, t)}_{OPP(+)} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

### ✗ Réflexion en bout de ligne

☛ On considère une ligne, d'impédance caractéristique  $\underline{Z}_c$  au bout de laquelle on a branché un impédance d'utilisation  $\underline{Z}_u$  (en  $x = 0$ ). On considère une onde incidente, de pulsation  $\omega$ , se propageant dans le sens des  $x$  croissants et arrivant en  $x = 0$ .

☛ **Onde incidente :**

$$\underline{i}_i(z, t) = I_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\underline{u}_i(z, t) = \underline{Z}_c I_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

Avec  $\omega = kc$  et  $c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ .

☛ **Onde réfléchie :**

$$\underline{i}_r(z, t) = \underline{r}_i I_0 e^{j(\omega t + kz)}$$

$$\underline{u}_r(z, t) = \underline{r}_v \underline{Z}_c I_0 e^{j(\omega t + kz)} = -\underline{Z}_c \underline{r}_i I_0 e^{j(\omega t + kz)} \Rightarrow \underline{r}_v = -\underline{r}_i$$

☛ **Condition limite en  $x = 0$**

$$\underline{u}_i(0, t) + \underline{u}_r(0, t) = \underline{Z}_u (\underline{i}_i(0, t) + \underline{i}_r(0, t))$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_c I_0 - \underline{Z}_c \underline{r}_i I_0 = \underline{Z}_u (I_0 + \underline{r}_i I_0)$$

$$\Rightarrow \underline{r}_i = \frac{\underline{Z}_c - \underline{Z}_u}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_u}$$

$$\Rightarrow \underline{r}_v = \frac{\underline{Z}_u - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_u}$$

☛ **Étude des différents cas :**

- ✓ Cas où  $\underline{Z}_u = 0$  (court-circuit en bout de ligne) :  $\underline{r}_v = -1$  et  $\underline{r}_i = 1$
- ✓ Cas où  $\underline{Z}_u = \infty$  (circuit ouvert en bout de ligne) :  $\underline{r}_v = 1$  et  $\underline{r}_i = -1$
- ✓ Cas où  $\underline{Z}_u = \underline{Z}_c$  (adaptation en bout de ligne) :  $\underline{r}_v = \underline{r}_i = 0$

### ✗ Absorption et dispersion

- On considère un ligne de grande longueur (l'ARQS n'est pas vérifiée le long de la ligne). On décompose la ligne en méso-tranche de longueur  $dx$  dans laquelle l'ARQS est vérifiée. Les effets inductifs et capacitifs sont modélisés par une inductance  $L_1$  par unité de longueur et un capacité  $C_1$  par unité de longueur et les effets résistifs sont modélisés par une résistance  $r$  et conductance  $g$  une par unité de longueur, comme indiqué figure 9.

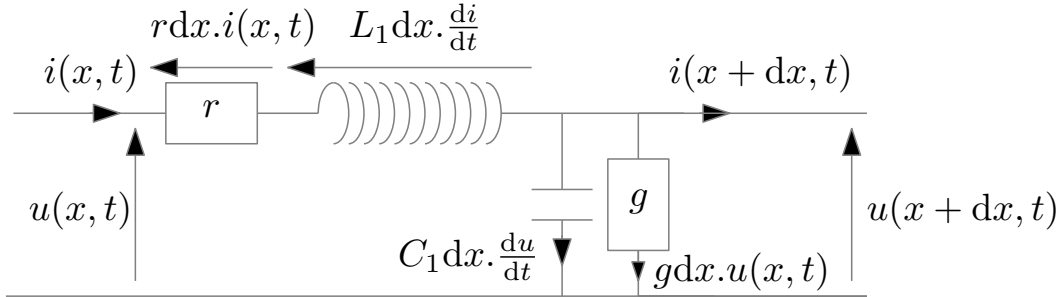


Figure 9 – Modèle des constantes réparties pour une ligne réelle

- La loi des nœuds et la loi des mailles donnent :

$$\begin{cases} u(x, t) = r dx \cdot i(x, t) + L_1 dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + u(x + dx, t) \\ i(x, t) = g dx \cdot u(x, t) + C_1 dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + i(x + dx, t) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = r \cdot i(x, t) + L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = g \cdot u(x, t) + C_1 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

- Équation de propagation vérifiée par  $u(x, t)$  :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r \frac{\partial i}{\partial x} + L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = g \frac{\partial u}{\partial t} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r \left( g \cdot u(x, t) + C_1 \frac{\partial u}{\partial t} \right) + L_1 \left( g \frac{\partial u}{\partial t} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r g u(x, t) + (r C_1 + g L_1) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Avec :  $c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ .

- Équation de propagation vérifiée par  $i(x, t)$  :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = r \frac{\partial i}{\partial t} + L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = g \frac{\partial u}{\partial x} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = g \left( r \cdot i(x, t) + L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \right) + C_1 \left( r \frac{\partial i}{\partial t} + L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = rgi(x, t) + (rC_1 + gL_1) \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

$$\text{Avec : } c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

- ☛ Les équations de propagation sont identiques et sont différentes de l'équation de d'Alembert. On peut mettre en évidence les phénomènes de dispersion et d'absorption en cherchant la relation de dispersion.

- ✓ En posant  $\underline{u}(x, t) = U_0 \exp j(\omega t - \underline{k}x)$ , on obtient :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega(rC_1 + gL_1) - rg$$

$$\text{Avec : } \underline{k} = k' + jk''.$$

- ✓ Si  $k' \neq 0$  alors il y a propagation et si  $k'' \neq 0$  alors il y a absorption.
- ✓ Si la vitesse de phase,  $V_\phi = \frac{\omega}{k'}$ , dépend de  $\omega$ , alors la ligne est dispersive.
- ✓ Si la vitesse de groupe  $V_g = \frac{d\omega}{dk'}$ , dépend de  $\omega$ , alors l'enveloppe d'un paquet d'onde se déforme au cours de la propagation.

## 1.7 Cordes vibrantes

SVF

- ✗ Établir l'équation de propagation des cordes vibrantes, avec les hypothèses du cours (à rappeler), en déduire la relation de dispersion.
- ✗ Montrer que l'énergie mécanique linéique d'une corde vibrante est de la forme :

$$e_m = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

- ✗ Établir l'équation de conservation de l'énergie mécanique dans une corde :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} + \text{div}(\vec{R}) = 0$$

Où  $\vec{R}$  est une grandeur que l'on nommera et dont on donnera l'expression.

- ✗ On considère une corde constituée de deux matériaux différents (densités linéiques de masse  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ). Sachant que la discontinuité est en  $x = 0$ , déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en puissance en  $x = 0$ .
- ✗ On considère une corde sur laquelle est fixée une masselotte  $m$ , considérée comme ponctuelle. Sachant que la masse  $m$  est en  $x = 0$ , déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en puissance en  $x = 0$ .
- ✗ On considère une corde, de longueur  $L$ , de masse  $M$  uniformément répartie. suspendue verticalement en un point  $O$  fixe dans le référentiel d'étude .
  - ☛ Étudier l'évolution de la tension le long de la corde.
  - ☛ On excite sinusoidalement la corde en  $O$ . Déterminer l'équation de propagation, en déduire la relation de dispersion pour les vibrations proches de  $O$ . Conclure.
- ✗ Étudier la prise en compte des effets du couplage avec l'air sur la relation de dispersion (force linéique à rajouter :  $-\beta \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_y$ ).



## ✗ Équation de propagation des cordes vibrantes

- ☛ On considère un corde de longueur  $L$ , de masse linéique  $\mu$  :
  - ✓ on néglige la raideur de la corde (Si l'on tient compte de la raideur de la corde, alors la tension n'est plus tangente à la corde. La courbure de la corde est alors liée à un couple à prendre en compte en appliquant le TMC (dans  $R^*$ ) au méso élément de longueur de la corde) ;
  - ✓ on néglige les effets de la pesanteur (voir plus loin) ;
  - ✓ on néglige le couplage avec l'air (voir plus loin) et donc les frottements fluides ;
  - ✓ La tension  $T$  le long de la corde est généralement due à une masse  $M$  accrochée en bout de corde, comme représenté figure 10.

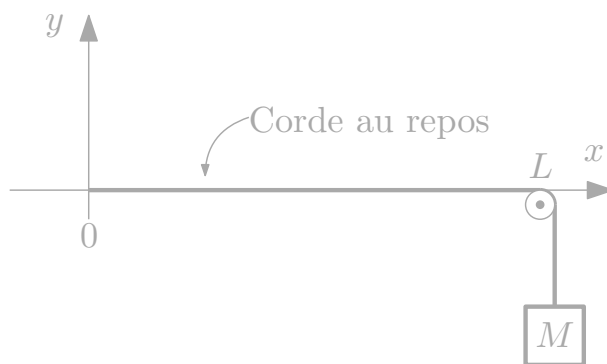


Figure 10 – Tension le long de la corde

- ✓ on se place dans l'approximation des petits mouvements transversaux de la corde : au cours du mouvement de la corde, l'angle  $\alpha(x, t)$  que fait la tangente à la corde, en  $x$  à l'instant  $t$  par rapport à la direction à l'équilibre de la corde est petit devant 1, ce qui suppose, sachant que  $\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ , que  $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$ , comme indiqué figure 11.

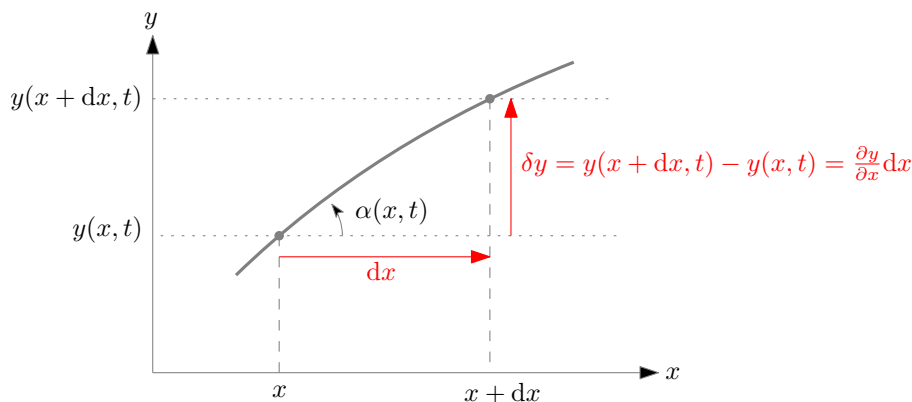
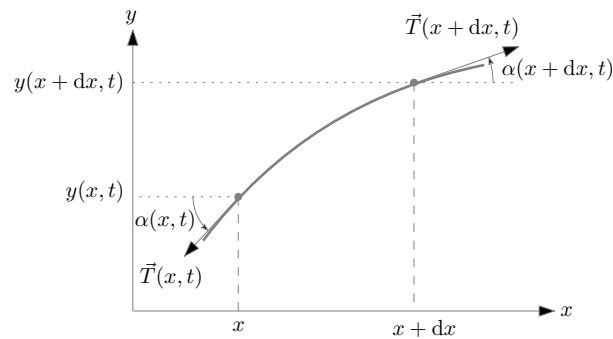


Figure 11 – Approximation des petits déplacements

- ☛ On considère un élément mésoscopique de corde en mouvement, compris entre  $x$  et  $x + dx$  à l'équilibre, comme représenté figure 12. La longueur de cet élément de corde en mouvement vaut :

$$ds^2 = (dx)^2 + (\delta y)^2 = (dx)^2 \left( 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) \approx (dx)^2$$



**Figure 12** – Corde au repos

- ☛ Cet élément de longueur est soumis à deux forces de tension comme représenté figure 12. Le PFD appliqué à cet élément de longueur donne :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

D'où :

$$\begin{cases} 0 = T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + dx, t) \sin \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \sin \alpha(x, t) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} T(x, t) \cos \alpha(x, t) = C = T \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial (T \sin \alpha)}{\partial x} dx = T(x, t) \cos \alpha(x, t) \frac{\partial (\tan \alpha)}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \end{cases}$$

D'où l'équation de d'Alembert vérifiée par  $y$  :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Avec pour la célérité :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

### ✗ Énergie mécanique linéique de la corde

- ☛ L'énergie cinétique  $dE_c$  de l'élément de longueur vaut :

$$dE_c = \frac{1}{2} dm \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

D'où l'expression de la densité d'énergie cinétique :

$$e_c = \frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

- ☛ On détermine l'énergie potentielle linéique de la corde grâce à la définition opérationnelle de l'énergie potentielle : cette énergie potentielle est égale au travail d'un opérateur pour faire passer la longueur d'un élément méso de  $dx$  (au repos) à :

$$ds = dx \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} \approx dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)$$

L'allongement de l'élément de longueur est donc :

$$dl = ds - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

Le travail que doit fournir l'opérateur pour faire passer l'élément de longueur  $dx$  de la corde, de la longueur  $dx$  à la longueur  $ds$ , vaut donc :

$$\delta W_{op} = dE_p = T dl = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

On en déduit la densité d'énergie potentielle :

$$e_p = \frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Et donc l'énergie mécanique linéique de la corde :

$$e = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

### ✗ Équation de conservation de l'énergie

☛ On dérive l'énergie mécanique linéique par rapport au temps :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right) + \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)$$

Soit, en utilisant l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = T \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right) + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right] = T \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right]$$

Soit, sachant qu'à 1D,  $\text{div} = \frac{\partial}{\partial x}$  :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} \left[ -T \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] = 0$$

Il s'agit bien d'une équation de conservation, dans lequel le vecteur densité de courant d'énergie linéique vaut :

$$\vec{R} = -T \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \vec{e}_x$$

Ce vecteur (dont la valeur est homogène à une puissance), nous donne à la puissance transportée par l'onde :

$$\vec{R} = \left[ -\vec{T} \cdot \vec{V} \right] \vec{e}_x$$

### ✗ Réflexion sur une discontinuité

☛ Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

✓ On considère une OPPM(+) venant de  $-\infty$  se propageant dans la corde de masse linéique  $\mu_1$  :

$$y_i(x, t) = Y_0 \exp j(\omega t - k_1 x)$$

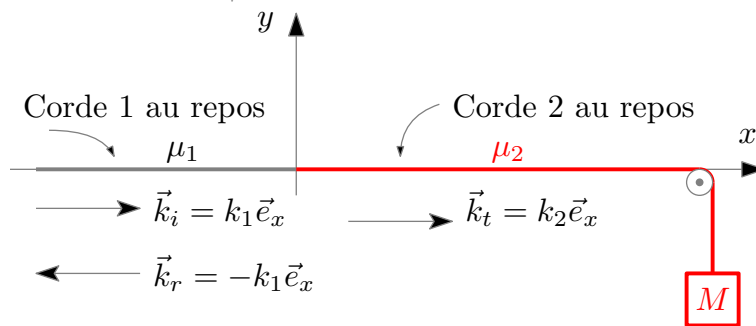
$$\text{Avec : } k_1 = \frac{\omega}{c_1} \text{ et } c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$$

- ✓ Au niveau de la discontinuité, en  $x = 0$ , l'onde se réfléchit en partie et est transmise en partie :

$$\underline{y}_r(x, t) = Y_0 \underline{r} \exp j(\omega t + k_1 x)$$

$$\underline{y}_t(x, t) = Y_0 \underline{t} \exp j(\omega t - k_2 x)$$

$$\text{Avec : } k_2 = \frac{\omega}{c_2} \text{ et } c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$



**Figure 13** – Discontinuité sur une corde

- ✓ Pour la suite, on note :

$$\underline{y}_1(x, t) = \underline{y}_i(x, t) + \underline{y}_r(x, t)$$

$$\underline{y}_2(x, t) = \underline{y}_t(x, t)$$

- ✓ La continuité du déplacement en  $x = 0$  se traduit par :

$$\underline{y}_1(0, t) = \underline{y}_2(0, t)$$

$$\underline{y}_i(0, t) + \underline{y}_r(0, t) = \underline{y}_t(0, t)$$

Soit :

$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

- ✓ La continuité de la tension en  $x = 0$  (absence de masse) donne :

$$\underline{T}_y(0^-, t) = \underline{T}_y(0^+, t) \Rightarrow \left. \frac{\partial \underline{y}_1}{\partial x} \right|_{(x=0^-)} = \left. \frac{\partial \underline{y}_2}{\partial x} \right|_{(x=0^+)}$$

D'où :

$$jk_1 - rjk_1 = jk_2 \underline{t}$$

Soit :

$$k_1(1 - r) = k_2 \underline{t}$$

- ✓ En combinant les deux équations données par les continuités, on obtient :

$$\underline{r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

$$\underline{t} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

☛ Coefficients de réflexion et de transmission en puissance

- ✓ La puissance transportée par une OPPM ( $\underline{y} = Y_0 \exp j(\omega t - kx)$ ) le long d'une corde, en  $x$  à l'instant  $t$ , s'exprime comme suit :

$$P(x, t) = \vec{V}(x, t) \cdot \vec{T}_g(x, t)$$

$$\text{où } \vec{T}_g(x, t) = -T \frac{\partial y}{\partial x} \vec{e}_x \text{ et } \vec{V}(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_x.$$

D'où :

$$P(x, t) = -T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$$

- ✓ La valeur moyenne de cette puissance s'obtient très facilement en représentation complexe :

$$\langle P \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \vec{V}(x, t) \cdot \vec{T}_g^*(x, t) \right\} = -\frac{1}{2} T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y^*}{\partial t} = \frac{1}{2} T k \omega |Y_0|^2$$

En appliquant ce résultat aux trois ondes, incidente, réfléchie et transmise, on obtient :

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} T k_1 \omega |Y_0|^2$$

$$\langle P_r \rangle = -\frac{1}{2} T k_1 \omega |r|^2 |Y_0|^2$$

$$\langle P_t \rangle = \frac{1}{2} T k_2 \omega |t|^2 |Y_0|^2$$

- ✓ La conservation de l'énergie s'écrit (en valeur moyenne) :

$$\langle P_i \rangle = \langle P_r \rangle + \langle P_t \rangle$$

- ✓ Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance s'expriment comme suit :

$$R = \left| \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| = |r|^2$$

$$T = \left| \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| = \frac{k_2}{k_1} |t|^2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} |t|^2$$

- ✓ On doit donc avoir :

$$|r|^2 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} |t|^2 = 1$$

ce que l'on vérifie aisément.

### ✗ Réflexion sur une impureté

#### ☛ Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

- ✓ On considère une OPPM(+) venant de  $-\infty$  se propageant dans la corde de masse linéique  $\mu$  :

$$\underline{y}_i(x, t) = Y_0 \exp j(\omega t - kx)$$

$$\text{Avec : } k = \frac{\omega}{c} \text{ et } c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

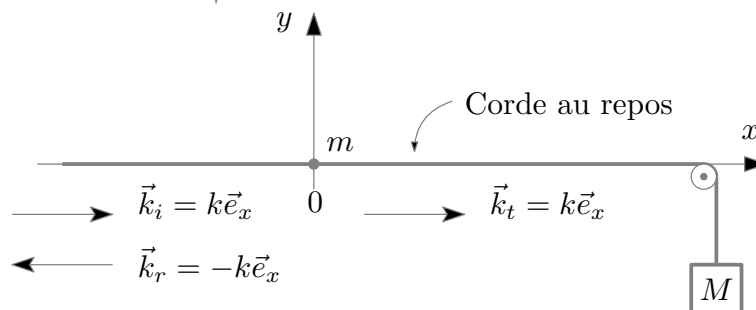


Figure 14 – impureté sur une corde

- ✓ Au niveau de la masse  $m$ , en  $x = 0$ , l'onde se réfléchit en partie et est transmise en partie :

$$\underline{y}_r(x, t) = Y_0 \underline{r} \exp j(\omega t + kx)$$

$$\underline{y}_t(x, t) = Y_0 \underline{t} \exp j(\omega t - kx)$$

$$\text{Avec : } k = \frac{\omega}{c} \text{ et } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- ✓ Pour la suite, on note :

$$\underline{y}_1(x, t) = \underline{y}_i(x, t) + \underline{y}_r(x, t)$$

$$\underline{y}_2(x, t) = \underline{y}_t(x, t)$$

- ✓ La continuité du déplacement en  $x = 0$  se traduit par :

$$\underline{y}_1(0, t) = \underline{y}_2(0, t)$$

$$\underline{y}_i(0, t) + \underline{y}_r(0, t) = \underline{y}_t(0, t)$$

Soit :

$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

- ✓ Le PFD appliqué à la masse  $m$  donne :

$$m \left. \frac{\partial^2 \underline{y}_1}{\partial t^2} \right|_{(x=0^-, t)} = m \left. \frac{\partial^2 \underline{y}_2}{\partial t^2} \right|_{(x=0^+, t)} = -\underline{T}_y(0^-, t) + \underline{T}_y(0^+, t)$$

$$\Rightarrow m \left. \frac{\partial^2 \underline{y}_2}{\partial t^2} \right|_{(x=0^+, t)} = -T \left. \frac{\partial \underline{y}_1}{\partial x} \right|_{(x=0^-)} + T \left. \frac{\partial \underline{y}_2}{\partial x} \right|_{(x=0^+)}$$

D'où :

$$m(j\omega)^2 \underline{t} = -T[-jk + rjk] - jkT \underline{t} = \frac{(j\omega T)}{c} [1 - \underline{r} - \underline{t}] = j\omega \sqrt{\mu T} [1 - \underline{r} - \underline{t}]$$

Soit :

$$\underline{t}(\sqrt{\mu T} + m(j\omega)) = \sqrt{\mu T} (1 - \underline{r})$$

- ✓ En combinant les deux équations données par les continuités, on obtient :

$$\underline{r} = \frac{j m \omega}{j m \omega + 2 \sqrt{\mu T}} = -\frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\underline{t} = \frac{2 \sqrt{\mu T}}{j m \omega + 2 \sqrt{\mu T}} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

où :  $\omega_c = \frac{2 \sqrt{\mu T}}{m}$  (homogène à l'inverse d'un temps)

- ☛ On peut vérifier la cohérence de ces résultats :

- ✓ Pour une « masse faible », on a  $\omega \ll \omega_c$  et donc  $r \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow 1$ .

- ✓ Pour une « masse élevée », on a  $\omega \gg \omega_c$  et donc  $r \rightarrow 1$  et  $t \rightarrow 0$ .

☛ Coefficients de réflexion et de transmission en puissance

- ✓ La puissance transportée par une OPPM ( $\underline{y} = Y_0 \exp j(\omega t - kx)$ ) le long d'une corde, en  $x$  à l'instant  $t$ , s'exprime comme suit :

$$P(x, t) = \vec{V}(x, t) \cdot \vec{T}_g(x, t)$$

$$\text{où } \vec{T}_g(x, t) = -T \frac{\partial y}{\partial x} \vec{e}_x \text{ et } \vec{V}(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_x.$$

D'où :

$$P(x, t) = -T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$$

- ✓ La valeur moyenne de cette puissance s'obtient très facilement en représentation complexe :

$$\langle P \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \vec{V}(x, t) \cdot \vec{T}_g^*(x, t) \right\} = -\frac{1}{2} T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y^*}{\partial t} = \frac{1}{2} T k w |Y_0|^2$$

En appliquant ce résultat aux trois ondes, incidente, réfléchie et transmise, on obtient :

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} T k_1 w |Y_0|^2$$

$$\langle P_r \rangle = -\frac{1}{2} T k_1 w |r|^2 |Y_0|^2$$

$$\langle P_t \rangle = \frac{1}{2} T k_2 w |t|^2 |Y_0|^2$$

- ✓ Le TEC appliqué à la masse  $m$  donne :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$$

Où  $\mathcal{P}$  est la puissance reçue par la masse  $m$  venant de l'onde.

- ✓ En valeur moyenne, on obtient :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \left\langle \frac{dE_c}{dt} \right\rangle = 0$$

Car la valeur moyenne temporelle d'une dérivée (par rapport au temps) est nulle.

- ✓ La conservation de l'énergie s'écrit (en valeur moyenne) :

$$\langle P_i \rangle = \langle P_r \rangle + \langle P_t \rangle + \langle P \rangle$$

Soit ici :

$$\langle P_i \rangle = \langle P_r \rangle + \langle P_t \rangle$$

- ✓ Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance s'expriment comme suit :

$$R = \left| \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| = |r|^2$$

$$T = \left| \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| = |t|^2$$

On doit donc avoir :

$$|r|^2 + |t|^2 = 1$$

ce que l'on vérifie aisément.

✗ Corde verticale

➤ Évolution de la tension

- ✓ La corde étudiée est représentée figure 15 : on s'intéresse à l'équilibre d'une longueur mésoscopique de cette corde.

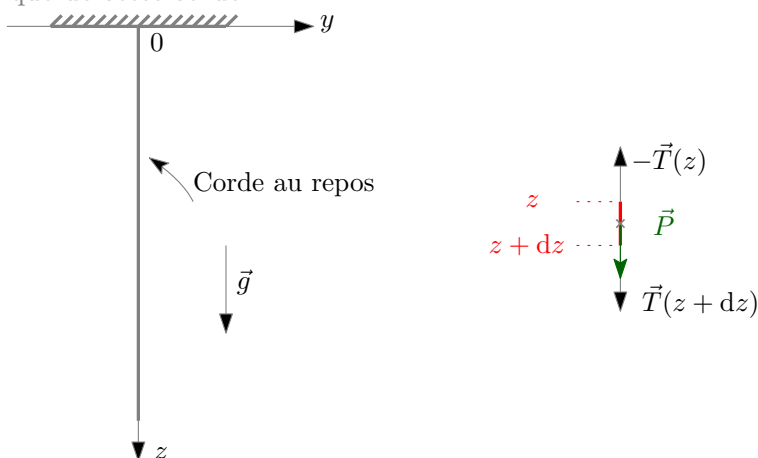


Figure 15 – Élément de longueur le long de la corde verticale

À l'équilibre, on a :

$$\vec{T}(z + dz) - \vec{T}(z) + \mu \vec{g} dz = [T(z + dz) - T(z) + \mu dz g] \vec{e}_z = \vec{0} \Rightarrow \frac{dT}{dz} = -\mu g$$

On intègre, en sachant que pour  $z = L$ , la tension s'annule :

$$T(z) = \mu g(L - z)$$

➤ Équation de propagation

- ✓ On considère maintenant un élément mésoscopique de la corde en mouvement (de longueur  $ds \approx dz$ ), comme représenté figure 16

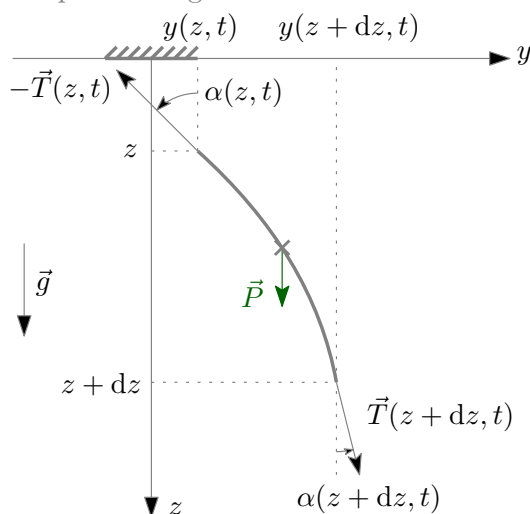


Figure 16 – Corde verticale en mouvement

- ✓ Le PFD appliqué à l'élément mésoscopique de la corde donne :

$$\mu dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(z + dz, t) - \vec{T}(z, t) + \mu dz \vec{g}$$

D'où :



$$\begin{cases} 0 = T(z + dz, t) \cos \alpha(z + dz, t) - T(z, t) \cos \alpha(z, t) + \mu g dz \\ \mu dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(z + dz, t) \sin \alpha(z + dz, t) - T(z, t) \sin \alpha(z, t) \end{cases}$$

✓ D'où, à l'ordre 1 en  $\alpha$ , sachant que la tension s'annule pour  $z = L$  :

$$\begin{cases} T(z, t) \cos \alpha(z, t) \approx T(z, t) = \mu g(L - z) \\ \mu dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial (T \sin \alpha)}{\partial z} dz = \frac{\partial (\mu g(L - z) \alpha(z, t))}{\partial z} dz = -\mu g \frac{\partial y}{\partial z} dz + \mu g(L - z) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz \end{cases}$$

D'où l'équation vérifié par  $y$  :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g \frac{\partial y}{\partial z} + g(L - z) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$

### ☛ Relation de dispersion

✓ On se place à proximité du point d'attache en posant  $z \ll L$ , l'équation de propagation devient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g \frac{\partial y}{\partial z} + gL \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$

✓ Afin de déterminer la relation de dispersion, on considère une pseudo - OPPM(+) de la forme :  $\underline{y}(z, t) = Y_0 \exp j(\omega t - \underline{k}z)$ , on obtient alors :

$$-\omega^2 = -g j \underline{k} - gL \underline{k}^2$$

Soit :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{gL} - j \frac{\underline{k}}{L}$$

✓ Ainsi,  $\underline{k}$  est à priori complexe : il y a donc propagation avec absorption et dispersion.

### ✕ Effets du couplage avec l'air

☛ On reprend le modèle de la corde vibrante mais on tient compte cette fois des frottements de l'air : on ajoute donc au bilan des actions mécaniques agissant sur un élément de longueur de la corde, la force de frottement visqueux :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) - \beta dx \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_y$$

D'où :

$$\begin{cases} 0 = T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + dx, t) \sin \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \sin \alpha(x, t) - \beta dx \frac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} T(x, t) \cos \alpha(x, t) = C = T \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial (T \sin \alpha)}{\partial x} dx - \beta dx \frac{\partial y}{\partial t} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx - \beta dx \frac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

D'où l'équation vérifié par  $y$  :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Avec pour la célérité : où  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  et  $\tau = \frac{\mu}{\beta}$ .

☛ Relation de dispersion

- ✓ Afin de déterminer la relation de dispersion, on considère une pseudo - OPPM(+) de la forme :  $\underline{y}(z, t) = Y_0 \exp j(\omega t - \underline{k}z)$ , on obtient alors :

$$-\omega^2 = -c^2 \underline{k}^2 - \frac{j\omega}{\tau}$$

Soit :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{j\omega}{c^2\tau}$$

- ✓ Ainsi,  $\underline{k}$  est à priori complexe : il y a donc propagation avec absorption et dispersion.

## 1.8 Ondes acoustiques

SVF

- ✗ Définir l'approximation acoustique
- ✗ Établir l'équation de propagation (1D) d'une onde acoustique dans le cadre de l'approximation acoustique (approche eulérienne puis lagrangienne).
- ✗ Établir l'équation de propagation (3D) d'une onde acoustique dans le cadre de l'approximation acoustique.
- ✗ Montrer que la célérité des ondes acoustiques dans un GP est de la forme :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

- ✗ Étudier l'influence de la viscosité sur la propagation d'ondes acoustiques (1D)
- ✗ Montrer que l'énergie mécanique volumique de l'onde acoustique est de la forme :

$$e_m = \frac{1}{2}\mu_0 V_1^2 + \frac{1}{2}\chi_0 P_1^2$$

- ✗ Établir l'expression du vecteur de Poynting acoustique :

$$\vec{\Pi}_a = P_1 \vec{V}_1$$

- ✗ Établir l'équation de conservation de l'énergie mécanique de l'onde :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi}_a = 0$$

- ✗ Établir l'expression de l'impédance acoustique d'un fluide :

$$Z_c = \mu_0 c$$

- ✗ Déterminer les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, en pression et en vitesse, puis les coefficients de réflexion et de transmission en énergie à l'interface entre deux milieux d'impédances  $Z_1$  et  $Z_2$ .

## SVF

- ✗ Une OPPM(+), se propageant dans un milieu d'impédance  $Z$  occupant tout l'espace, et venant de  $-\infty$ , arrive sur une membrane en  $x = 0$ , de surface  $S$  et de masse surfacique  $\sigma$ . Déterminer les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, en pression et en vitesse, puis les coefficients de réflexion et de transmission en énergie en  $x = 0$ .
- ✗ Déterminer la longueur que doit avoir la caisse de résonance d'un diapason.
- ✗ Déterminer la pulsation propre d'un résonateur d'Helmholtz :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0 A}{\mu V L}}$$

On précisera la signification de toutes les grandeurs intervenant dans cette formule.

- ✗ Établir l'équation de propagation des ondes acoustiques dans un pavillon acoustique, caractérisé par une section droite  $S(x)$ . Étudier le cas particulier  $S(x) = S_0 \exp(\alpha x)$ .

## ✗ Approximation acoustique

- ☛ On considère un fluide au repos (pression  $P_0$ , masse volumique  $\mu_0$  et vitesse moyenne  $\langle \vec{V} \rangle = \vec{0}$ ).
- ☛ Lors du passage d'une onde acoustique, ces grandeurs varient :
  - ✓  $P(M, t) = P_0 + P_1(M, t)$  avec  $|P_1(M, t)| \ll P_0$
  - ✓  $\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t)$  avec  $|\mu_1(M, t)| \ll \mu_0$
  - ✓  $\langle \vec{V} \rangle = \vec{V}_1(M, t) \neq \vec{0}$  avec  $|\vec{V}_1(M, t)| \ll c$  où  $c$  est la célérité des ondes acoustiques dans le milieu.
  - ✓ Le coefficient de compressibilité (isentropique ou isotherme) est considéré comme constant au passage de l'onde :

$$\chi_0 = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{(T \text{ ou } S)} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{(T \text{ ou } S)} = \mathcal{C}$$

D'où :

$$\chi_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \quad (1)$$

## ✗ Équation de propagation 1D

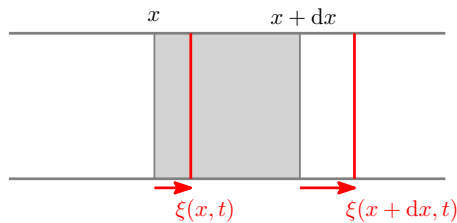
## ☛ Approche Lagrangienne

- ✓ On considère une onde acoustique se propageant dans un tube de courant de section constante  $S$ . Le système est unidirectionnel : les différentes grandeurs étudiées ne dépendent que de  $x$  et de  $t$  :
  - ☞  $P(M, t) = P(x, t) = P_0 + P_1(x, t)$  avec  $|P_1(x, t)| \ll P_0$
  - ☞  $\mu(M, t) = \mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$  avec  $|\mu_1(x, t)| \ll \mu_0$
  - ☞  $\langle \vec{V} \rangle = \vec{V}_1(M, t) = \vec{V}_1(x, t)$  avec  $|\vec{V}_1(x, t)| \ll c$
- ✓ Soit une méso-tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$  à l'équilibre. Au passage de l'onde acoustique les limites de la méso-tranches deviennent  $x + \xi(x, t)$  et  $x + dx + \xi(x + dx, t)$  comme représenté figure 17.

- ✓ La dilatation de la méso-tranche est par définition :

$$\delta = \frac{\delta(d\tau)}{d\tau}$$

Où  $d\tau = Sdx$  est le volume de la méso-tranche en l'absence d'onde acoustique et où  $\delta(d\tau)$  est la variation de ce volume au passage de l'onde acoustique.



**Figure 17** – Approche mésoscopique (Lagrangienne) 1D

D'après la figure 17, on a :

$$\delta = \frac{(\xi(x+dx, t) - \xi(x, t)) S}{Sdx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

La dilatation est reliée au coefficient de compression :

$$\chi_0 = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{d\tau} \frac{\delta(d\tau)}{P_1} = -\frac{\delta}{P_1}$$

D'où :

$$P_1 = -\frac{1}{\chi_0} \delta = -\frac{1}{\chi_0} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- ✓ Le BAM agissant sur la méso-tranche donne :

$$\text{☞ } P(x, t) S \vec{e}_x : \text{force pressantes en } x \text{ à l'instant } t$$

$$\text{☞ } -P(x+dx, t) S \vec{e}_x : \text{force pressantes en } x+dx \text{ à l'instant } t$$

- ✓ Le TRC appliqué à la méso-tranche, de masse  $dm = \mu Sdx \approx \mu_0 Sdx$  donne :

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (P(x, t) - P(x+dx, t)) S$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

D'où, sachant que  $P_1 = -\frac{1}{\chi_0} \frac{\partial \xi}{\partial x}$  :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

On retrouve bien l'équation de d'Alembert avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_0}}$$

### ☛ Approche Eulérienne

- ✓ Á 1D les différentes grandeurs étudiées ne dépendent que de  $x$  et de  $t$  :

$$\text{☞ } P(M, t) = P(x, t) = P_0 + P_1(x, t) \text{ avec } |P_1(x, t)| \ll P_0$$

✎  $\mu(M, t) = \mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$  avec  $|\mu_1(x, t)| \ll \mu_0$

✎  $\langle \vec{V} \rangle = \vec{V}_1(M, t) = V_1(x, t) \vec{e}_x$  avec  $\vec{V}_1(x, t) \ll c$

✓ Dans l'approche eulérienne à 1D, on utilise les équations locales :

✎ Équation d'Euler (écoulement parfait sans autre force que les forces de pression) :

$$\mu \frac{\partial V_1}{\partial t} + \mu V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} = - \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

✎ Équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial (\mu \vec{V})}{\partial x} = 0$$

✎ Coefficient  $\chi_0$  :

$$\chi_0 = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{(T \text{ ou } S)}$$

✓ Dans le cadre de l'approximation acoustique, on linéarise ces équations (on ne garde que les termes d'ordre 1) :

✎ Équation d'Euler :

$$\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

✎ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0$$

✎ Coefficient  $\chi_0$  (voir équation 1) :

$$\chi_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \Rightarrow \mu_1 = \chi_0 \mu_0 P_1$$

✓ D'où :

✎ Équation d'Euler :

$$\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial x} \quad (2)$$

✎ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_0} \frac{\partial V_1}{\partial x} \quad (3)$$

Notons que les équations 2 et 3 sont les équations de couplages (1D)

✓ En combinant simplement ces deux équations de couplage, on obtient les équations différentielles vérifiées par  $P_1$  et  $V_1$  :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$$

On reconnaît bien l'équation de d'Alembert.

### ✗ Équation de propagation 3D

☛ Dans l'approche eulérienne, on utilise les équations locales :

✓ Équation d'Euler (écoulement parfait sans autre force que les forces de pression) :

$$\mu \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mu (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = -\text{grad}P$$

✓ Équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{V}) = 0$$

✓ Coefficient  $\chi_0$  :

$$\chi_0 = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{(T \text{ ou } S)}$$

☛ Dans le cadre de l'approximation acoustique, on linéarise ces équations (on ne garde que les termes d'ordre 1) :

✓ Équation d'Euler (écoulement parfait sans autre force que les forces de pression) :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\text{grad}P_1$$

✓ Équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{V}_1) = 0$$

✓ Coefficient  $\chi_0$  (d'après l'équation 1) :

$$\chi_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \Rightarrow \mu_1 = \chi_0 \mu_0 P_1$$

☛ D'où :

✓ Équation d'Euler :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\text{grad}P_1 \quad (4)$$

✓ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \text{div}(\vec{V}_1) \quad (5)$$

Les équations 4 et 5 sont les équations de couplage (3D)

☛ Équation différentielle vérifiée par  $V_1$

✓ Équation d'Euler dérivée par rapport au temps :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} = -\text{grad} \frac{\partial P_1}{\partial t}$$

✓ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \text{div}(\vec{V}_1)$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \text{grad}(\text{div} \vec{V}_1) = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \Delta \vec{V}_1$$

(Car  $\text{rot} \vec{V}_1 = \vec{0}$ , d'après l'équation d'Euler)

- ☛ Équation différentielle vérifiée par  $P_1$

- ✓ Divergence de l'équation d'Euler :

$$\mu_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} \right) = -\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} P_1 = -\Delta P_1$$

- ✓ Équation de conservation de la masse :

$$\operatorname{div} (\vec{V}_1) = \chi_0 \frac{\partial P_1}{\partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \Delta P_1$$

### ✗ Célérité des ondes acoustiques

- ☛ La célérité des ondes acoustiques dans les fluides s'exprime comme suit :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_0}}$$

- ☛ Dans le cas d'un gaz assimilé à un gaz parfait, on a :

- ✓ Masse volumique :

$$\mu_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}$$

- ✓ Coefficient de compressibilité isotherme :

$$PV = \mathcal{C} \Rightarrow \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \Rightarrow \chi_T = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = \frac{1}{P}$$

D'où :

$$\chi_{0,T} = \frac{1}{P_0}$$

- ✓ Coefficient de compressibilité isentropique :

$$PV^\gamma = \mathcal{C} \Rightarrow \gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \Rightarrow \chi_S = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = \frac{1}{\gamma P}$$

D'où :

$$\chi_{0,S} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

- ☛ On en déduit la célérité des ondes acoustiques dans les gaz :

- ✓ Pour une évolution isentropique (la grande majorité des cas et le cas à prendre par défaut)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_{0,S}}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

- ✓ Pour une évolution isotherme

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_{0,T}}} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}$$

### ✗ Influence de la viscosité

- Dans l'approche eulérienne, on utilise les équations locales dans lesquelles on tient compte des forces de viscosité :

- ✓ Équation de Navier-Stokes :

$$\mu \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mu (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \eta \Delta \vec{V}_1$$

Avec  $\eta$  la viscosité dynamique et  $\nu$  la viscosité cinématique.

- ✓ Équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{V}) = 0$$

- ✓ Coefficient  $\chi_0$  :

$$\chi_0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} \Big|_{(T \text{ ou } S)}$$

- Dans le cadre de l'approximation acoustique, on linéarise ces équations (on ne garde que les termes d'ordre 1) :

- ✓ Équation de Navier-Stokes :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}P_1 + \eta \Delta \vec{V}_1$$

- ✓ Équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{V}_1) = 0$$

- ✓ Coefficient  $\chi_0$  :

$$\chi_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \Rightarrow \mu_1 = \chi_0 \mu_0 P_1$$

- D'où :

- ✓ Équation de Navier-Stokes :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}P_1 + \eta \Delta \vec{V}_1$$

- ✓ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \text{div}(\vec{V}_1)$$

- Équation différentielle vérifiée par  $V_1$

- ✓ Équation d'Euler dérivée par rapport au temps :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \eta \Delta \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t}$$

- ✓ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \text{div}(\vec{V}_1)$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{V}_1) + \nu \Delta \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \Delta \vec{V}_1 + \nu \Delta \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t}$$

(En supposant que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}_1 = \vec{0}$ )



- ☛ Équation différentielle vérifiée par  $P_1$ 
  - ✓ Divergence de l'équation d'Euler :

$$\mu_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} \right) = -\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} P_1 = -\Delta P_1 + \eta \operatorname{div} \Delta \vec{V}_1$$

- ✓ Équation de conservation de la masse :

$$\operatorname{div} (\vec{V}_1) = \chi_0 \frac{\partial P_1}{\partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \Delta P_1 + \nu \operatorname{div} \Delta \vec{V}_1$$

### ✗ Énergie mécanique volumique

- ☛ L'énergie cinétique  $dE_c$  d'un élément de volume mésoscopique :

$$dE_c = \frac{1}{2} dm (V_1)^2 = \frac{1}{2} \mu_0 d\tau (V_1)^2$$

D'où l'expression de la densité d'énergie cinétique :

$$e_c = \frac{dE_c}{d\tau} = \frac{1}{2} \mu_0 (V_1)^2$$

- ☛ L'énergie potentielle acquise par l'élément mésoscopique au passage de l'onde acoustique (son volume passe de  $d\tau$  à  $d\tau + \delta(d\tau)$  et sa pression  $P_1(t)$  passe de  $P_0$  à  $P_0 + P_1$ ) s'exprime en considérant la définition opérationnelle de l'énergie potentielle :

$$dE_p = W_{op} = - \int P_{ext} d(d\tau) = - \int_{d\tau}^{d\tau + \delta(d\tau)} (P_0 + P_1(t)) d(d\tau)$$

Sachant que :

$$\chi_0 = - \frac{1}{d\tau} \frac{d(d\tau)}{dP_1}$$

On déduit :

$$dE_p = \chi_0 d\tau \int_0^{P_1} (P_0 + P_1(t)) dP_1 = \chi_0 d\tau \left( P_0 P_1 + \frac{1}{2} P_1^2 \right)$$

- ☛ En ne gardant que le terme quadratique de valeur moyenne non nulle, on obtient la densité d'énergie potentielle :

$$e_p = \frac{dE_p}{d\tau} = \frac{1}{2} \chi_0 (P_1)^2$$

Et donc l'énergie mécanique volumique de l'onde :

$$e = \frac{1}{2} \chi_0 (P_1)^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (V_1)^2 \quad (6)$$

### ✗ Vecteur de Poynting acoustique

- ☛ Le vecteur de Poynting - ou vecteur densité de courant d'énergie acoustique - est un vecteur densité de courant dont le débit à travers une surface  $S$  doit donner la puissance de l'onde acoustique traversant cette surface :

$$\mathcal{P} = \iint_S \vec{V}_1 \cdot d\vec{F} = \iint_S (P_0 + P_1) \vec{V}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\Pi}_a \cdot d\vec{S}$$

☛ D'où, par identification et en ne gardant que le terme quadratique à valeur moyenne non nulle :

$$\vec{\Pi}_a = P_1 \vec{V}_1$$

### ✗ Équation de conservation de l'énergie mécanique

☛ **Équation de conservation à 1D**

✓ Calculons la divergence de  $\vec{\Pi}_a$  :

$$\operatorname{div}(\vec{\Pi}_a) = \frac{\partial}{\partial x} (P_1 V_1 \vec{e}_x) = \frac{\partial P_1}{\partial x} V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x} P_1$$

✓ On utilise ensuite les équations de couplage (1D) (équations 2 et 3)



$$\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}$$



$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \frac{\partial V_1}{\partial x}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{\Pi}_a) &= -\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} V_1 - \chi_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} P_1 \\ \operatorname{div}(\vec{\Pi}_a) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \chi_0 (P_1)^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (V_1)^2 \right) \end{aligned}$$

D'où l'équation de conservation de l'énergie mécanique :

$$\operatorname{div}(\vec{\Pi}_a) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

☛ **Équation de conservation à 3D**

✓ Calculons la divergence de  $\vec{\Pi}_a$  :

$$\operatorname{div}(\vec{\Pi}_a) = \vec{\nabla} \cdot (P_1 \vec{V}_1) = P_1 \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}_1) + (\vec{\nabla} P_1) \cdot \vec{V}_1 = \overrightarrow{\operatorname{grad}} P_1 \cdot \vec{V}_1 + P_1 \operatorname{div} \vec{V}_1$$

✓ On utilise ensuite les équations de couplage (3D) (équations 4 et 5)



$$\mu_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} P_1$$



$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \operatorname{div}(\vec{V}_1)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{\Pi}_a) &= -\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} V_1 - \chi_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} P_1 \\ \operatorname{div}(\vec{\Pi}_a) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \chi_0 (P_1)^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (V_1)^2 \right) \end{aligned}$$

D'où l'équation de conservation de l'énergie mécanique :

$$\operatorname{div}(\vec{\Pi}_a) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

### ✗ Impédance acoustique

- ☛ L'impédance caractéristique (ou impédance acoustique) est le rapport entre  $V_1(x, t)$  et  $P_1(x, t)$  dans le cas d'une OPP(+):

$$\underline{Z}_c = \frac{P_1(x, t)}{V_1(x, t)}_{OPP(+)}$$

- ☛ Dans le cas d'une OPP(+), on peut écrire :

$$P_1(x, t) = f(t - x/c) = f(v)$$

Avec  $v = t - x/c$

Alors, l'équation de couplage 3, permet d'écrire :

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_0 c} \frac{df}{dv}$$

D'où :

$$V_1(x, t) = -\sqrt{\frac{\chi_0}{\mu_0}} f(t - x/c)$$

Et donc :

$$\underline{Z}_c = \frac{P_1(x, t)}{V_1(x, t)}_{OPP(+)} = \sqrt{\frac{\chi_0}{\mu_0}}$$

### ✗ Coefficients de réflexion et transmission en amplitude

- ☛ On considère une OPPM(+), de pulsation  $\omega$ , se propageant dans un milieu d'impédance caractéristique  $\underline{Z}_1$  et arrivant dans un milieu d'impédance caractéristique  $\underline{Z}_2$ , l'interface entre les deux milieux se situant en  $z = 0$ .

- ☛ **Onde incidente :**

$$\underline{V}_{1i}(z, t) = V_0 e^{j(\omega t - k_1 z)}$$

$$\underline{P}_{1i}(z, t) = \underline{Z}_1 V_0 e^{j(\omega t - k_1 z)}$$

Avec  $\omega = k_1 c_1$  et  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \chi_1}}$ .

- ☛ **Onde réfléchie :**

$$\underline{V}_{1r}(z, t) = \underline{r}_V V_0 e^{j(\omega t + k_1 z)}$$

$$\underline{P}_{1r}(z, t) = \underline{r}_P \underline{Z}_1 V_0 e^{j(\omega t + k_1 z)} = -\underline{Z}_1 \underline{r}_V V_0 e^{j(\omega t + k_1 z)} \Rightarrow \underline{r}_V = -\underline{r}_P$$

- ☛ **Onde transmise :**

$$\underline{V}_{1t}(z, t) = \underline{t}_V V_0 e^{j(\omega t - k_2 z)}$$

$$\underline{P}_{1t}(z, t) = \underline{t}_P \underline{Z}_1 V_0 e^{j(\omega t - k_2 z)} = \underline{Z}_2 \underline{t}_V V_0 e^{j(\omega t - k_2 z)} \Rightarrow \underline{t}_V = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \underline{t}_P$$

- ☛ **Condition limite en  $x = 0$**

- ✓ Continuité de la pression :

$$\underline{P}_{1i}(0, t) + \underline{P}_{1r}(0, t) = \underline{P}_{1t}(0, t)$$

- ✓ Continuité de la vitesse :

$$\underline{V}_{1i}(0, t) + \underline{V}_{1r}(0, t) = \underline{V}_{1t}(0, t)$$

✓ On en déduit :

$$1 + r_P = t_P$$

$$1 + r_V = t_V \Rightarrow 1 - r_P = \frac{Z_1}{Z_2} t_P$$

Soit :

$$r_P = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$t_P = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$r_V = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$t_V = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

• Étude des différents cas :

- ✓ Cas où  $|Z_1| \gg |Z_2|$  :  $r_V = 1$  et  $r_P = -1$
- ✓ Cas où  $|Z_1| \ll |Z_2|$  :  $r_V = -1$  et  $r_P = 1$
- ✓ Cas où  $|Z_1| = |Z_2|$  :  $r_V = r_P = 0$

### ✗ Coefficients de réflexion et transmission en puissance

• La valeur moyenne du vecteur de Poynting acoustique pour une OPPM, se propageant suivant ( $Oz$ ) s'exprime comme suit :

$$\vec{\Pi}_a = \frac{1}{2} P V^* \vec{e}_x = \frac{1}{2} Z_c |V|^2 \vec{e}_x$$

• Les vecteurs de Poynting moyens des ondes incidente, réfléchie et transmise, valent donc :

✓ Vecteur de Poynting incident :

$$\vec{\Pi}_{ai} = \frac{1}{2} Z_1 V_0^2 \vec{e}_x$$

✓ Vecteur de Poynting réfléchi :

$$\vec{\Pi}_{ar} = -\frac{1}{2} Z_1 |r_V|^2 V_0^2 \vec{e}_x$$

✓ Vecteur de Poynting transmis :

$$\vec{\Pi}_{at} = -\frac{1}{2} Z_2 |t_V|^2 V_0^2 \vec{e}_x$$

• On en déduit les coefficients de réflexion et transmission en puissance :

✓ Coefficient de réflexion en puissance

$$R = \frac{\|\vec{\Pi}_{ar}\|}{\|\vec{\Pi}_{ai}\|} = |r_V|^2 = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right|^2$$

✓ Coefficient de transmission en puissance

$$T = \frac{\|\vec{\Pi}_{at}\|}{\|\vec{\Pi}_{ai}\|} = \frac{|Z_2|}{|Z_1|} |t_V|^2 = \left\| \frac{4Z_2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \right\|^2$$

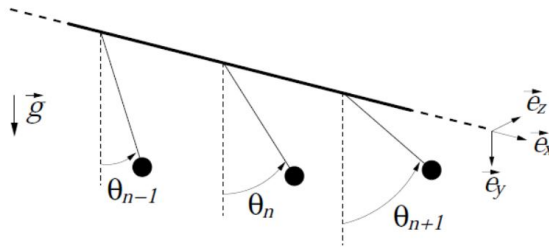
## 1.9 Autres ondes mécaniques

SVF

- ✘ Établir l'équation de propagation le long d'une chaîne de pendules couplés dans l'approximation des milieux continus. Les pendules (longueur  $l$ , masse  $m$ ) sont identiques et le couplage fait intervenir un couple de torsion  $C$  identique le long de la chaîne.
- ✘ Établir l'équation de propagation des ondes, à la surface d'un fluide

### ✘ Équation de propagation le long d'une chaîne de pendule

- ☛ On considère une chaîne de  $N$  pendules ( $m, l$ ) identiques. Le  $n^{ieme}$  pendule oscille dans le plan  $x = na$  et est repéré par l'angle  $\theta_n(t)$  comme représenté figure 18.



**Figure 18** –  $N$  pendules couplés par l'intermédiaire d'un câble de torsion

- ☛ Équation différentielle vérifiée par  $\theta_n(t)$  :
  - ✓ Le BAM appliqué au  $n^{ieme}$  pendule donne :
    - ☛ Couple de rappel à gauche, projeté sur l'axe ( $Ox$ ) :
 
$$-C (\theta_n(t) - \theta_{n-1}(t))$$
    - ☛ Couple de rappel à droite, projeté sur l'axe ( $Ox$ ) :
 
$$-C (\theta_n(t) - \theta_{n+1}(t))$$
    - ☛ Couple dû au poids, projeté sur l'axe ( $Ox$ ) :
 
$$-mgl \sin \theta_n(t)$$

- ✓ Le TMC appliqué au pendule  $n$  donne :

$$ml^2 \frac{d^2 \theta_n(t)}{dt^2} = -C (\theta_n(t) - \theta_{n-1}(t)) - C (\theta_n(t) - \theta_{n+1}(t)) - mgl \sin \theta_n(t)$$

Soit :

$$\frac{d^2 \theta_n(t)}{dt^2} + 2\omega_1^2 \theta_n(t) + \omega_0^2 \sin \theta_n(t) = \omega_1^2 (\theta_{n-1}(t) + \theta_{n+1}(t))$$

où :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  et  $\omega_1 = \sqrt{\frac{C}{ml^2}}$

- ✓ On se place dans l'approximation des milieux continus : on repère le pendule  $n$  par sa position au repos  $x$ , avec  $a \ll x$ . L'angle  $\theta_n(t)$  pour repérer le pendule devient :  $\theta(x, t)$ . Le TMC donne alors :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + 2\omega_1^2 \theta(x, t) + \omega_0^2 \sin \theta(x, t) = \omega_1^2 (\theta(x - a, t) + \theta(x + a, t))$$

- ✓ Sachant que  $a \ll x$ , on effectue un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} \theta(x+a, t) = \theta(x, t) + \frac{\partial \theta}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} a^2 \\ \theta(x-a, t) = \theta(x, t) - \frac{\partial \theta}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} a^2 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \omega_0^2 \sin \theta(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

Avec  $c = \omega_1 a$

Cette équation de propagation n'est pas linéaire en raison du terme  $\sin \theta(x, t)$ . Les effets non-linéaires et dispersifs de ce type d'équation de propagation permettent la propagation de solitons.

- ✓ Dans l'approximation des petits angles, on obtient une équation linéaire :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \omega_0^2 \theta(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

La relation de dispersion s'obtient alors facilement :

$$-\omega^2 + \omega_0^2 = -c^2 k^2$$

Soit :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$$

On obtient l'équation de Klein-Gordon

### ✗ Équation propagation à la surface d'un fluide



## 1.10 Nature d'une OEM dans le vide qualifiée d'OPP

SVF

- ✗ Montrer que pour une OEM qualifiée d'OPP se propageant suivant  $(Ox)$ , les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont transverses et sont perpendiculaires entre eux.
- ✗ Établir la relation de structure pour une OPP se propageant dans le vide :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}$$

- ✗ Établir l'expression du vecteur de Poynting correspondant à cette OPP :

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 E^2 \vec{e}_x$$

- ✗ Établir l'expression de la densité d'énergie électromagnétique correspondant à cette OPP :

$$u_{em} = \varepsilon_0 E^2$$

- ✗ En déduire la relation entre  $\vec{\Pi}$  et  $u_{em}$ .
- ✗ Montrer que l'énergie de l'OEM se propage à la vitesse  $c$ .

### ✗ Structure d'une OPP dans le vide - relation de structure

- Équation de Maxwell dans le vide

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Maxwell Gauss} & \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{Maxwell Thomson} & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \text{Maxwell Faraday} & \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{Maxwell Ampère} & \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- On considère une onde plane se propageant suivant  $(Ox)$  :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{cases} E_x(t - \frac{x}{c}) \\ E_y(t - \frac{x}{c}) \\ E_z(t - \frac{x}{c}) \end{cases} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{cases} B_x(t - \frac{x}{c}) \\ B_y(t - \frac{x}{c}) \\ B_z(t - \frac{x}{c}) \end{cases}$$

- Les équations de Maxwell Gauss et Maxwell Flux permettent d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

L'onde électromagnétique plane est donc obligatoirement transverse.

- Les équations de Maxwell Faraday et Maxwell Ampère permettent d'écrire :

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (9)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (10)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (11)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (12)$$

- On introduit  $u = t - x/c$ , alors, pour tout champ  $X(t - x/c) = f(u)$ , on a :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{df}{du}$$

Ainsi, en posant  $E_y(t - x/c, t) = f(u)$ ,  $E_z(t - x/c, t) = g(u)$ ,  $B_y(t - x/c, t) = F(u)$  et  $B_z(t - x/c, t) = G(u)$  les équations 9, 10, 11 et 12 s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c} \frac{dg}{du} = \frac{dF}{du} \Rightarrow g(u) = -cF(u) \Rightarrow E_z(t - x/c, t) = -cB_y(t - x/c, t) \\ -\frac{1}{c} \frac{df}{du} = -\frac{dG}{du} \Rightarrow f(u) = cG(u) \Rightarrow E_y(t - x/c, t) = cB_z(t - x/c, t) \\ -\frac{1}{c} \frac{dG}{du} = -\frac{1}{c^2} \frac{df}{du} \Rightarrow G(u) = \frac{1}{c} f(u) \Rightarrow B_z(t - x/c, t) = \frac{1}{c} E_y(t - x/c, t) \\ -\frac{1}{c} \frac{dF}{du} = \frac{1}{c^2} \frac{dg}{du} \Rightarrow F(u) = -\frac{1}{c} g(u) \Rightarrow B_y(t - x/c, t) = -\frac{1}{c} E_z(t - x/c, t) \end{array} \right.$$

- On vérifie alors facilement que  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires :

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = -c B_z B_y + c B_y B_z = 0$$

- On vérifie également que la relation entre les normes :

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{c^2 B_z^2 + c^2 B_y^2} = c \|\vec{B}\|$$

- Enfin on vérifie que le trièdre  $(\vec{e}_x, \vec{E}, \vec{B})$  est direct :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{E} = -E_z \vec{e}_y + E_y \vec{e}_z = c(B_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z) = c \vec{B}$$

D'où :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}$$

### ✗ Approche énergétique d'une OPP

- Vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{\|\vec{E}\|^2}{\mu_0 c} \vec{e}_x$$

- Densité d'énergie électromagnétique :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2} \|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}\|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{2\mu_0 c^2} \|\vec{E}\|^2 = \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2$$

- Relation entre  $\vec{\Pi}$  et  $u_{em}$

$$\vec{\Pi} = \frac{\|\vec{E}\|^2}{\mu_0 c} \vec{e}_x = u_{em} c \vec{e}_x$$

### ✗ Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique

- Soit une OPP(+) se propageant dans le sens des  $x$  croissants et traversant une surface  $S$  à l'instant  $t$ . La puissance traversant la surface  $S$  à l'instant  $t$  vaut :

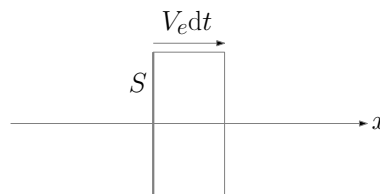
$$\mathcal{P} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \varepsilon_0 c \|\vec{E}\|^2 S$$

- L'énergie électromagnétique traversant la surface  $S$  pendant  $dt$  vaut :

$$dE_m = \mathcal{P} dt = \varepsilon_0 c \|\vec{E}\|^2 S dt$$

- Cette énergie  $dE_m$  est l'énergie contenue dans le parallélépipède de section  $S$  et de longueur  $V_e dt$  où  $V_e$  est la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique comme indiqué figure 19 :

$$dE_m = u_{em} \times S V_e dt = \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2 S V_e dt$$



**Figure 19** – Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique

- En comparant les deux expressions de  $dE_m$ , on obtient :

$$V_e = c$$



### 1.11 Nature d'une OPPM(+) dans un milieu matériel

SVF

Soit une pseudo OPPM(+), de pulsation  $\omega$  se propageant suivant  $(Oz)$  dans un milieu caractérisé par :

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$$

- ✘ Déterminer les expressions des champ électriques et magnétiques complexes.
- ✘ Justifier que la vitesse de phase est de la forme :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k'}$$

- ✘ Établir les expressions de la permittivité relative complexe du milieu et de l'indice complexe du milieu.
- ✘ Déterminer l'expression du vecteur de Poynting moyen associé à cette onde.

- ✘ Les champs de cette pseudo OPPM(+) s'écrivent :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \underline{k}z) = \vec{E}_0 \exp(k''z) \exp j(\omega t - k'z)$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_0 \exp j(\omega t - \underline{k}z) = \vec{B}_0 \exp(k''z) \exp j(\omega t - k'z)$$

Notons que pour un milieu passif, et dans le cas d'une OPPM(+), on a :  $k' > 0$  et  $k'' < 0$ .

- ✘ On en déduit le champ magnétique  $\vec{B}_0$  grâce à la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_0}{\omega}$$

- ✘ La phase de l'onde vaut donc :

$$\Phi = \omega t - k'z$$

$\Rightarrow$  la vitesse d'un plan équiphase se détermine alors facilement :

$$d\Phi = 0 = \omega dt - k' dz \Rightarrow V_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k'}$$

- ✘ La permittivité relative, ainsi que l'indice complexe, sont définis à partir de la relation de dispersion dans le vide :

- ☛ Relation de dispersion pour une OPPM(+) dans le vide :

$$\underline{k}(\omega) = k(\omega) = \frac{\omega}{c} \Rightarrow k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

- ☛ Relation de dispersion pour une OPPM(+) dans un milieu matériel de permittivité complexe  $\varepsilon_r$  : on remplace  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r$  dans la relation de dispersion d'une OPPM(+) dans le vide :

$$\underline{k}(\omega)^2 = (k'(\omega) + jk''(\omega))^2 = \underline{\varepsilon}_r \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

Soit, en posant  $\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_r' + j\varepsilon_r''$  :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \varepsilon_r' \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \\ 2k'k'' = \varepsilon_r'' \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \end{cases}$$

Notons que si  $\underline{\varepsilon}_r$  est fonction de  $\omega$  alors le milieu est dispersif.

- ☛ Relation de dispersion pour une OPPM(+) dans un milieu matériel d'indice complexe  $\underline{n}$  : on remplace  $c$  par  $\frac{c}{\underline{n}}$  dans la relation de dispersion d'une OPPM(+) dans le vide :

$$\underline{k}(\omega)^2 = (k'(\omega) + jk''(\omega))^2 = \frac{\underline{n}^2}{c^2} \omega^2 \Rightarrow \underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega) = \frac{\underline{n}}{c} \omega$$

Soit, en posant  $\underline{n} = n' + jn'' = n_r - jn_e$  où  $n_r$  est l'indice de réfraction et où  $n_e$  est l'indice d'extinction :

$$\begin{cases} k' = \frac{n_r}{c} \omega \\ k'' = \frac{n_e}{c} \omega \end{cases}$$

Notons que si  $\underline{n}$  est fonction de  $\omega$  alors le milieu est dispersif.

- ✕ Vecteur de Poynting moyen :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \text{Re} \left( \vec{\Pi} \right)$$

Avec :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0} = \frac{(\vec{E}_0 \exp(k''z)) \wedge ((\vec{k} \wedge \vec{E}_0)^* \exp(k''z))}{2\mu_0 \omega} = \frac{|\vec{E}_0|^2}{2\mu_0 \omega} \exp(2k''z) \vec{k}^*$$

D'où :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{|\vec{E}_0|^2}{2\mu_0 \omega} \exp(2k''z) k' \vec{e}_z$$

## 1.12 Plasmas

SVF

- ✕ Préciser les hypothèses précisant le cadre de l'étude des plasmas.
- ✕ Déterminer la pulsation propre d'oscillation d'un plasma.
- ✕ Montrer que la conductivité d'un plasma est de la forme :

$$\gamma = \frac{-j\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega}$$

On précisera les hypothèses faites.

Nommer  $\omega_p$  et donner son expression.

- ✕ En déduire la relation de dispersion dans un plasma :

$$\underline{k} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Comment nomme-t-on cette relation ?

- ✕ Montrer que la permittivité relative complexe du plasma est de la forme :

$$\underline{\varepsilon}_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

En déduire l'indice complexe du plasma.

- ✕ Montrer que les plasmas ne sont pas dissipatifs.

✗ Hypothèses sur l'étude des plasmas :

- ☛ On considère un plasma constitué de  $n^*$  électrons par unité de volume (charge  $-e$ , masse  $m$ , vitesse  $\vec{v}_e$ ) et de  $n^{**}$  ions par unité de volume (charge  $+Ne$ , masse  $M \gg m$ , vitesse  $\vec{v}_i$ ).
- ☛ En l'absence d'onde électromagnétique le plasma est localement neutre :

$$\rho = \rho_m = -en^* + Nen^{**} = 0$$

- ☛ En présence de l'onde électromagnétique, on néglige la composante magnétique de la force de Lorentz devant sa composante électrique agissant sur les charges. D'où, à l'aide de grandeurs caractéristiques :

$$\frac{F_E}{F_B} = \frac{E}{VB} = \frac{c}{V} \gg 1$$

Ainsi, pour que cette hypothèse soit valable, il faut que les charges soient non relativistes.

- ☛ On néglige le poids agissant sur les charges, on néglige aussi toute interaction entre particules chargées.
- ☛ On considère que le champ électrique appliqué est localement uniforme :
  - ✓ Approche lagrangienne : on considère que la longueur d'onde est très grande devant la dimension caractéristique du mouvement d'une charge :

$$\lambda \gg a \Rightarrow \frac{\lambda}{T} \gg \frac{a}{T} \Rightarrow c \gg V$$

Cette hypothèse est valable si les charges sont non relativistes.

- ✓ Approche eulérienne : on considère que l'accélération locale d'une particule fluide est très grande devant l'accélération convective :

$$\frac{\|(\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V}\|}{\|\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\|} = \frac{V^2/L}{V/T} = \frac{V}{c} \ll 1$$

On retrouve la condition des charges non relativistes.

- ✓ Ainsi, quand on applique le PFD à une charge, le champ électrique apparaît comme une fonction du temps uniquement :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\omega t)$$

- ☛ Le PFD appliqué aux électrons et aux ions donne :

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \\ M \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -Ne\vec{E} \end{cases}$$

Le nombre  $N$  étant de l'ordre de l'unité et sachant que  $m \ll M$ , on a (avec les grandeurs caractéristiques) :

$$\frac{v_e}{T} = \frac{M}{m} \frac{v_i}{T} \gg \frac{v_i}{T}$$

Ainsi, l'accélération des ions est négligeable devant celle des électrons : on pourra donc négliger le mouvement des ions devant celui des électrons.

- Le vecteur densité de courant dans le plasma s'écrit donc :

$$\vec{j}(M, t) = (-en^*)\langle \vec{v}_e \rangle_{(M, t)} + (eNn^{**})\langle \vec{v}_i \rangle_{(M, t)} \approx (-en^*)\langle \vec{v}_e \rangle_{(M, t)}$$

Soit, en notant  $\vec{v}$  la vitesse moyenne des électrons :

$$\vec{j}(M, t) = (-en^*)\vec{v}$$

- Dans le cadre du modèle utilisé (équivalent du modèle de Drude), la vitesse  $\vec{v}$  est la solution de l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{v}_e$  en **régime forcé**, notamment en régime sinusoïdal forcé, c'est la vitesse  $\vec{v} = \langle \vec{v}_e \rangle$  qui doit être utilisée.
- Dans le cadre du programme de PC, on s'intéresse à la propagation des ondes transverses dans le plasma.

### ✗ Oscillations propres d'un plasma

- On considère un plasma constitué de  $n^*$  électrons par unité de volume (charge  $-e$ , masse  $m$ , vitesse  $\vec{v}_e$ ) et de  $n^{**}$  ions par unité de volume (charge  $+Ne$ , masse  $M \gg m$ , vitesse  $\vec{v}_i$ ).
- En l'absence d'onde électromagnétique le plasma est localement neutre :

$$\rho = \rho_m = -en^* + Nen^{**} = 0$$

- Soit, suivant l'axe ( $Oz$ ), un petit déplacement d'ensemble  $\xi(z, t)$  des électrons situés en  $z$  quand le plasma est au repos et soit la mésotranche de section  $S$  et de longueur  $dz$ . La variation du volume de la mésotranche due au déplacement des électrons vaut :

$$dV = S\xi(z + dz) - S\xi(z) = S\frac{\partial \xi}{\partial z} dz$$

Alors la nouvelle densité volumique d'électrons vaut :

$$n_p^* = \frac{n^* S dz}{S dz + dV} = n^* \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^{-1} \approx n^* \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$$

D'où, la nouvelle densité de charges :

$$\rho_p = -en_p^* + Nen^{**} = en^* \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$$

- Le champ électrique créé par cette densité de charge ( $\vec{E} = E(z, t)\vec{e}_z$ ) de déterminer à partir de l'équation de Maxwell- Gauss :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\rho_p}{\epsilon_0} = \frac{en^*}{\epsilon_0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$$

D'où :

$$E(z, t) = \frac{en^*}{\epsilon_0} \xi(z, t)$$

- Le PFD appliqué à un électron donne alors :

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -eE(z, t)$$

Soit :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_p^2 \xi(z, t) = 0$$

où  $\omega_p = \sqrt{\frac{n^* e^2}{\epsilon_0 m}}$  est la pulsation de plasma.

### ✗ Conductivité complexe du plasma

- On considère un plasma placé dans un champ électromagnétique. Le PFD appliqué à un électron donne donc :

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

Avec :  $\vec{v} = \underline{v}_0 \exp(j\omega t)$

- On obtient donc :

$$\underline{v} = \frac{-e}{jm\omega} \underline{E} \Rightarrow \underline{j} = \frac{n^* e^2}{jm\omega} \underline{E}$$

- Sachant que la conductivité du plasma vérifie :  $\underline{j} = \underline{\gamma} \underline{E}$ , on en déduit :

$$\underline{\gamma} = \frac{n^* e^2}{jm\omega} \quad (13)$$

Ainsi, la conductivité du plasma est imaginaire pure : le champ électrique et le vecteur densité de courant électrique sont en quadrature.

### ✗ Relation de dispersion dans un plasma

- Équation de Maxwell dans le plasma (en complexe)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maxwell Gauss} \quad \text{div} \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{Maxwell Thomson} \quad \text{div} \underline{B} = 0 \\ \text{Maxwell Faraday} \quad \text{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ \text{Maxwell Ampère} \quad \text{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{\gamma} \underline{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

- On étudie la propagation d'une OPPM(+) transverse dans le plasma :

$$\underline{E}(M, t) = \underline{E}_0 \exp j(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})$$

$$\underline{B}(M, t) = \underline{B}_0 \exp j(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})$$

Avec  $\underline{k} = k \underline{e}_z$

- L'onde étant transverse, on a :

$$\underline{E}(M, t) \cdot \underline{k} = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

Ainsi, lorsqu'une OPPM transverse se propage dans un plasma, alors le plasma est obligatoirement neutre.

- En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell Faraday, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot} \underline{E}) &= -\text{rot} \left( \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \text{grad}(\text{div} \underline{E}) - \Delta \underline{E} &= -\frac{\partial \text{rot} \underline{B}}{\partial t} \\ \Rightarrow \Delta \underline{E} &= \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

- En utilisant la forme de l'OPPM, on obtient :

$$-\underline{k}^2 = \mu_0 \gamma j \omega - \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n^* e^2}{m} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Avec :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0}} \text{ la pulsation plasma}$$

- On retrouve la relation de dispersion de Klein Gordon :

- ✓ Si  $\omega > \omega_p$ ,  $\underline{k}$  est réel, on a propagation sans absorption avec dispersion :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = f(\omega) \Rightarrow \text{dispersion}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = g(\omega) \Rightarrow \text{déformation de l'enveloppe du paquet d'onde}$$

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

- ✓ Si  $\omega < \omega_p$ ,  $\underline{k}$  est imaginaire pur, il n'y a pas propagation, on a une onde évanescente :

$$\delta = \frac{1}{|k''|} = \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp j(\omega t)$$

(en prenant une propagation suivant  $(Oz)$ )

### ✗ Permittivité relative et indice du plasma

- La permittivité relative, ainsi que l'indice complexe, sont définis à partir de la relation de dispersion dans le vide :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \rightarrow \underline{k}^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega^2$$

$$v_\phi = \frac{c}{n} \Leftrightarrow k = n \frac{\omega}{c} \rightarrow \underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$$

Notons que :  $\underline{k}^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \in \mathbb{R}$ , implique que la permittivité du plasma est toujours réelle.

- Permittivité relative :

$$\underline{k}(\omega)^2 = (k'(\omega) + j k''(\omega))^2 = \underline{\varepsilon}_r \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

Soit, en posant  $\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_r' + j \varepsilon_r''$  :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \varepsilon_r' \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \\ 2k' k'' = \varepsilon_r'' \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \end{cases}$$

- ✓ Si  $\omega > \omega_p$ ,  $\underline{k}$  est réel, on a propagation sans absorption avec dispersion :

$$\varepsilon_r = \varepsilon'_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} > 0 \text{ et } \underline{k} = k' = \sqrt{\varepsilon'_r} \frac{\omega}{c}$$

- ✓ Si  $\omega < \omega_p$ ,  $\underline{k}$  est imaginaire pur, on n'a pas propagation :

$$\varepsilon_r = \varepsilon'_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 0 \text{ et } \underline{k} = k' \text{ avec } k'' = \sqrt{-\varepsilon'_r} \frac{\omega}{c}$$

☛ Indice :

$$\underline{k}(\omega)^2 = (k'(\omega) + jk''(\omega))^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2 \Rightarrow \underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega) = \frac{n}{c} \omega$$

- ✓ Si  $\omega > \omega_p$ ,  $\underline{k}$  est réel, on a propagation sans absorption avec dispersion :

$$\underline{n} = n_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

- ✓ Si  $\omega < \omega_p$ ,  $\underline{k}$  est imaginaire pur, on n'a pas propagation :

$$\underline{n} = -n_e = -\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

### ✗ Approche énergétique

☛ La puissance volumique moyenne reçue par le plasma s'exprime comme suit :

$$P_v = \vec{j} \cdot \vec{E} \Rightarrow \langle P_v \rangle = \text{Re} \left( \frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{E}^* \right) = \text{Re} \left( \frac{1}{2} \gamma |\vec{E}|^2 \right)$$

☛ Sachant que la conductivité plasma est imaginaire pure, on obtient :  $\langle P_v \rangle = 0$

## 1.13 Conducteurs

1

---

1. On s'intéresse ici aux conducteurs métalliques

## SVF

- ✘ Préciser les hypothèses faites pour l'étude des ondes électromagnétiques dans les conducteurs.
- ✘ Montrer que la conductivité dans un conducteur est de la forme :

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + j\tau\omega}$$

Nommer  $\gamma_0$  et donner son expression.

Nommer  $\tau$ .

- ✘ Établir la relation de dispersion dans les conducteurs métalliques.
- ✘ Montrer que la permittivité relative équivalente du conducteur est de la forme :

$$\underline{\varepsilon}_r = 1 + \frac{\gamma_0}{j\omega\varepsilon_0(1 + j\omega\tau)}$$

En déduire l'indice complexe du conducteur.

- ✘ Montrer que dans le cas où  $\omega\tau \ll 1$ , l'effet de peau prédomine. Établir l'expression de la distance caractéristique d'atténuation.
- ✘ Montrer que dans le cas où  $\omega\tau \gg 1$ , le conducteur se comporte comme un plasma.
- ✘ Montrer que une OEM ne peut pénétrer dans un conducteur parfait.

### ✘ Hypothèses sur l'étude des conducteurs :

- ☛ On considère un conducteur constitué de  $n^*$  électrons libres par unité de volume (charge  $-e$ , masse  $m$ , vitesse  $\vec{v}_e$ ) et  $n^{**}$  ions métalliques (constituant le réseau métallique, fixes, en moyenne, dans le référentiel d'étude).
- ☛ En l'absence d'onde électromagnétique le conducteur est localement neutre :

$$\rho = \rho_m = -en^* + Nen^{**} = 0$$

- ☛ En présence de l'onde électromagnétique, on néglige la composante magnétique de la force de Lorentz devant sa composante électrique agissant sur les électrons. D'où, à l'aide de grandeurs caractéristiques :

$$\frac{F_E}{F_B} = \frac{E}{VB} = \frac{c}{V} \gg 1$$

Ainsi, pour que cette hypothèse soit valable, il faut que les électrons soient non relativistes.

- ☛ On néglige le poids agissant sur les électrons.
- ☛ On modélise les interactions d'un électron avec le réseau métallique par une force de frottement fluide, appelée force de Drude :

$$\vec{F}_D = -\lambda\vec{v}_e$$

- ☛ On considère que le champ électrique est localement uniforme : on considère que la longueur d'onde est très grande devant la dimension caractéristique du mouvement d'un électron :

$$\lambda \gg a \Rightarrow \frac{\lambda}{T} \gg \frac{a}{T} \Rightarrow c \gg V$$

Cette hypothèse est valable si les charges sont non relativistes.

Ainsi, quand on applique le PFD à un électron, le champ électrique apparaît comme une fonction du temps uniquement (champ localement uniforme) :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\omega t)$$



- Le vecteur densité de courant dans le plasma s'écrit donc :

$$\vec{j}(M, t) = (-en^*) \langle \vec{v}_e \rangle_{(M, t)}$$

Soit, en notant  $\vec{v}$  la vitesse moyenne des électrons :

$$\vec{j}(M, t) = (-en^*) \vec{v}$$

- Dans le cadre du modèle utilisé (modèle de Drude), la vitesse  $\vec{v}$  (vitesse moyenne d'un électron) est la solution de l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{v}_e$  en régime forcé, notamment en régime sinusoïdal forcé, c'est la vitesse  $\vec{v}$  qui doit être utilisée.
- Dans le cadre du programme de PC, on s'intéresse à la propagation des ondes transverses dans le conducteur.

### ✗ Conductivité complexe des métaux

- Le PFD appliqué à un électron donne donc :

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} - \lambda \vec{v}_e \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \lambda \vec{v}_e$$

Avec :  $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp(j\omega t)$

- On obtient donc :

$$\vec{v} = \frac{-e}{jm\omega + \lambda} \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \frac{n^* e^2 \tau}{m} \vec{E}$$

- Sachant que la conductivité du conducteur vérifie :  $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$ , on en déduit :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\tau\omega} \quad (14)$$

Avec :

$$\gamma_0 = \frac{n^* e^2}{\tau m}$$

, la conductivité statique du conducteur.

Et :

$$\tau = \frac{m}{\lambda}$$

, le temps de réponse du conducteur.

Ainsi, la conductivité du conducteur est complexe : le champ électrique et le vecteur densité de courant électrique sont déphasés.

### ✗ Relation de dispersion dans les conducteurs métalliques.

- Équation de Maxwell dans le conducteur (en complexe)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maxwell Gauss} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{Maxwell Thomson} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{Maxwell Faraday} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{Maxwell Ampère} \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \underline{\gamma} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

- On étudie la propagation d'une OPPM(+) transverse dans le conducteur :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp j \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right)$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_0 \exp j \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right)$$

Avec  $\vec{k} = k \vec{e}_z$

- L'onde étant transverse, on a :

$$\vec{E}(M, t) \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

Ainsi, lorsqu'une OPPM transverse se propage dans un conducteur, alors le conducteur est obligatoirement neutre.

- En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell Faraday, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \left( \vec{\text{rot}} \vec{E} \right) &= -\vec{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \vec{\text{grad}} \left( \text{div} \vec{E} \right) - \Delta \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t} \\ \Rightarrow \Delta \vec{E} &= \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

- En utilisant la forme de l'OPPM, on obtient :

$$-k^2 = \mu_0 \underline{\gamma} j \omega - \frac{\omega^2}{c^2}$$

Soit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} \quad (15)$$

Avec :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0}} \text{ la pulsation plasma}$$

### ✗ Permittivité complexe et indice complexe des métaux.

- La permittivité relative, ainsi que l'indice complexe, sont définis à partir de la relation de dispersion dans le vide :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \rightarrow \underline{k}^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \omega^2$$

$$v_\phi = \frac{c}{n} \Leftrightarrow k = n \frac{\omega}{c} \rightarrow \underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$$

- Permittivité complexes**

On a donc :

$$\underline{k}^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$$

D'où :

$$\underline{\varepsilon}_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} \right) = 1 + \frac{\gamma_0}{j\omega \varepsilon_0 (1 + j\omega\tau)}$$

☛ **Indices**

Sachant que :

$$\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r$$

On en déduit :

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} \right) = 1 + \frac{\gamma_0}{j\omega\varepsilon_0(1 + j\omega\tau)}$$

✗ **Effet de peau ( $\omega \ll 1/\tau$ )**

☛ La relation de dispersion (équation 15) s'écrit :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - j\tau\omega \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - j\tau \frac{\omega_p^2}{\omega} \right)$$

☛ Sachant que  $\omega \ll 1/\tau$ , on peut écrire :

$$\tau \frac{\omega_p^2}{\omega} \gg \tau^2 \omega_p^2$$

☛ Or, pour les conducteurs métalliques, comme le cuivre, on a :

$$\tau \approx 10^{-14} \text{ s et } \omega_p \approx 10^{16} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

D'où :

$$\tau^2 \omega_p^2 \approx 10^4 \gg 1$$

Et donc :

$$\tau \frac{\omega_p^2}{\omega} \gg \gg 1$$

Ainsi, la relation de dispersion s'écrit :

$$\underline{k}^2 = -j \frac{\omega_p^2 \omega \tau}{c^2} = -j \gamma_0 \mu_0 \omega$$

☛ On peut alors en déduire<sup>2</sup> l'expression de  $\underline{k} = k' + jk''$  :

$$\underline{k} = \sqrt{\gamma_0 \mu_0 \omega} \left( \frac{1-j}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1-j}{\delta}$$

Où :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

( $k' = -k'' = \frac{1}{\delta}$ ) est la profondeur de peau, ou distance caractéristique de pénétration de l'onde dans le métal.

☛ Les champs électrique et magnétique, d'une pseudo OPPM(+) se propageant suivant ( $Oz$ ), s'écrivent alors :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \exp j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_0 \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \exp j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

On retrouve bien l'effet de peau : l'onde se propage dans le conducteur tout en s'atténuant, la distance caractéristique d'atténuation étant  $\delta$ .

2. Sachant que  $\exp(-j\pi/2) = -j$  et ne prenant  $k' > 0$  pour une pseudo OPPM(+)

- ☛ Pour caractériser cette propagation, on peut calculer les vitesses caractéristiques de cette onde :

- ✓ vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma_0}} = f(\omega)$$

Au cours de la propagation, il y a dispersion.

- ✓ vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{d\omega}{d\delta} \frac{d\delta}{dk'} = \left(-2\frac{\omega}{\delta}\right) (-\delta^2\omega) = 2\omega\delta = g(\omega)$$

Au cours de la propagation, il y a déformation de l'enveloppe du paquet d'onde.

### ✗ Plasmas ( $\omega \gg 1/\tau$ )

- ☛ La relation de dispersion (équation 15) s'écrit :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

On retrouve bien la relation de dispersion des plasmas :

- ✓ Si  $\omega > \omega_p$ ,  $\underline{k}$  est réel, on a propagation sans absorption avec dispersion :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = f(\omega) \Rightarrow \text{dispersion}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = g(\omega) \Rightarrow \text{déformation de l'enveloppe du paquet d'onde}$$

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

- ✓ Si  $\omega < \omega_p$ ,  $\underline{k}$  est imaginaire pur, il n'y a pas propagation, on a une onde évanescente :

$$\delta = \frac{1}{|k''|} = \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp j(\omega t)$$

(en prenant une propagation suivant  $(Oz)$ )

### ✗ Modèle du conducteur parfait

- ☛ On considère un conducteur métallique utilisé à une pulsation  $\omega$  telle que :

$$\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$$

Dans ce cas là, le conducteur se comporte comme un plasma à basse fréquence : l'onde ne pénètre pas dans le conducteur mais s'y réfléchit totalement. On dit qu'il y a réflexion totale.

- ☛ Le modèle du conducteur parfait correspond à un cas particulier du cas précédent : on se place dans le cas où  $\frac{1}{\tau} \ll \omega \ll \omega_p$  de façon à avoir un déphasage de  $\pi$  à la réflexion.

*Un conducteur peut être considéré comme parfait pour une pulsation  $\omega$  si :*

$$\frac{1}{\tau} \ll \omega \ll \omega_p$$

Notons que si on se place dans le cas limite de l'effet de peau à haute fréquence : quand  $\omega$  tend vers l'infini, la distance caractéristique d'atténuation tend vers zéro. Ainsi, l'amplitude des champs tend immédiatement vers zéro quand l'onde arrive à la surface du conducteur : l'onde ne pénètre pas dans le conducteur.

- ☛ Un conducteur parfait est un conducteur vérifiant les conditions précédentes, et ce pour toutes les fréquences. Il faut donc que  $\tau$  tende vers 0 et  $\omega_p$  tende vers l'infini. Et donc, en tenant compte de l'expression de  $\gamma_0$ , il faut que  $\gamma_0$  tende vers l'infini :

*Un conducteur parfait est un conducteur dont la conductivité  $\gamma_0$  est infinie.*

Notons qu'en posant  $\gamma_0$  infinie pour un conducteur parfait, on retrouve rapidement, la nullité des champs dans le conducteur, en considérant que la puissance reçue par le conducteur doit être finie :

$$\underbrace{P_v}_{\text{finie}} = \underbrace{\vec{j}}_{\infty} \cdot \underbrace{\vec{E}}_0 = \underbrace{\gamma_0}_{\infty} \underbrace{E^2}_0$$

## 1.14 Diélectrique

SVF

- ✘ En utilisant le modèle de Thomson (ou de Mosotti), établir l'expression de la pulsation propre du système noyau/électron :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

On précisera la signification des différentes grandeurs intervenant dans l'expression de  $\omega_0$

- ✘ Établir l'expression de la permittivité relative complexe d'un DLHI idéal :

$$\underline{\epsilon_r} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}}$$

- ✘ Dans le cas d'un DLHI idéal dilué, établir l'expression de l'indice de réfraction du diélectrique et de l'indice d'extinction du diélectrique.
- ✘ Établir la loi de Cauchy, vérifiée par un diélectrique en dehors des zones d'extinction.
- ✘ Démontrer la loi de Beer-Lambert.
- ✘ Démontrer la loi de Gladstone.
- ✘ Expliquer la couleur bleue du ciel et la couleur du couchant en utilisant la formule de Larmor, donnant la puissance rayonnée par une charge  $q$  accélérée :

$$\mathcal{P}_{ray} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

où  $a$  est l'accélération de la particule.

### ✘ Modèle de Thomson

- ☛ Dans ce modèle on considère que l'atome est constitué d'une charge positive  $Ze$  (noyau) répartie uniformément dans une sphère de rayon  $R$ , de centre  $P$  (barycentre des charge positives) et d'électrons (de masse  $m$ , de charge  $-e$ ) se déplaçant librement à l'intérieur de la sphère.

- Le champ électrostatique créé par le noyau, en tout point  $M$  du noyau (repéré par ses coordonnées sphériques, de centre  $P$ ), s'obtient facilement en appliquant le théorème de Gauss :

$$\vec{E}(M) = \frac{Zer}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r$$

- La force exercée par le noyau sur un électron, en  $M$ , vaut donc :

$$\vec{F}(M) = -\frac{Ze^2 r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}$$

Ainsi, cette force est attractive : en l'absence de champ extérieur, la position d'équilibre des électrons est au centre de l'atome ( $r = 0$ ).

- En présence d'un champ extérieur  $\vec{E}$ , le PFD appliqué à l'électron donne :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} - e\vec{E}$$

Soit :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3} \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

On obtient ainsi l'équation d'un oscillateur harmonique forcé, de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

### ✗ Modèle de Mosotti

- Dans ce modèle on considère que l'atome est constitué d'un noyau ponctuel  $P$  (de charge  $Ze$ ) et est entouré par un nuage électronique sphérique, de rayon  $R$ , indéformable de centre  $N$  (barycentre des charges négatives), de charge totale  $-Ze$ .
- Le champ électrostatique créé par le nuage électronique, en tout point  $M$  du nuage (repéré par ses coordonnées sphériques, de centre  $N$ ), s'obtient facilement en appliquant le théorème de Gauss :

$$\vec{E}(M) = -\frac{Zer}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r$$

- La force exercée par le nuage électronique sur le noyau, avec  $P = M$ , vaut donc :

$$\vec{F}(P) = -\frac{Z^2 e^2 r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r = -\frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}$$

Ainsi, cette force est attractive : en l'absence de champ extérieur,  $N$  et  $P$  sont confondus.

- En présence d'un champ extérieur  $\vec{E}$ , on considère que vu son inertie, le noyau reste fixe : le nuage se translate de  $\vec{r}_N$  sans se déformer. Sachant que la force exercée par le nuage électronique vaut alors (en remplaçant  $\vec{r}$  par  $-\vec{r}_N$ ) :

$$\vec{F}(P) = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}_N$$

et en utilisant le principe des actions réciproques, le TRC appliqué au nuage électronique donne :

$$Zm \frac{d^2 \vec{r}_N}{dt^2} = -\frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}_N - Ze\vec{E}$$

Soit :

$$\frac{d^2 \vec{r}_N}{dt^2} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3} \vec{r}_N = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

On obtient ainsi l'équation d'un oscillateur harmonique forcé, de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

### ✗ Permittivité relative d'un DLHI (polarisation électronique)

#### ☛ Hypothèses

- ✓ Remarque générale : on considère un milieu matériel diélectrique idéal (pas de charges libres : que des charges liées), linéaire, homogène et isotrope : les équations de Maxwell dans ce milieu restent linéaires et la permittivité relative du milieu est un scalaire indépendant de la position du point  $M$  appartenant au milieu.
- ✓ Ce DLHI est constitué de  $n^*$  électrons liés par unité de volume (charge  $-e$ , masse  $m$ , vitesse  $\vec{v}_e$ ) qui seuls participent aux courants liés.
- ✓ En l'absence d'onde électromagnétique le conducteur est localement neutre.
- ✓ En présence de l'onde électromagnétique, on néglige la composante magnétique de la force de Lorentz devant sa composante électrique agissant sur les électrons. D'où, à l'aide de grandeurs caractéristiques :

$$\frac{F_E}{F_B} = \frac{E}{VB} = \frac{c}{V} \gg 1$$

Ainsi, pour que cette hypothèse soit valable, il faut que les électrons soient non relativistes.

- ✓ On néglige le poids agissant sur les électrons.
- ✓ On modélise les interactions d'un électron avec le milieu, ainsi que les pertes par rayonnement par une force de frottement fluide :

$$\vec{F}_D = -\lambda \vec{v}_e = -\frac{m}{\tau} \vec{v}_e$$

- ✓ En utilisant le modèle de Thomson (ou de Mosotti), on modélise la liaison d'un électron avec l'édifice atomique par une force de rappel élastique de la forme :

$$\vec{F}_{el} = -k \vec{r}_e = -m\omega_0^2 \vec{r}_e$$

où  $\vec{r}$  est l'écart de la position de l'électron par rapport à sa position en l'absence de champ et où :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

- ✓ On considère que le champ électrique est localement uniforme : on considère que la longueur d'onde est très grande devant la dimension caractéristique du mouvement d'un électron :

$$\lambda \gg a \Rightarrow \frac{\lambda}{T} \gg \frac{a}{T} \Rightarrow c \gg V$$

Cette hypothèse est valable si les charges sont non relativistes.

Ainsi, quand on applique le PFD à un électron, le champ électrique apparaît comme une fonction du temps uniquement (champ localement uniforme) :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\omega t)$$

- ✓ Dans le cadre du modèle utilisé (équivalent du modèle de Drude), la vitesse  $\vec{v}$  (vitesse moyenne d'un électron) est la solution de l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{v}_e$  en **régime forcé**, notamment en régime sinusoïdal forcé, c'est la vitesse  $\vec{v} = \langle \vec{v}_e \rangle$  qui doit être utilisée. De même, le vecteur position  $\vec{r}$ , sera la solution en régime forcé.
- ✓ Dans le cadre du programme de PC, on s'intéresse à la propagation des ondes transverses (OPPM) dans le DLHI : la densité volumique de charge reste nulle au passage de l'onde électromagnétique.

#### ☛ Première méthode : moment dipolaire induit et polarisation

- ✓ Le PDF appliqué à un électron lié donne :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - \lambda \frac{d\vec{r}}{dt} - e\vec{E}$$

- ✓ Soit en complexe<sup>3</sup> :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

D'où :

$$\vec{r} = \frac{\left(\frac{-e}{m}\right) \vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$$

- ✓ Le moment dipolaire induit par le déplacement  $\vec{r}$  vaut alors<sup>4</sup> :

$$\vec{p} = e(-\vec{r}) = \frac{\left(\frac{e^2}{m}\right) \vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$$

- ✓ La polarisation électronique induite, en supposant un mélange uniforme de porteurs vaut alors<sup>5</sup> :

$$\vec{P} = n^* \vec{p} = \frac{\left(\frac{n^* e^2}{m}\right) \vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}$$

- ✓ On en déduit l'expression de la susceptibilité électrique du milieu sachant que  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$  :

$$\chi_e = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$$

- ✓ On en déduit la permittivité relative du milieu sachant que  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$  :

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$$

#### ☛ Deuxième méthode : expression des courants liés

3. Autorisé ici car équation différentielle linéaire

4. On rappelle :  $\vec{p} = q\vec{N}\vec{P}$

5. On rappelle :  $\vec{p} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} \Rightarrow \vec{p} = \iiint \vec{P} d\tau = \vec{P}V = \vec{P}/n^*$



- ✓ Le PDF appliqué à un électron lié donne :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - \lambda \frac{d\vec{r}}{dt} - e\vec{E}$$

- ✓ Soit en complexe<sup>6</sup> :

$$\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\underline{r}}{dt} + \omega_0^2 \underline{r} = -\frac{e}{m} \underline{E}$$

D'où :

$$\underline{r} = \frac{\left(\frac{-e}{m}\right) \underline{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$$

Et donc :

$$\underline{v} = \frac{\left(\frac{-e}{m} j\omega\right) \underline{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$$

- ✓ Le vecteur densité de courants liés dans le DLHI s'écrit donc :

$$\vec{j}_l(M, t) = (-en^*) \vec{v} = \frac{\left(\frac{n^* e^2}{m} j\omega\right) \underline{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0 j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} \underline{E}$$

- ✓ Le vecteur densité de courant étant uniquement dû aux courants liés, l'équation de Maxwell - Ampère s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0 j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} \underline{E} + \mu_0 \varepsilon_0 j\omega \underline{E}$$

Soit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \left( \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} + 1 \right) j\omega \underline{E}$$

- ✓ Sachant que la permittivité relative du milieu vérifie :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r j\omega \underline{E}$$

On en déduit :

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$$

### ✗ Loi de Cauchy (dispersion)

- ☛ L'indice est défini à partir de la permittivité relative :

$$\underline{n} = (\varepsilon_r)^{1/2} = \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} \right)^{1/2}$$

6. Autorisé ici car équation différentielle linéaire

- On se place en dehors de zones d'absorption : le terme complexe dans l'expression de  $\underline{n}$  ( ou de  $\underline{\varepsilon}_r$ ) est alors négligeable :

$$\underline{n} = n = \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^{1/2}$$

- On se place dans le cas d'un diélectrique dilué : le deuxième terme dans l'expression de  $\underline{n}$  ( ou de  $\underline{\varepsilon}_r$ ) est petit devant 1, en effectuant un DL1, on obtient :

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Sachant que l'on travaille dans le visible et que  $\omega_0$  appartient aux UV, on considère que  $\omega_0 \gg \omega$  et on effectue à nouveau un DL1 en  $(\omega/\omega_0)^2$  :

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^{-1} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

- Soit, avec les longueurs d'onde associées :

$$n = \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda_0^2}{\lambda_p^2} \right) + \left( \frac{\lambda_0^4}{2\lambda_p^2} \right) \frac{1}{\lambda^2}$$

on obtient bien une formule donnant la loi de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

### ✗ Couleur bleue du ciel (diffusion Rayleigh)

- On considère une OPPMR, modélisant le rayonnement solaire, de pulsation  $\omega^7$ , arrivant à la limite extérieure de l'atmosphère. L'atmosphère est assimilée comme un DLHI, dilué et on considère que la pulsation  $\omega$  est en dehors des zones d'absorption. On considère enfin que la pulsation  $\omega$  (correspondant au visible) est très inférieure devant  $\omega_0^8$  (qui appartient aux UV). A l'ordre 0, l'indice de l'atmosphère s'écrit donc :

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = cste$$

- On introduit l'axe ( $Oz$ ) correspondant à la verticale descendante et à la direction de propagation de l'OPPM étudiée (l'origine correspondant à la limite supérieure de l'atmosphère). Les électrons liés, accélérés par le champ électrique rayonnent une onde électromagnétique avec une puissance donnée par la formule de Larmor : le champ électrique de l'onde diminue donc au cours de la propagation.

$$\vec{E} = \underline{E}_0(z) \exp j(\omega t - nkz) \vec{e}_x$$

avec  $k = \omega/c$  et  $|\underline{E}_0(z)|$  fonction décroissante de  $z$ .

- L'intensité lumineuse correspondante vaut donc :

$$I(z) = \text{Re} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0} \right) = \frac{n|\underline{E}_0(z)|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$$

7. En réalité on a une superposition d'OPPM de fréquences variant de manière continue

8. Cette bande d'absorption, la plus proche du visible, est celle du dioxygène de l'air

- Un bilan énergétique sur une mésotranche, de section  $S$ , comprise entre  $z$  et  $z + dz$ , en régime stationnaire, permet d'écrire :

$$0 = I(z)S - I(z + dz)S - dP$$

où  $dP$  est la puissance moyenne rayonnée par tous les électrons du volume  $d\tau = Sdz$  :

$$dP = n^* S dz \langle \mathcal{P}_{ray} \rangle$$

D'où :

$$\frac{dI}{dz} = -n^* \langle \mathcal{P}_{ray} \rangle$$

- L'accélération d'un électron lié, se détermine en appliquant le PFD à l'électron :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - \lambda \frac{d\vec{r}}{dt} - e\vec{E}$$

Soit en complexe<sup>9</sup> :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

D'où :

$$\vec{r} = \frac{\left(\frac{-e}{m}\right) \vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$$

Et donc :

$$\vec{a} = \frac{\left(\frac{e}{m}\omega^2\right) \vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$$

Soit, en tenant compte des hypothèses de départ :

$$\vec{a} = \frac{e\omega^2}{m\omega_0^2} \vec{E}$$

La puissance moyenne rayonnée s'écrit alors :

$$\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = \frac{\mu_0 e^2 \langle a^2 \rangle}{6\pi c} = \frac{\mu_0 e^2}{12\pi c} \vec{a} \vec{a}^* = \frac{\mu_0 e^4 \omega^4}{12\pi c m^2 \omega_0^4} |\underline{E}_0(z)|^2$$

Soit, en fonction de  $I(z)$  :

$$\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = \frac{\mu_0^2 e^4 \omega^4}{6\pi n m^2 \omega_0^4} I(z)$$

- On en déduit l'équation différentielle vérifiée par  $I$  :

$$\frac{dI}{dz} = -n^* \langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = -\frac{\mu_0^2 e^4 n^* \omega^4}{6\pi n m^2 \omega_0^4} I(z)$$

Soit :

$$\frac{dI}{dz} + \frac{I}{H} = 0$$

Avec  $H$  distance caractéristique d'atténuation :

$$H = \frac{6\pi n m^2 \omega_0^4}{\mu_0^2 e^4 n^* \omega^4} \propto \frac{1}{\omega^4}$$

9. Autorisé ici car équation différentielle linéaire

- ☛ L'intégration de cette équation différentielle met en évidence une décroissance exponentielle de l'intensité

$$I(z) = I(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

Ainsi, à cause du rayonnement, l'onde électromagnétique diminue en amplitude (et en intensité). Plus la distance  $H$  est petite, plus cette atténuation est rapide. Sachant que  $H \propto 1/\omega^4$ , on en déduit que, dans le spectre du visible, à distance parcourue égale, les couleurs bleues/violettes sont celles qui seront le plus diffusées :

$$\frac{H_B}{H_R} = \left(\frac{\omega_R}{\omega_V}\right)^4 \approx 16$$

Le spectre du rayonnement solaire sera lui enrichi en rouge. Ainsi, en arrivant sur le sol, le rayonnement solaire a perdu 16 fois plus de violet/bleu que de rouge.

### ☛ Applications

- ✓ La couleur bleue du ciel (partie de l'atmosphère non éclairée directement par le soleil) est ainsi due au rayonnement des électrons liés aux molécules de l'atmosphère lorsque celles-ci sont excitées par le rayonnement solaire. En effet, on vient de démontrer que ce rayonnement se fait essentiellement dans le bleu.
- ✓ Quand le soleil est au zénith, il apparaît jaunâtre et non blanc : l'épaisseur de l'atmosphère est minimale dans ce cas là et le rayonnement solaire a perdu peu de rouge (et encore moins de bleu).
- ✓ Quand le soleil se couche, il apparaît rouge : l'épaisseur de l'atmosphère est celle fois maximale et le rayonnement solaire a alors perdu l'essentiel de son spectre « bleu/violet ».
- ✓ La diffusion Rayleigh est le mécanisme prépondérant dans l'atmosphère tant que la taille des centres diffuseurs est petite devant la longueur d'onde du rayonnement. Si les centres diffuseurs deviennent plus grands, alors le mécanisme prépondérant devient la diffusion Mie pour laquelle, dans le domaine du visible, la puissance diffusée est quasi-indépendante de la longueur d'onde : le rayonnement diffusé est donc blanc (lait, pollution atmosphérique...)

### ✗ Loi de Beer-Lambert (absorption)

- ☛ On considère une OPPMR, de pulsation  $\omega$ , se propageant suivant  $(Oz)$ . En  $z = 0$  cette onde pénètre dans un milieu DLHI, dilué, de vecteur d'onde  $\vec{k} = (k' + jk'')\vec{e}_z$  et donc d'indice  $\underline{n} = n_r - jn_e$  contenant  $n^*$  porteurs de charges liées par unité de volume.
- ☛ En considérant que l'interaction matière/rayonnement est essentiellement due à la polarisation électronique de la matière (visible - UV), que le milieu est suffisamment dilué pour avoir  $\chi_e \ll 1$  et que dans ce domaine de fréquence, il existe une pulsation d'absorption  $\omega_0$ , alors l'indice du milieu s'écrit :

$$\underline{n} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$$

D'où :

$$\begin{cases} n_r = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \\ n_e = \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 \left(\frac{\omega}{\tau}\right)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \end{cases}$$

Avec :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0}}$$

et  $\tau$  étant le temps caractéristique lié aux interactions d'un électron avec le milieu et au rayonnement.

- Les champs électrique et magnétique à une abscisse  $z$  s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \underline{E}_0 \exp j(\omega t - n \underline{k} z) \vec{e}_x = \underline{E}_0 \exp(-n_e k z) \exp j(\omega t - n_r k z) \vec{e}_x \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{n \underline{E}_0}{c} \exp(-n_e k z) \exp j(\omega t - n_r k z) \vec{e}_x\end{aligned}$$

- L'intensité en  $z$  vaut donc :

$$I(z) = \|\operatorname{Re} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0} \right)\| = \frac{n_r |\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c} \exp(-2n_e k z)$$

Relation de la forme :

$$I(z) = I_0 \exp(-2n_e k z)$$

On en déduit l'expression de l'absorbance du milieu <sup>10</sup> :

$$A = \frac{2n_e k z}{\ln 10}$$

- Propriétés remarquables :

- ✓ L'absorbance est proportionnelle à la longueur de matière traversée ( $z$ )
- ✓ L'absorbance est proportionnelle à l'indice d'extinction  $n_e$  et donc à la pulsation de plasma (au carrée) du milieu et donc à la densité d'éléments absorbants (électrons liés) et donc enfin à la concentration de l'élément absorbant.

### ✗ Loi de Gladstone

- On considère une OPPMR, de pulsation  $\omega$ , se propageant suivant  $(Oz)$ . En  $z = 0$  cette onde pénètre dans un milieu DLHI, dilué, de vecteur d'onde  $\vec{k} = (k' + jk'')\vec{e}_z$  et donc d'indice  $\underline{n} = n_r - jn_e$  contenant  $n^*$  porteurs de charges liées par unité de volume.
- En considérant que l'interaction matière/rayonnement est essentiellement due à la polarisation électronique de la matière (visible), que le milieu est suffisamment dilué pour avoir  $\chi_e \ll 1$  et que dans ce domaine de fréquence, il n'existe aucune pulsation d'absorption, alors l'indice du milieu s'écrit :

$$\underline{n} = n = n_r = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Avec :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0}}$$

et  $\tau$  étant le temps caractéristique lié aux interactions d'un électron avec le milieu et au rayonnement.

- Ainsi, la quantité  $n - 1$  est proportionnelle à la densité volumique de porteurs de charges liées :

$$n - 1 = \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m \varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} n^* \propto n^*$$

10. L'absorbance vérifie :  $A = \log(I_0/I)$

- ☛ Dans le cas où le milieu est un gaz, assimilé à un gaz parfait, on a <sup>11</sup> :

$$n^* = \frac{P}{k_B T}$$

On en déduit :

$$n - 1 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m \varepsilon_0 k_B T (\omega_0^2 - \omega^2)} P \propto P$$

## 1.15 Réflexion - transmission d'une OEM

SVF

- ✗ Établir les lois de Descartes relatives au passage d'une OEM d'un milieu d'indice  $\underline{n}_1$  vers un milieu d'indice  $\underline{n}_2$ .
- ✗ Établir les coefficients de réflexion et de transmission dans le cas d'une incidence normale.
- ✗ Étudier la réflexion et la transmission d'une OPPM(+) sur un plasma de pulsation plasma  $\omega_p$  en fonction de la valeur de  $\omega$ . On se placera dans le cas d'une incidence normale.
- ✗ Étudier la réflexion et la transmission d'une OPPM(+) sur un conducteur, de conductivité statique  $\gamma_0$  et de pulsation plasma  $\omega_p$ . On se placera dans le cas d'une incidence normale. Où se situe le cas de la réflexion métallique parfaite ?
- ✗ Déterminer la pression de radiation par deux méthodes (approche ondulatoire et approche corpusculaire) en utilisant le modèle du conducteur parfait.
- ✗ Déterminer les modes propres d'une cavité électromagnétique constituée de conducteurs parfaits.
- ✗ Dans le cas de l'interface entre deux DHLI transparents, sous incidence quelconque :
  - ☛ Démontrer l'expression de l'incidence de Brewster.
  - ☛ Retrouver le phénomène de réflexion totale et démontrer l'expression de la distance caractéristique d'atténuation.

### ✗ Lois de Descartes

- ☛ Les rayons lumineux réfléchis et transmis appartiennent au plan d'incidence

- ✓ On considère une surface ( $\Sigma$ ) séparant deux milieux matériels, linéaires, non magnétiques et d'indices  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_2$  sur laquelle arrive une OPPM de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_i = \underline{n}_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_i$ . Cette onde se sépare en une onde transmise (OPPM de pulsation  $\omega_t$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_t = \underline{n}_2 \frac{\omega_t}{c} \vec{u}_t$ ) et une onde réfléchie (OPPM de pulsation  $\omega_r$  et vecteur d'onde  $\vec{k}_r = \underline{n}_1 \frac{\omega_r}{c} \vec{u}_r$ ).
- ✓ Soit un point  $P$  (point d'incidence) appartenant au plan ( $\mathcal{P}$ ) repéré dans ce plan par  $\vec{r}_P = \vec{OP}$ , l'origine  $O$  appartenant au plan ( $\mathcal{P}$ ) comme représenté figure 20. Le plan d'incidence ( $\Pi$ ) est le plan ( $P, \vec{k}_i, \vec{n}_{12}$ ).

11. En considérant que le nombre de porteurs de charges par unité de volume est égal au nombre d'atomes (ou de molécules) par unité de volume, à défaut, introduire un coefficient multiplicatif.

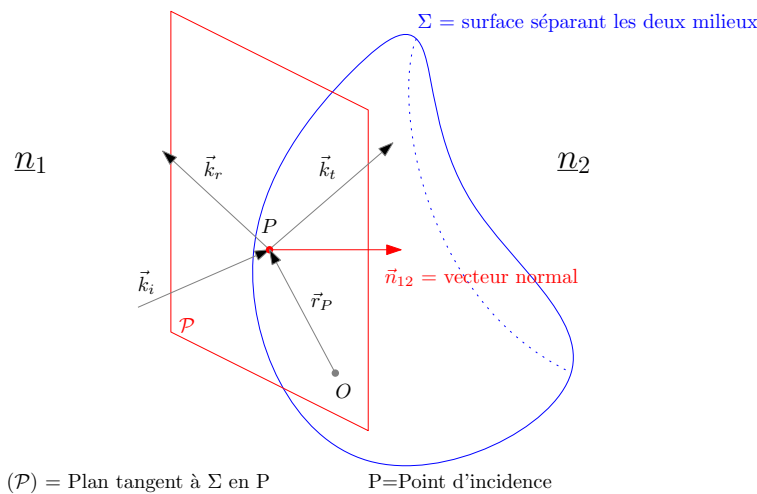
✓ Les équations de Maxwell dans les deux milieux sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Maxwell Gauss} & \text{div} \vec{E} = \frac{\rho_l}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \text{Maxwell Thomson} & \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{Maxwell Faraday} & \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{Maxwell Ampère} & \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_l + \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Dans un modèle volumique et en l'absence de charges et de courant libres surfaciques, les relations de passage donnent alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Maxwell Gauss} \Rightarrow & (\varepsilon_{r2} \vec{E}_2 - \varepsilon_{r1} \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \\ \text{Maxwell Thomson} \Rightarrow & (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \\ \text{Maxwell Faraday} \Rightarrow & (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n}_{12} = 0 \\ \text{Maxwell Ampère} \Rightarrow & (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \wedge \vec{n}_{12} = 0 \end{array} \right.$$

On a donc, en  $P$ , continuité du champ  $\vec{B}$  et continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$ .



**Figure 20**

✓ Les champs électriques incident, réfléchi et transmis en  $P$  de l'espace s'écrivent donc :

$$\vec{E}_i(P, t) = \vec{E}_0 \exp j (\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_P)$$

$$\vec{E}_r(P, t) = \vec{E}_{0r} \exp j (\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}_P)$$

$$\vec{E}_t(P, t) = \vec{E}_{0t} \exp j (\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}_P)$$

✓ La continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  permet d'écrire :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_i(P, t) + \vec{E}_r(P, t)) = \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_t(P, t)$$

Soit :

$$\vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_P) + \vec{n}_{12} \vec{E}_{0r} \exp j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}_P) = \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_{0t} \exp j(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}_P) \quad (16)$$

Et donc :

$$\vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_0 \exp j(-\vec{k}_i \cdot \vec{r}_P) + \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_{0r} \exp j((\omega_r - \omega) t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}_P) = \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_{0t} \exp j((\omega_t - \omega) t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}_P)$$

On obtient donc, en  $P$  fixé, quelque soit la valeur du temps  $t$ , une expression de la forme :

$$\vec{A} + \vec{B} \exp j((\omega_r - \omega) t) = \vec{C} \exp j((\omega_t - \omega) t)$$

Ceci étant vrai quelque soit  $t$ , on a :

$$\omega = \omega_r = \omega_t$$

✓ L'équation 16 s'écrit donc :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_0 \exp j(-\vec{k}_i \cdot \vec{r}_P) + \vec{E}_{0r} \exp j(-\vec{k}_r \cdot \vec{r}_P)) = \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_{0t} \exp j(-\vec{k}_t \cdot \vec{r}_P) \quad (17)$$

Soit :

$$\vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_0 + \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_{0r} \exp j((\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_P) = \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_{0t} \exp j((\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r}_P)$$

On obtient donc, quelque soit la position du point  $P$  dans le plan  $\mathcal{P}$ , une expression de la forme :

$$\vec{A} + \vec{B} \exp j((\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_P) = \vec{C} \exp j((\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r}_P)$$

Ceci étant vrai quelque soit  $P$  (et donc  $\vec{r}_P$ ), on a :

$$\begin{cases} (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_P = 0 \\ (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r}_P = 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \perp \vec{r}_P \Rightarrow (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \parallel \vec{n}_{12} \\ (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \perp \vec{r}_P \Rightarrow (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \parallel \vec{n}_{12} \end{cases}$$

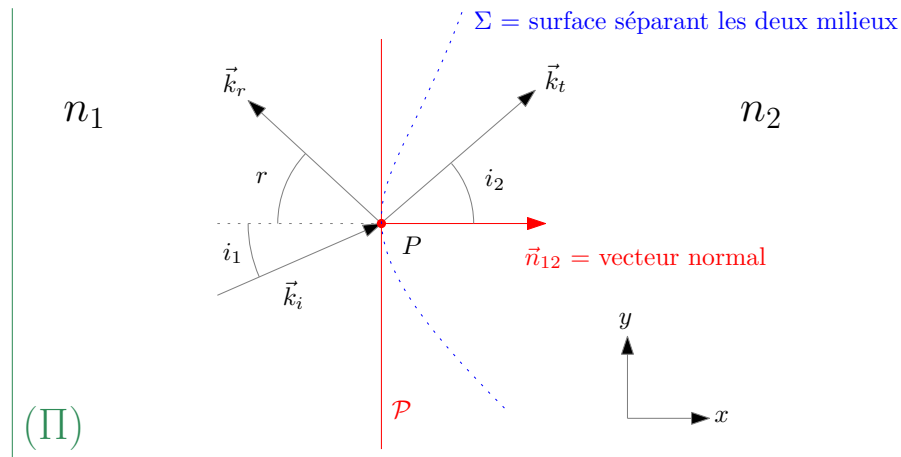
$\vec{k}_i$  et  $\vec{n}_{12}$  appartenant tous les deux au plan d'incidence  $(\Pi)$ , on en déduit que  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_t$  également.

#### • Lois sur les angles

- ✓ On se place dans le plan d'incidence comme représenté figure 30
- ✓ On a donc :

$$\begin{cases} \vec{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} (\cos i_1 \vec{e}_x + \sin i_1 \vec{e}_y) \\ \vec{k}_r = n_1 \frac{-\omega}{c} (\cos r \vec{e}_x + \sin r \vec{e}_y) \\ \vec{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} (\cos i_2 \vec{e}_x + \sin i_2 \vec{e}_y) \end{cases}$$





( $\mathcal{P}$ ) = Plan tangent à  $\Sigma$  en  $P$   $P$ =Point d'incidence ( $\Pi$ ) = plan d'incidence  
- Les angles sont non orientés et compris entre 0 et  $\pi/2$  -

**Figure 21** – Réflexion et transmission dans le plan d'incidence

✓ L'équation 18 donne alors (en notant  $(x, y)$  les coordonnées de  $P$ ) :

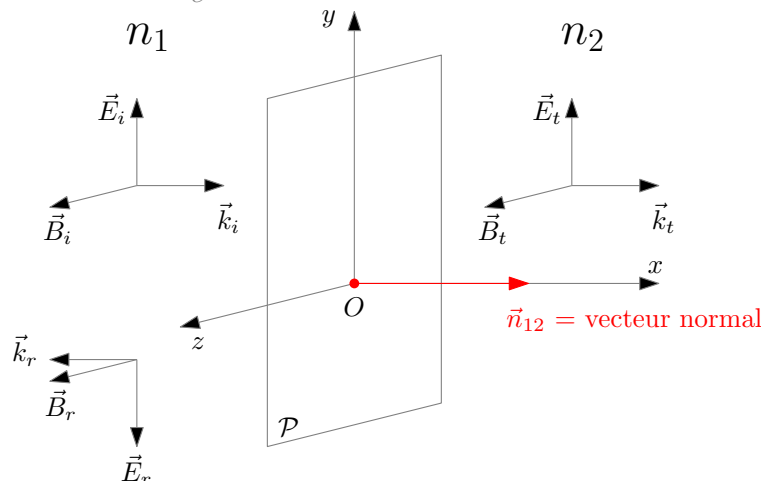
$$\begin{cases} (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_P = 0 \Rightarrow n_1 \frac{\omega}{c} (\sin r - \sin i_1) y = 0 \\ (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r}_P = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c} (n_2 \sin i_2 - n_1 \sin i_1) y = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Ceci étant vrai quelque soit la position de  $P$  dans le plan ( $\mathcal{P}$ ) (et donc quelque soit a valeur de  $y$ ), on obtient donc bien les lois de Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction

$$\begin{cases} r = i_1 \\ n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1 \end{cases} \quad (20)$$

### ✗ Coefficients de réflexion et transmission (sous incidence normale) en amplitude

☛ On considère une surface ( $\Sigma$ ) séparant deux milieux matériels, linéaires, non magnétiques et d'indices  $n_1$  et  $n_2$  sur laquelle arrive, **sous incidence normale**, une OPPM de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$ . Cette onde se sépare en une onde transmise (OPPM de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$ ) et une onde réfléchie (OPPM de pulsation  $\omega$  et vecteur d'onde  $\vec{k}_r = -n_1 \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$ ), comme représenté figure22.



**Figure 22**

- Les champs électriques et magnétiques de ces ondes, en un point  $M(x, y, z)$  de l'espace, s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{E}_i(M, t) = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - n_1 kx) \\ \vec{E}_r(M, t) = \vec{E}_{0r} \exp j(\omega t + n_1 kx) \\ \vec{E}_t(M, t) = \vec{E}_{0t} \exp j(\omega t - n_2 kx) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B}_i(M, t) = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i(M, t)}{\omega} = \frac{n_1}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) \exp j(\omega t - n_1 kx) \\ \vec{B}_r(M, t) = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r(M, t)}{\omega} = -\frac{n_1}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_{0r}) \exp j(\omega t + n_1 kx) \\ \vec{B}_t(M, t) = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t(M, t)}{\omega} = \frac{n_2}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_{0t}) \exp j(\omega t - n_2 kx) \end{cases}$$

Avec :  $k = \omega/c$ .

- Les équations de Maxwell dans les deux milieux sont de la forme :

$$\begin{cases} \text{Maxwell Gauss} & \text{div} \vec{E} = \frac{\rho_l}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \text{Maxwell Thomson} & \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{Maxwell Faraday} & \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{Maxwell Ampère} & \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_l + \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Dans un modèle volumique et en l'absence de charges et de courant libres surfaciques, les relations de passage donnent alors :

$$\begin{cases} \text{Maxwell Gauss} \Rightarrow (\varepsilon_{r2} \vec{E}_2 - \varepsilon_{r1} \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \\ \text{Maxwell Thomson} \Rightarrow (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \\ \text{Maxwell Faraday} \Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n}_{12} = 0 \\ \text{Maxwell Ampère} \Rightarrow (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \wedge \vec{n}_{12} = 0 \end{cases}$$

On a donc, en un point  $P$  de la surface  $\Sigma$  (repéré par le vecteur  $\vec{r}_P = \vec{OP} = y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ ), continuité du champ  $\vec{B}$  et continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$ .

- Les champs électriques et magnétiques incident, réfléchi et transmis en  $P$  de l'espace s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \vec{E}_i(P, t) = \vec{E}_0 \exp j(\omega t) \\ \vec{E}_r(P, t) = \vec{E}_{0r} \exp j(\omega t) \\ \vec{E}_t(P, t) = \vec{E}_{0t} \exp j(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B}_i(P, t) = \frac{n_1}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) \exp j(\omega t) \\ \vec{B}_r(P, t) = -\frac{n_1}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_{0r}) \exp j(\omega t) \\ \vec{B}_t(P, t) = \frac{n_2}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_{0t}) \exp j(\omega t) \end{cases}$$

- La continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  permet d'écrire :

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t} \quad (21)$$

• La continuité de  $\vec{B}$  permet d'écrire :

$$\frac{n_1}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) - \frac{n_1}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_{0r}) = \frac{n_2}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_{0t}) \quad (22)$$

Soit, en prenant le produit vectoriel de l'équation 22 avec  $\vec{e}_x$  (et sachant que les champs électriques sont transverses) :

$$n_1 \vec{E}_0 - n_1 \vec{E}_{0r} = n_2 \vec{E}_{0t} \quad (23)$$

• En combinant les équations 21 et 23, on obtient facilement :

$$\vec{E}_{0r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \vec{E}_0 = r \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_{0t} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \vec{E}_0 = t \vec{E}_0$$

• Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude (en  $x = 0$ ) valent donc :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

### ✗ Coefficients de réflexion et transmission (sous incidence normale) en puissance

• **Vecteur de Poynting moyen :**

Soit une OPPM, se propageant suivant  $(Ox)$ , dans un milieu linéaire, non magnétique, d'indice  $\underline{n} = n' + jn''$  et dont les champs en tout point  $M(x, y, z)$  de l'espace s'écrivent :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \underline{n}kx)$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(M, t)}{\omega} = \frac{n}{c} (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) \exp j(\omega t - \underline{n}kx)$$

Alors le vecteur de Poynting moyen s'écrit :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \text{Re} (\vec{\Pi})$$

Avec :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0} = \frac{n|\vec{E}_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

D'où :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{n'|\vec{E}_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

• **Vecteurs de Poynting incident, réfléchis et transmis :**

Dans le cas de la situation donnée par la figure 22, les vecteurs de Poynting associés aux OPPM incidente, réfléchie et transmise sont respectivement :

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^*}{2\mu_0} = \frac{n_1|\vec{E}_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{n_1|\vec{E}_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

$$\vec{\Pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r^*}{2\mu_0} = -\frac{n_1|r|^2|\vec{E}_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{n_1|r|^2|\vec{E}_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

$$\vec{\Pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t^*}{2\mu_0} = \frac{n_2|t|^2|\vec{E}_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{n_2|t|^2|\vec{E}_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

☛ **Coefficients de réflexion et de transmission en puissance**

Par définition, ces coefficients valent :

$$R = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|} \Big|_{x=0} = |r|^2 = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2$$

$$T = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|} \Big|_{x=0} = \frac{n'_2}{n'_1} |t|^2 = \frac{n'_2}{n'_1} \left| \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right|^2$$

On vérifie aisément que :

$$R + T = 1$$

☛ **Deux cas particuliers importants :**

- ✓ Cas où les indices des milieux sont identiques :

$$\underline{n}_1 = \underline{n}_2 \Rightarrow \underline{r} = 0; \underline{t} = 1; R = 0; T = 1$$

- ✓ Cas où une OEM se propage dans le vide ( $\underline{n}_1 = 1$ ) et s'évanouit dans un milieu matériel ( $\underline{n}_2 = -jn_e$ ) :

$$\underline{r} = \frac{1 - jn_e}{1 + jn_e}; \underline{t} = \frac{2}{1 + jn_e}; R = 1; T = 0$$

✗ **Réflexion et transmission dans le cas d'un plasma**

- ☛ On étudie la réflexion et la transmission d'une OPPM (se propageant suivant ( $Ox$ )) sur une interface vide/plasma, le plasma ayant une pulsation de plasma  $\omega_p$  et donc un vecteur d'onde et un indice complexe vérifiant :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

- ☛ **Cas où  $\omega > \omega_p$  :**

- ✓  $\underline{k}$  est réel, on a propagation sans absorption avec dispersion :

$$\underline{k} = k = k' = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

$$\underline{n} = n = n_r = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

- ✓ Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude valent :

$$\underline{r} = \frac{1 - n_r}{1 + n_r} > 0 \Rightarrow R = \left( \frac{1 - n_r}{1 + n_r} \right)^2 < 1$$

$$\underline{t} = \frac{2}{1 + n_r} > 0 \Rightarrow T = \frac{4n_r}{(1 + n_r)^2} < 1$$

Ainsi, dans ce cas là, il y a réflexion partielle de l'OEM à l'interface, sans déphasage.

- ✓ Les lois de Descartes sont valables à l'interface vide/plasma et sachant que  $n_r < 1$ , le rayon lumineux s'éloigne de la normale au dioptre.

$$r = i_1$$

$$\sin i_2 = \frac{1}{n_r} \sin i_1 > \sin i_1$$

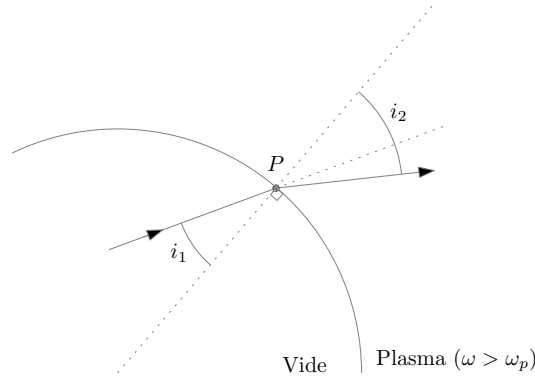


Figure 23 – Réfraction à l'interface vide/plasma

- ✓ Cas particulier : lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $k$  tend vers  $\omega/c$ , l'indice tend vers 1 et  $r$  tend vers 0 : l'OEM est totalement transmise, le plasma est parfaitement transparent et non dispersif, il se comporte comme le vide.
- ☛ Cas où  $\omega < \omega_p$  :
  - ✓  $\underline{k}$  est imaginaire pur, il n'y a pas propagation, on a une onde évanescente :

$$\underline{k} = jk'' = -j \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$$

$$\underline{n} = -jn_e = -j \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

- ✓ Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude valent :

$$\underline{r} = \frac{1 + jn_e}{1 - jn_e} \Rightarrow R = 1$$

$$\underline{t} = \frac{2}{1 - jn_e} > 0 \Rightarrow T = 0$$

Ainsi, dans ce cas là, il y a réflexion totale de l'OEM à l'interface, avec un déphasage :

$$\phi_r = \arg(\underline{r}) = 2 \arctan(n_e)$$

- ✓ Cas particulier : Pour  $\omega \ll \omega_p$ , l'indice  $n_e$  tend vers l'infini et donc  $\underline{r}$  tend vers -1 : on observe un déphasage de  $\pi$  à la réflexion.

### ✗ Réflexion et transmission dans le cas d'un conducteur

- ☛ On étudie la réflexion et la transmission d'une OPPM (se propageant suivant  $(Ox)$ ) sur une interface vide/conducteur, le conducteur ayant une pulsation de plasma  $\omega_p$ , un temps de réponse  $\tau$  et donc un vecteur d'onde et un indice complexe vérifiant :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$$

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} \right) = 1 + \frac{\gamma_0}{j\omega\epsilon_0(1 + j\omega\tau)}$$

☛ **Cas où  $\omega \gg 1/\tau$**  : le conducteur se comporte comme un plasma de pulsation  $\omega_p$ .

✓ Cas où  $\omega > \omega_p$  :

✎  $\underline{k}$  est réel, on a propagation sans absorption avec dispersion :

$$\underline{k} = k = k' = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

$$\underline{n} = n = n_r = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

✎ Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude valent :

$$\underline{r} = \frac{1 - n_r}{1 + n_r} > 0 \Rightarrow R = \left(\frac{1 - n_r}{1 + n_r}\right)^2 < 1$$

$$\underline{t} = \frac{2}{1 + n_r} > 0 \Rightarrow T = \frac{4n_r}{(1 + n_r)^2} < 1$$

Ainsi, dans ce cas là, il y a réflexion partielle de l'OEM à l'interface, sans déphasage.

✎ Cas particulier : lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $k$  tend vers  $\omega/c$ , l'indice tend vers 1 et  $\underline{r}$  tend vers 0 : l'OEM est totalement transmise, le conducteur est parfaitement transparent et non dispersif, il se comporte comme le vide.

✓ **Cas où  $1/\tau < \omega < \omega_p$**  :

✎  $\underline{k}$  est imaginaire pur, il n'y a pas propagation, on a une onde évanescente :

$$\underline{k} = jk'' = -j \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$$

$$\underline{n} = -jn_e = -j \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

✎ Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude valent :

$$\underline{r} = \frac{1 + jn_e}{1 - jn_e} \Rightarrow R = 1$$

$$\underline{t} = \frac{2}{1 - jn_e} > 0 \Rightarrow T = 0$$

Ainsi, dans ce cas là, il y a réflexion totale de l'OEM à l'interface, avec un déphasage :

$$\phi_r = \arg(\underline{r}) = 2 \arctan(n_e)$$

✎ Cas particulier correspondant à la **réflexion métallique parfaite** :

Pour  $1/\tau \ll \omega \ll \omega_p$ , l'indice  $n_e$  est très supérieur à 1 et donc  $\underline{r}$  tend vers -1 : on observe un déphasage de  $\pi$  à la réflexion, c'est la réflexion métallique parfaite.

Pour les métaux classiques<sup>12</sup>, cette plage de fréquence correspond à peu près au domaine du visible, d'où l'importance de ce cas particulier.

L'onde résultante en un point  $M$  du vide est alors une onde stationnaire :

$$\vec{E}_i(M, t) = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - kx)$$

12. En effet  $\tau \approx 10^{-14}$  s et  $\omega_p \approx 10^{16}$  rad.s<sup>-1</sup> et donc  $\omega$  doit être de l'ordre de  $10^{15}$  rad.s<sup>-1</sup>

$$\begin{aligned}\vec{E}_r(M, t) &= \vec{E}_{0r} \exp j(\omega t + kx) = -\vec{E}_0 \exp j(\omega t + kx) \\ \vec{E}(M, t) &= \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) = -2j\vec{E}_0 \sin(kx) \exp j(\omega t)\end{aligned}$$

Soit, en prenant une onde polarisée rectilignement suivant ( $Oy$ ) :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M, t) &= 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \stackrel{13}{\Rightarrow} \vec{B} = 2\frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{e}_z\end{aligned}$$

☛ **Cas où  $\omega \ll 1/\tau$  : effet de peau**

✓ Le vecteur d'onde et l'indice valent respectivement :

$$\begin{aligned}\underline{k} &= \sqrt{\frac{\gamma_0 \mu_0 \omega}{2}} (1 - j) = \frac{1 - j}{\delta} \\ \underline{n} &= \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\varepsilon_0 \omega}} (1 - j)\end{aligned}$$

On a donc :

$$n_r = n_e = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\varepsilon_0 \omega}}$$

✓ On en déduit :

$$\begin{aligned}\underline{r} &= \frac{(1 - n_r) + jn_r}{(1 + n_r) - jn_r} \Rightarrow R = \frac{(1 - n_r)^2 + n_r^2}{(1 + n_r)^2 + n_r^2} < 1 \\ \underline{t} &= \frac{2}{(1 + n_r) - jn_r} \Rightarrow T = \frac{4n_r}{(1 + n_r)^2 + n_r^2} < 1\end{aligned}$$

✗ **Modes propres d'une cavité électromagnétique (1D)**

☛ On considère une cavité électromagnétique à 1D, constituée de deux miroirs plans (conducteurs parfaits) distants de  $L$ , comme représenté figure 24



**Figure 24** – Cavité électromagnétique 1D

☛ Dans la cavité, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert (vide sans charges) :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

☛ On cherche les solutions (1D) sous la forme d'onde stationnaires polarisées rectilignement :

$$\vec{E}(M, t) = E(x, t) \vec{e}_y = f(x)g(t) \vec{e}_y$$

On obtient donc :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} g(t) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 g}{dt^2} f(x)$$

13. Interdiction d'utiliser la relation de structure

Soit :

$$\frac{\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\left(\frac{d^2 g}{dt^2}\right)}{g(t)} = \mathcal{C}$$

Cette égalité étant vraie quelques soient  $x$  et  $t$ , ses termes sont constants.

- ☛ L'équation différentielle vérifiée par  $f$ , sachant que l'on cherche des solutions périodiques, est de la forme :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0$$

Avec :  $k^2 = -\mathcal{C} > 0$

On obtient donc :

$$f(x) = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$$

- ☛ L'équation différentielle vérifiée par  $g$  est donc de la forme :

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \omega^2 g(t) = 0$$

Avec :  $\omega = kc$  D'où :

$$g(t) = G_0 \cos(\omega t + \phi)$$

- ☛ Finalement, on obtient :

$$E(x, t) = (A \cos kx + B \sin kx) \cos(\omega t + \phi)$$

- ☛ Les conducteurs étant parfaits et le champ électrique étant tangent aux miroirs, ce champ doit s'annuler en  $x = 0^+$  et  $x = L^-$  :

$$E(0, t) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$E(L, t) = 0 \Rightarrow B \sin kL = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = n \frac{\pi c}{L}$$

Le champ électrique pour des conditions initiales quelconques s'exprime donc comme suit :

$$\vec{E}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(x, t) \vec{e}_y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \phi_n\right) \vec{e}_y$$

### ✗ Pression de radiation (approche corpusculaire)

- ☛ On introduit  $n$  la densité de photons.
- ☛ On introduit  $\Delta N$  le nombre de photons frappant la paroi  $S$ , sous un angle  $\theta$ , pendant  $\Delta t$  :

$$\Delta N = n \times S \cos \theta \times c \Delta t$$

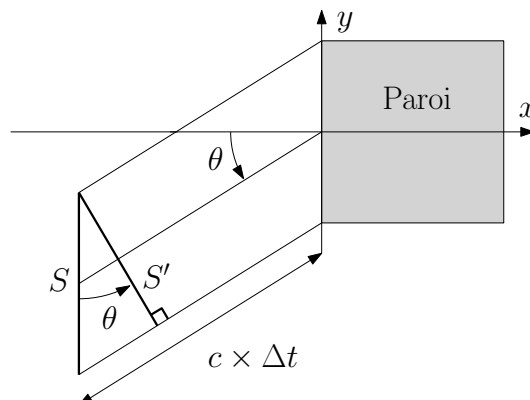


Figure 25



Notons que le volume contenant ce nombre  $\Delta N$  de photons est le volume du cylindre de génératrice de longueur  $c\Delta t$  et section droite  $S' = S \cos \theta$ .

- La variation de l'impulsion d'un photon lors du choc avec la paroi est :

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_r - \vec{p}_i = -2\hbar k \cos \theta \vec{u}_x$$

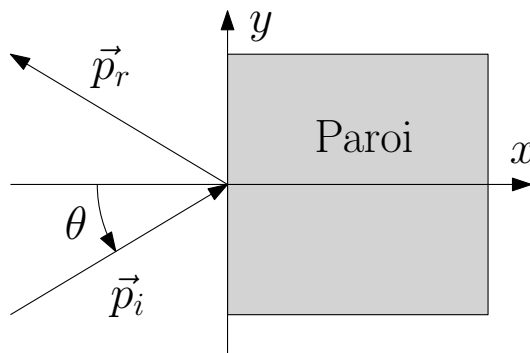


Figure 26

Notons que la norme de cette impulsion est constante et vaut :

$$p = \|\vec{p}_r\| = \|\vec{p}_i\| = \hbar k = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$$

- La force exercée sur la paroi due à la collision avec ces  $\Delta N$  photons vaut, d'après le principe des actions réciproques :

$$\vec{F} = -\vec{F}_{paroi \rightarrow \Delta N \text{ photons}} = -\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = -\Delta N \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Où  $\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$  est la variation de l'impulsion des  $\Delta N$  photons pendant  $\Delta t$ .

- On en déduit la pression :

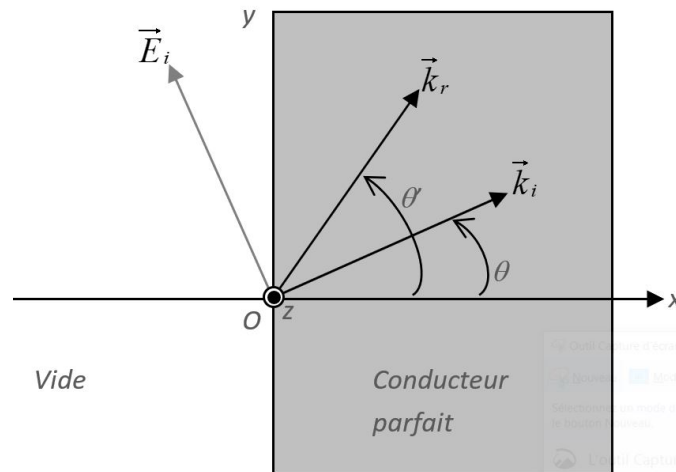
$$P = \frac{F}{S} = 2nh\nu \cos^2 \theta = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \theta$$

$$\text{Car : } nh\nu = \langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

### ✗ Pression de radiation (approche ondulatoire)

- Hypothèses (à proposer)

✓ On se place dans le cas où le champ électrique incident appartient au plan d'incidence.



**Figure 27** – Exemple de configuration pour le calcul de la pression de radiation

- ✓ Les résultats suivants sont admis :

$$\omega = \omega'$$

$$\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\| = \frac{\omega}{c}$$

(Linéarité + relation de dispersion de l'OPPM<sub>i</sub>)

$$\theta' = \pi - \theta$$

(Lois de Descartes)

$$E_0 = E'_0$$

(Réflexion métallique parfaite)

#### ✎ Écriture des ondes incidente, réfléchie et résultante

- ✓ Onde incidente :

$$\vec{k}_i = \frac{\omega}{c} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y)$$

$$\vec{E}_i = E_0 (\cos \theta \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_x) \exp(j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}))$$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_0}{c} \exp(j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}))$$

- ✓ Onde réfléchie :

$$\vec{k}_r = \frac{\omega}{c} (\cos \theta' \vec{u}_x + \sin \theta' \vec{u}_y)$$

$$\vec{E}_r = E'_0 (\cos \theta' \vec{u}_y - \sin \theta' \vec{u}_x) \exp(j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}))$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{E'_0}{c} \exp(j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}))$$

- ✓ Onde résultante :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \begin{cases} -E_0 \sin(\theta) \times 2 \cos(\cos(\theta)kx) \times \exp(j(\omega t - \sin(\theta)ky)) \\ -E_0 \cos(\theta) \times 2j \sin(\cos(\theta)kx) \times \exp(j(\omega t - \sin(\theta)ky)) \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{E_0}{c} \times 2 \cos(\cos(\theta)kx) \times \exp(j(\omega t - \sin(\theta)ky)) \end{cases}$$

☛ **Calculs des densités surfaciques**

✓ **Densité surfacique de charge**

✎ La première relation de passage s'écrit, dans le cas de l'exercice :

$$\left(\vec{E}_i + \vec{E}_r\right)_{(x=0^-,t)} \cdot (-\vec{u}_x) = \left(\vec{E}\right)_{(x=0^-,t)} \cdot (-\vec{u}_x) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}$$

✎ On en déduit :

$$\sigma(t) = 2\varepsilon_0 E_0 \sin(\theta) \times \exp(j(\omega t - \sin(\theta)ky))$$

✓ **Courants surfaciques**

✎ La deuxième relation de passage s'écrit, dans le cas de l'exercice :

$$(-\vec{u}_x) \wedge \left(\vec{B}_i + \vec{B}_r\right)_{(x=0^-,t)} = \mu_0 \vec{j}_s(t)$$

✎ On en déduit :

$$\vec{j}_s(t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \times \exp(j(\omega t - \sin(\theta)ky)) \vec{u}_y$$

☛ **Calcul des forces**<sup>14</sup>

✓ **Force électrique**

✎ On utilise l'expression donnée dans l'énoncé :

$$\vec{f}_E = \frac{1}{2} \iint \sigma(t) \vec{E}_{(x=0^-,t)} dS$$

✎ Sachant que  $\left(\vec{E}\right)_{(x=0^-,t)} = -\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$ , on obtient :

$$\vec{f}_E = -\frac{1}{2\varepsilon_0} \iint \sigma(t)^2 dS \vec{u}_x$$

✎ On en déduit la force moyennée sur le temps :

$$\langle \vec{f} \rangle_E = -\frac{1}{2\varepsilon_0} \iint \langle \sigma(t)^2 \rangle dS \vec{u}_x = -\frac{1}{2\varepsilon_0} \iint \frac{1}{2} (2\varepsilon_0 E_0 \sin(\theta))^2 dS \vec{u}_x = -\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\theta) \times S \vec{u}_x$$

✓ **Force magnétique**

✎ On utilise l'expression donnée dans l'énoncé :

$$\vec{f}_B = \frac{1}{2} \iint \vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}_{(x=0^-,t)} dS$$

✎ Sachant que  $\left(\vec{B}\right)_{(x=0^-,t)} = -\mu_0 \vec{j}_s(t) \wedge \vec{u}_x$ , on obtient :

$$\vec{f}_B = \frac{\mu_0}{2} \iint j_s(t)^2 dS \vec{u}_x$$

14. Le coefficient 1/2 dans les expressions des composantes électriques et magnétique de la force de Lorentz agissant sur une surface métallique irradiée, vient du fait que l'on ne s'intéresse qu'aux actions extérieures agissant sur cette surface. Sachant que le champ total à surface du conducteur est égal à la somme du champ incident et du champ réfléchi, on ne peut pas prendre ce champ en totalité : il faut considérer uniquement le champ incident (le champ réfléchi étant produit par la surface elle-même). Plutôt que d'écrire les champs incidents dans les expressions des forces, on préfère prendre la moitié des champs résultants, ce qui donne le même résultat

☞ On en déduit la force moyennée sur le temps :

$$\overrightarrow{\langle f \rangle}_B = \frac{\mu_0}{2} \iint \langle j_s(t)^2 \rangle dS \vec{u}_x = \frac{\mu_0}{2} \iint \frac{1}{2} \left( \frac{2E_0}{\mu_0 c} \right)^2 dS \vec{u}_x = \varepsilon_0 E_0^2 \times S \vec{u}_x$$

☛ **Pression de radiation**

✓ La force totale exercée sur la surface  $S$  de la paroi, moyennée dans le temps vaut donc :

$$\overrightarrow{\langle f \rangle} = \overrightarrow{\langle f \rangle}_B + \overrightarrow{\langle f \rangle}_E = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\theta) S \vec{u}_x$$

✓ On en déduit la pression exercée sur la paroi, appelée pression de radiation :

$$P = \frac{\|\overrightarrow{\langle f \rangle}\|}{S} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\theta)$$

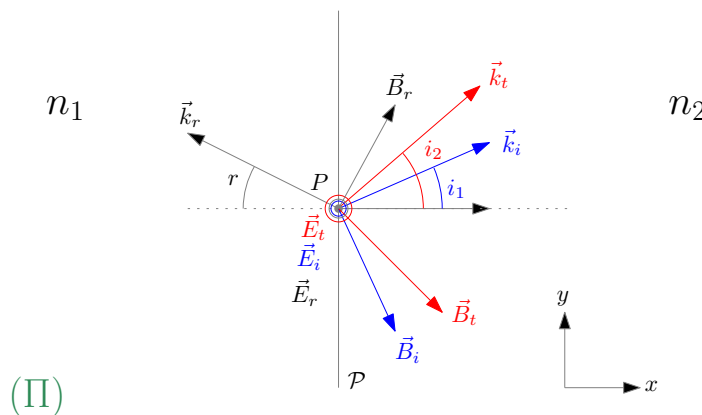
✗ **Incidence de Brewster**

☛ On considère une surface ( $\Sigma$ ) séparant deux DLHI d'indices réels  $n_1$  et  $n_2$  sur laquelle arrive une OPPM de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_i$ . Cette onde se sépare en une onde transmise (OPPM de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} \vec{u}_t$ ) et une onde réfléchie (OPPM de pulsation  $\omega$  et vecteur d'onde  $\vec{k}_r = n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_r$ ). On cherche la condition pour annuler l'onde réfléchie.

☛ On rappelle qu'à la traversée de la surface, le champ magnétique varie de manière continue alors que seule la composante tangentielle du champ électrique varie de manière continue.

☛ **Premier cas : Le champ  $\vec{E}$  est perpendiculaire au plan d'incidence**

✓ On est dans la configuration représentée figure 28



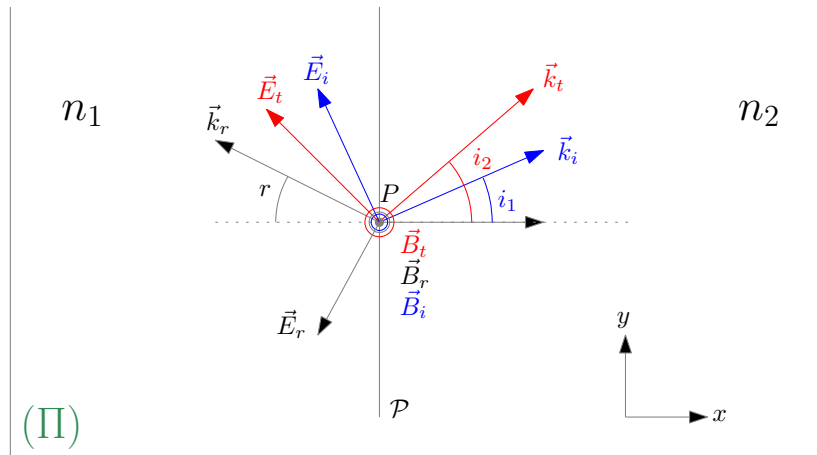
(P) = Plan tangent à  $\Sigma$  en P P=Point d'incidence (II) = plan d'incidence  
 - Les angles sont non orientés et compris entre 0 et  $\pi/2$  -

**Figure 28** – Cas où le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence

✓ On s'aperçoit qu'il est impossible d'annuler l'onde réfléchie en raison de la continuité de  $\vec{B}$ .

☛ **Deuxième cas : Le champ  $\vec{E}$  appartient au plan d'incidence**

✓ On est dans la configuration représentée figure 29



( $\mathcal{P}$ ) = Plan tangent à  $\Sigma$  en P    P=Point d'incidence    ( $\Pi$ ) = plan d'incidence  
 - Les angles sont non orientés et compris entre 0 et  $\pi/2$  -

**Figure 29** – Cas où le champ électrique appartient au plan d'incidence

- ✓ On s'aperçoit qu'il est alors possible d'annuler l'onde réfléchiée tout en respectant la continuité de  $\vec{B}$ .
- ✓ Si l'on se place dans ce cas là (incidence de Brewster :  $i_1 = i_B$ ), alors en l'absence d'onde réfléchiée, la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  s'écrit :

$$E_i(P, t) \cos i_B = E_t(P, t) \cos i_2$$

La continuité de  $\vec{B}$  s'écrivant :

$$B_i(P, t) = B_t(P, t) \Rightarrow \frac{n_1}{c} E_i(P, t) = \frac{n_2}{c} E_t(P, t)$$

En annulant le déterminant de ce système pour avoir des solutions  $(E_i, E_t)$  non triviales, on obtient :

$$n_2 \cos i_B = n_1 \cos i_2 \Rightarrow n_2^2 \cos^2 i_B = n_1^2 \left( 1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} (1 - \cos^2 i_B) \right)$$

Soit :

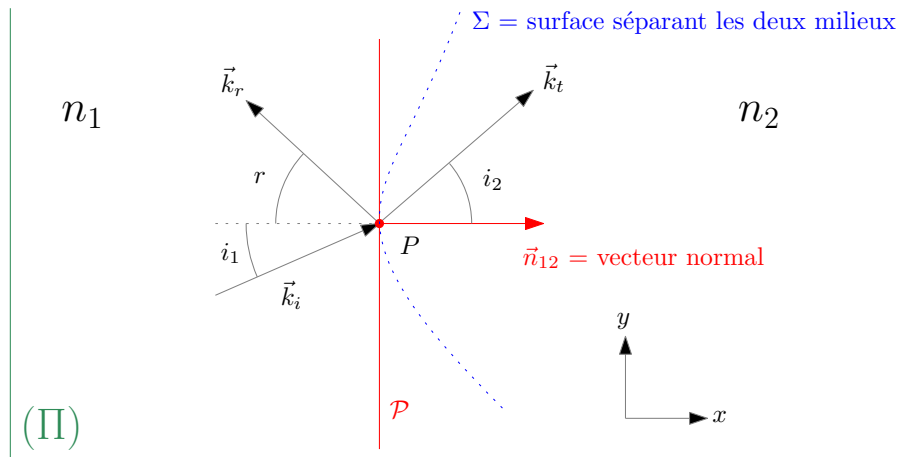
$$\cos i_B = \frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}$$

Soit encore :

$$\tan i_B = \frac{n_1}{n_2}$$

### ✗ Réflexion totale (interface entre deux DLHI)

- ☛ On considère une surface ( $\Sigma$ ) séparant deux DLHI d'indices réels  $n_1$  et  $n_2$  sur laquelle arrive une OPPM de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_i$ . Cette onde se sépare en une onde transmise (OPPM de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} \vec{u}_t$ ) et une onde réfléchiée (OPPM de pulsation  $\omega$  et vecteur d'onde  $\vec{k}_r = n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_r$ ).
- ☛ On se place dans le plan d'incidence comme représenté figure 30



(P) = Plan tangent à Σ en P P=Point d'incidence (II) = plan d'incidence  
 - Les angles sont non orientés et compris entre 0 et π/2 -

**Figure 30** – Réflexion et transmission dans le plan d'incidence

On a donc :

$$\begin{cases} \vec{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} (\cos i_1 \vec{e}_x + \sin i_1 \vec{e}_y) \\ \vec{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} (\cos i_2 \vec{e}_x + \sin i_2 \vec{e}_y) \end{cases}$$

Avec :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

La propagation de l'OEM concerne la composante suivant (Ox) de l'onde transmise :

$$k_{tx} = n_2 \frac{\omega}{c} \cos i_2 \Rightarrow k_{tx}^2 = n_2^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)^2\right)$$

Pour qu'il y ait propagation, il faut que  $k_{tx}$  ait une partie réelle non nulle et donc que  $k_{tx}^2 > 0$  :

- ✓ Si  $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 < 1$  alors  $k_{tx}^2 > 0$  : l'onde se propage dans le milieu 2.
- ✓ Si  $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 > 1$  alors  $k_{tx}^2 < 0$  :  $k_{tx}$  est imaginaire pur, l'onde ne se propage pas dans le milieu 2, on a une onde évanescente. On est dans le cas d'un réflexion totale.
- ✓ Le cas limite, correspond à l'angle limite de réflexion totale, vu en optique géométrique :

$$\sin \Lambda = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \text{pour } i_1 > \Lambda \text{ on a réflexion totale}$$

On peut, dans le cas d'une réflexion totale, calculer la distance caractéristique d'atténuation :

$$k_{tx} = -jn_2 \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)^2 - 1} = -\frac{1}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)^2 - 1}}$$

Où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide de l'OEM.

De même, dans le cas d'une réflexion totale, on peut mettre en évidence le propagation d'une OEM sur l'interface dans la direction (Oy) :

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \exp j \left( \omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r} \right) = \underbrace{\vec{E}_{0t} \exp \left( -\frac{x}{\delta} \right)}_{\text{onde evanescente}} \underbrace{\exp j \left( \omega t - n_1 \frac{\omega}{c} \sin i_1 y \right)}_{\text{OPPM} \parallel (Oy)}$$